ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 517.98, 517.51

А.Б. БЫЧКОВ

ИНТЕРПОЛИРУЮЩИЕ БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ $C^0_\omega(K)$ И $H^0_\omega(K)$

1. Введение

Последовательность векторов $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ банахова пространства F называется полной, если замыкание $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i=0}^\infty$ ее линейной оболочки совпадает с F, и базисной, если она образует базис в $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i=0}^\infty$. Как известно ([1], с. 3), система $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ является базисной тогда и только тогда, когда она не содержит нулевых элементов и найдется константа B такая, что для произвольной числовой последовательности $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ и для всех $n > m \geq 0$ верно неравенство

$$\left\|\sum_{i=0}^m a_i f_i\right\|_F \leq B\left\|\sum_{i=0}^n a_i f_i\right\|_F.$$

В случае $B = 1$ говорят, что $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ — монотонная базисная последовательность.

Пусть F — банахово пространство функций, определенных на множестве K, а $\{x_i\}_{i=0}^\infty \subset K$ — последовательность различных точек. Базис $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ пространства F называется интерполирующим в узлах $\{x_i\}_{i=0}^\infty$, если для всякой функции $f \in F$, $f = \sum\limits_{i=0}^\infty c_i f_i$, и для произвольного номера $n \geq 0$ выполняется

$$\sum_{i=0}^n c_i f_i(x_j) = f(x_j) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n.$$

Подробности о монотонных или интерполирующих базисах можно найти, например, в ([1], с. 1–12).

Будем говорить, что функция $\omega(t)$, $t \geq 0$, принадлежит классу Ω, если $\omega(t) > 0$ для $t > 0$,

$$\omega(0) = 0 = \lim_{t\to+0} \omega(t) = \lim_{t\to+0} \frac{t}{\omega(t)}, \tag{1}$$

и найдется константа γ такая,что

$$\omega(t_1) \leq \gamma\omega(t_2) \quad \text{и} \quad \frac{\omega(t_2)}{t_2} \leq \gamma\frac{\omega(t_1)}{t_1} \quad \text{для всех} \quad t_2 \geq t_1 > 0. \tag{2}$$

Всюду в работе предполагается, что $K \subset \mathbf{R}$, множество K содержит бесконечное число элементов и ограничено в евклидовой метрике (т.е. предкомпактно). Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет усиленному условию Гёльдера на K относительно $\omega(t)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x-y|)} < \varepsilon \quad \forall x, y \in K : 0 < |x-y| < \delta. \tag{3}$$

Класс всех функций, определенных на K и удовлетворяющих условию (3), обозначим $C^0_\omega(K)$ и наделим ω-нормой Гёльдера $\|\cdot\|_\omega = \|\cdot\|_C + |\cdot|_\omega$, где

$$\|f\|_C = \sup_{x\in K} |f(x)| \quad \text{и} \quad |f|_\omega = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)}.$$

Известно, что $\langle C^0_\omega(K), \|\cdot\|_\omega\rangle$ — банахово пространство.

В данной работе для произвольной всюду плотной на K последовательности различных точек $\{x_i\}_{i=0}^\infty \subset K$ построен базис пространства $C^0_\omega(K)$, интерполирующий в узлах $\{x_i\}_{i=0}^\infty$.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Далее используются обозначения

$$a = \inf\{x \mid x\in K\} \quad \text{и} \quad b = \sup\{x \mid x \in K\}. \tag{4}$$

Если $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ — последовательность чисел, то

$$x^{kl}_{\min} = \min_{k\le i\le l} x_i \quad \text{и} \quad x^{kl}_{\max} = \max_{k\le i\le l} x_i.$$

Ломаной на $[a,b]$ с узлами $\{a,b,x_0,\dots,x_n\}$ будем называть непрерывную функцию g, линейную на каждом сегменте $[u,v]$, где u и v — соседние точки набора $\{a,b,x_0,\dots,x_n\}$. Как правило, ломаные в этой работе обладают свойством

$$g(x) = g(x^{0n}_{\min}) \ \ \forall x\in[a,x^{0n}_{\min}] \quad \text{и} \quad g(x) = g(x^{0n}_{\max}) \ \ \forall x\in[x^{0n}_{\max},b]. \tag{5}$$

Через $g|_K$ обозначается сужение функции g на множество K.

Лемма 1. *Пусть $g(x)$ — ломаная на $[a,b]$ с узлами $\{a,b,x_0,\dots,x_n\}$ и $\omega(t)\in\Omega$, тогда*

а) $g\in C^0_\omega[a,b]$ *и* $g|_K \in C^0_\omega(K)$;

б) *если к тому же выполняются равенства* (5), *и* $\omega(t)$ — *вогнутая функция, то*

$$|g|_\omega = |\, g \,|_K \ |_\omega = \max_{0\le i<j\le n} \frac{|g(x_i)-g(x_j)|}{\omega(|x_i-x_j|)}. \tag{6}$$

Утверждение п. а) следует из равенства нулю последнего предела в (1). Для случая $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$, равенство (6) доказано в ([2], с. 271). Это доказательство дословно переносится на случай произвольной вогнутой функции класса Ω. Ввиду (5) и неубывания функции $\omega(t)$ требование $a,b\in\{x_i\}_{i=0}^n$ не существенно.

Пусть $\overline{K}$ — замыкание ограниченного множества K в евклидовой метрике. Поскольку $\overline{K}$ — компакт, найдутся попарно непересекающиеся открытые интервалы $U_i = (u_i^-, u_i^+)$ такие, что

$$\overline{K} = [a,b] \setminus \Big\{\bigcup_{i=1}^\infty U_i\Big\}.$$

Мы рассматриваем случай, когда множество таких интервалов счетно; если $\overline{K}=[a,b]$ либо $\overline{K}$ есть объединение конечного числа отрезков, то дальнейшие рассуждения могут быть существенно упрощены.

Функцию f^* на $[a,b]$ назовем непрерывно-линейным продолжением функции f, определенной на K, если $f^*\,|_K = f$, f^* непрерывна на $[a,b]$ и линейна на каждом интервале U_i.

Лемма 2. *У всякой функции $f\in C^0_\omega(K)$ существует единственное непрерывно-линейное продолжение f^* и $f^*\in C^0_\omega[a,b]$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из равномерной непрерывности функции f (см. (3)). Пусть x и y — произвольные точки множества $\overline{K}$ такие, что $|x-y|<\delta(f,\varepsilon)$, $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ и $|x_n-y_n|<\delta$. Используя (2) и (3), имеем

$$\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{\omega(|x-y|)} = \frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{\omega(|x_n-y_n|)} \frac{\omega(|x_n-y_n|)}{\omega(|x-y|)} \le \varepsilon\gamma \max\left\{1;\ \frac{|x_n-y_n|}{|x-y|}\right\}.$$

Устремляя $n\to\infty$, получаем

$$\frac{|f^*(x)-f^*(y)|}{\omega(|x-y|)} \le \varepsilon\gamma, \quad x,y\in\overline{K}, \quad 0<|x-y|<\delta(f,\varepsilon),$$

т.е. $f^* |_{\overline{K}} \in C^0_\omega(\overline{K})$. Теперь справедливость леммы 2 следует из импликации $f\in C^0_\omega(K) \Longrightarrow f^* \in C^0_\omega[a,b]$, доказанной в работе [3] для всякого компакта $K\subset \mathbf{R}$ при обозначениях (4). $\square$

Лемма 3. *В банаховом пространстве $C^0_\omega(K)$ норма*

$$\|f\|_0 = |f(x_0)| + \sup_{x,y\in K} \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)}$$

эквивалентна ω-норме Гёльдера $\|\cdot\|_\omega$.

Действительно, если функция $f\in C^0_\omega(K)$ такова, что $\|f\|_C \le 2|f(x_0)|$, то справедливо неравенство

$$\|f\|_0 \le \|f\|_\omega \le 2|f(x_0)| + |f|_\omega \le 2\|f\|_0.$$

Если же $f(x_0)<\frac{1}{2}\|f\|_C$, то найдется такая точка $x^*\in K$, что $\|f\|_C \le 2|f(x^*)|$, $x^*\ne x_0$, и тогда

$$\|f\|_0 \le \|f\|_\omega \le 2|f(x^*)| + |f|_\omega \le 2|f(x^*)-f(x_0)| + 2|f(x_0)| + |f|_\omega \le$$
$$\le 2\frac{|f(x^*)-f(x_0)|}{\omega(|x^*-x_0|)}\omega(|x^*-x_0|) + 2\|f\|_0 \le 2\gamma\omega(b-a)|f|_\omega + 2\|f\|_0 \le 2(\gamma\omega(b-a)+1)\|f\|_0,$$

т.е.

$$\forall f\in C^0_\omega(K) \quad \|f\|_0 \le \|f\|_\omega \le 2(\gamma\omega(b-a)+1)\|f\|_0. \quad \square$$

3. Основной результат

Пусть $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность различных точек множества K. Определим систему ломаных $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ на $[a,b]$ следующим образом: если $x_0<x_1$, то положим

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1, & x\ge x_1; \\ 0, & x\le x_0, \\ \text{линейна на } [x_0,x_1] \end{cases} \qquad \text{либо} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} 1, & x\le x_1; \\ 0, & x\ge x_0, \\ \text{линейна на } [x_1,x_0] \end{cases},$$

если $x_0>x_1$. Вообще, для всякого $i\in\mathbf{N}$ определим ломаную ψ_i значениями в узлах $\{a,b,x_0,\ldots,x_n\}$

$$\psi_i(x_j)=\delta_{ij},\ \ 0\le j\le i; \quad \psi_i(a)=\psi_i(x^{0i}_{\min}), \quad \psi_i(b)=\psi_i(x^{0i}_{\max}). \tag{7}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Функции ψ_i полагаются линейными на всех отрезках $[t,\tau]$, где t и τ — соседние точки набора $\{a,b,x_0,\ldots,x_n\}$. Таким образом, для всякой инъективной последовательности $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}\subset K$ мы указали ломаные $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$ и определяем функции f_i на K как сужения $f_i=\psi_i|_K$, $i\in\mathbf{N}$. Введем в рассмотрение банаховы пространства $\langle H^0_\omega(x_0,K),\ |\cdot|_\omega\rangle$, $x_0\in K$, где

$$H^0_\omega(x_0,K) = \{f\in C^0_\omega(K) \mid f(x_0)=0\}.$$

Теорема 1. *Пусть $\omega(t) \in \Omega$, а $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \subset K$ — произвольная плотная в K последовательность различных точек. Тогда система функций $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, является базисом пространства $H_{\omega}^{0}(x_0, K)$, интерполирующим в узлах $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Если, кроме того, функция $\omega(t)$ вогнута, то этот базис монотонный.*

Доказательство. Принадлежность функций $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ классу $H_{\omega}^{0}(K)$ следует из леммы 2. Для произвольной последовательности чисел $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, всякого $n \in \mathbf{N}$ из равенств (7) имеем

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x_j) \quad \forall m < n, \ \ j = 0, 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Предполагая, что функция $\omega(t) \in \Omega$ вогнута, докажем последнее утверждение теоремы. Из (7), (8) и леммы 1 для всех $m < n$ следует оценка

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|_{\omega} = \max_{0 \le p < q \le m} \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \psi_i(x_p) - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \psi_i(x_q)\right|}{\omega(|x_p - x_q|)} =$$

$$= \max_{0 \le p < q \le m} \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i(x_p) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i(x_q)\right|}{\omega(|x_p - x_q|)} \le \left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|_{\omega}.$$

Последнее означает, что $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — монотонная базисная последовательность пространства $H_{\omega}^{0}(K)$ ([1], c. 4).

Проверим полноту системы $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ по норме $|\cdot|_{\omega}$. Пусть f — некоторая функция класса $H_{\omega}^{0}(x_0, K)$. По лемме 2 $f^* \in H_{\omega}^{0}[a, b]$, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(f^*, \varepsilon)$, что

$$\frac{|f^*(x) - f^*(y)|}{\omega(|x - y|)} < \varepsilon \quad \forall x, y \in [a, b] : 0 < |x - y| < \delta. \tag{9}$$

Выберем $M \in \mathbf{N}$ так, чтобы $\mu U_i = u_i^+ - u_i^- \le \delta/3$ для всех $i > M$, и воспользуемся (1): найдется такое число $\eta > 0$, что

$$\frac{t}{\omega(t)} < \frac{\varepsilon\delta}{|f|_{\omega}\, \omega(b - a)} \quad \forall t \in (0, \eta). \tag{10}$$

Зафиксируем, далее, столь большой номер L, чтобы выполнялись два условия:

(i) набор $\{x_i\}_{i=0}^{L}$ является $\delta/3$-сетью множества $\overline{K}$;
(ii) набор $\{x_i\}_{i=0}^{L}$ является η-сетью для концов интервалов $\{U_i\}_{i=1}^{M}$.

Точки $\{x_i\}_{i=0}^{L}$ делят $[a, b]$ на семейство отрезков Δ_i с попарно не пересекающимися множествами внутренних точек (если $\{x_i\}_{i=1}^{L} \cap \{a, b\} = \emptyset$, то таких отрезков $L + 2$). Заметим, что некоторые открытые множества $\operatorname{int} \Delta_i$ могут не содержать точек $\overline{K}$ и совпадать с интервалами семейства $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$. Определим ломаную $G(x)$ на $[a, b]$ значениями в узлах $\{a, b, x_0, \ldots, x_n\}$:

$$G(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, L; \quad G(a) = G(x_{\min}^{0L}); \quad G(b) = G(x_{\max}^{0L}). \tag{11}$$

Ясно, что $G \in \operatorname{span}\{\psi_i\, 1 \le i \le L\}$ и $g \overset{\mathrm{df}}{=} G\,|_K \in \operatorname{span}\{f_i,\, 1 \le i \le L\}$. Для того чтобы оценить величину $|f - g|_{\omega}$, выберем на множестве K две произвольные точки x^* и y^* (пусть, для определенности, $x^* < y^*$) и докажем неравенство

$$\frac{|(f - g)(y^*) - (f - g)(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} < 8\varepsilon \tag{12}$$

для всех возможных вариантов взаиморасположения точек $x^*, y^* \in K$.

1. Предположим сначала, что $x^*, y^* \in \Delta_l \cap K$ при некотором l, $\Delta_l = [t, \tau]$ и $\mu\Delta_l = \tau - t \le \delta$. Тогда

$$\frac{|(f-g)(y^*) - (f-g)(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} \le \frac{|f(y^*) - f(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} + \frac{|g(x^*) - g(y^*)|}{\omega(y^* - x^*)} \le 2\varepsilon.$$

Первое слагаемое не превосходит ε ввиду (9). Второе слагаемое равно нулю, если Δ_l есть $[a, x^{0L}_{\min}]$ либо $[x^{0L}_{\max}, b]$. Если же $\Delta_l = [x_p, x_q]$, где x_p и x_q — соседние точки набора $\{x_i\}_{i=0}^L$, то, применив лемму 1 к функции $G\,|_{\Delta_l}$, имеем

$$\frac{|g(y^*) - g(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} = \frac{|G(y^*) - G(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} \le \frac{|G(x_q) - G(x_p)|}{\omega(x_q - x_p)} = \frac{|f(x_q) - f(x_p)|}{\omega(x_q - x_p)} \le \varepsilon.$$

2. Пусть, по-прежнему, $x^*, y^* \in \Delta_l \cap S$, но при этом $\mu(\Delta_l) \ge \delta$. Тогда ввиду (i) $\Delta_l = [x_p, x_q]$ (концы отрезка Δ_l — необходимо элементы множества $\{x_i\}_{i=0}^L$) и, кроме того, найдется такой интервал $U_k \subset \Delta_l$, что $\mu U_k = u_k^+ - u_k^- > \delta/3$ (следовательно, $k \le M$). Возможны три различных варианта расположения точек x^* и y^* на $\Delta_l = [x_p, x_q]$

$$\begin{aligned} &x_p \le x^* < y^* \le u_k^-, \\ &u_k^+ \le x^* < y^* \le x_q \end{aligned} \tag{13}$$

и

$$x_p \le x^* \le u_k^- < u_k^- + \delta/3 < u_k^+ \le y^* \le x_q. \tag{14}$$

Первые два варианта рассматриваются одинаково.

2.1. Пусть верно неравенство (13). Из условия (i) следует, что $y^* - x^* < \delta/3$, и мы можем использовать (9) для оценки первого слагаемого в (15)

$$\frac{|(f-g)(y^*) - (f-g)(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} \le \frac{|f(y^*) - f(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} + \frac{|g(x^*) - g(y^*)|}{\omega(y^* - x^*)} < \varepsilon + \varepsilon. \tag{15}$$

Второе слагаемое также меньше ε, это следует из двух фактов. Во-первых, $G(x)$ — линейная функция на Δ_l,

$$G(x) = \frac{f(x_q) - f(x_p)}{x_q - x_p}(x - x_p) + g(x_p), \quad x \in \Delta_l.$$

Во-вторых, из (ii) следует, что $y^* - x^* \le u_k^- - x_p < \eta$, и (10) дает неравенство

$$\frac{y^* - x^*}{\omega(y^* - x^*)} < \frac{\varepsilon\delta}{|f|_\omega\, \omega(b-a)}.$$

Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{|g(y^*) - g(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} &= \frac{1}{\omega(y^* - x^*)} \frac{|f(x_q) - f(x_p)|}{x_q - x_p}(y^* - x^*) = \frac{|f(x_q) - f(x_p)|}{\omega(x_q - x_p)} \times \\ &\times \frac{y^* - x^*}{\omega(y^* - x^*)} \frac{\omega(x_q - x_p)}{x_q - x_p} < |f|_\omega \frac{1}{|f|_\omega} \frac{\delta}{x_q - x_p} \frac{\omega(x_q - x_p)}{\omega(b-a)}\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

Это доказывает (15) и завершает рассмотрение данного варианта.

2.2. Теперь предположим, что верно (14). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{|(f-g)(y^*) - (f-g)(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} &\le \frac{|(f-g)(x_p) - (f-g)(x_q)|}{\omega(y^* - x^*)} + \\ &+ \frac{|(f-g)(x_p) - (f-g)(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} + \frac{|(f-g)(y^*) - (f-g)(x_q)|}{\omega(y^* - x^*)} < 0 + 2\varepsilon + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Действительно, первое из трех слагаемых, очевидно, равно нулю. Второе и третье слагаемые оцениваются одинаково. Пусть $x_p \neq x^*$ (иначе второе слагаемое обращается в нуль). Ввиду (i), $|x^* - y^*| > \delta/3 > |x^* - x_p|$; с учетом неубывания $\omega(t)$ и доказанного в п. 2.1 имеем

$$\frac{|(f-g)(x_p) - (f-g)(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} < \frac{|(f-g)(x_q) - (f-g)(x^*)|}{\omega(x^* - x_p)} < 2\varepsilon.$$

3. Пусть, наконец, $x^* \in \Delta_l = [t, \tau]$, $y^* \in \Delta_k = [z, \zeta]$. Тогда

$$t \leq x^* \leq \tau \leq z \leq y^* \leq \zeta.$$

Из доказанного выше для вариантов 1, 2 и из равенств (11) получаем

$$\frac{|(f-g)(y^*) - (f-g)(x^*)|}{\omega(y^* - x^*)} \leq \frac{|(f-g)(y^*) - (f-g)(z)|}{\omega(y^* - z)} + \\ + \frac{|(f-g)(z) - (f-g)(\tau)|}{\omega(z - \tau)} + \frac{|(f-g)(\tau) - (f-g)(x^*)|}{\omega(\tau - x^*)} < 4\varepsilon + 0 + 4\varepsilon = 8\varepsilon.$$

При $z = \tau$ второе слагаемое отсутствует. Неравенство (12) полностью доказано. Ввиду произвольности выбора точек x^* и y^* на K $|f - g|_\omega \leq 8\varepsilon$, что означает полноту системы функций $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ в пространстве $H_\omega^0(K)$.

Таким образом, $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ — монотонный базис $H_\omega^0(K)$ для вогнутых $\omega(t) \in \Omega$, интерполирующий ввиду (8) в узлах $\{x_i\}_{i \in \mathbf{N}}$.

Как известно ([2], с. 67-73), для всякой $\omega(t) \in \Omega$ найдется вогнутая функция $\varphi(t) \in \Omega$ такая, что $\frac{\varphi(t)}{2\gamma} \leq \omega(t) \leq \varphi(t)$ для всех $t \geq 0$. Последнее означает, что $H_\omega^0(x_0, K) = H_\varphi^0(x_0, K)$ для произвольной $x_0 \in K \subset \mathbf{R}$, а нормы $\|\cdot\|_\omega$ и $\|\cdot\|_\varphi$ эквивалентны. $\square$

Дополним систему $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ функцией $f_0(x) \equiv 1$, $x \in K$.

Теорема 2. *Пусть $\{x_i\}_{i=0}^\infty \subset K$ — произвольная плотная на множестве K последовательность различных точек, $\omega \in \Omega$. Тогда функции $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ образуют базис в банаховом пространстве $C_\omega^0(K)$, интерполирующий в узлах $\{x_i\}_{i=0}^\infty$. При дополнительном предположении выпуклости функции ω этот базис монотонный.*

Доказательство. Пусть $f \in C_\omega^0(K)$ — произвольная функция. Тогда $f - f(x_0) \in H_\omega^0(x_0, K)$. По теореме 1, $f(x) - f(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x)$, ряд сходится по полунорме $|\cdot|_\omega$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x). \tag{16}$$

Из равенств $f_i(x_0) = 0$, $i \in \mathbf{N}$, и леммы 3 следует сходимость ряда (16) по норме $\|\cdot\|_\omega$. Единственность разложения $f(x)$ по системе $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ и интерполяционность базиса легко проверить последовательной подстановкой в (16) значений $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Последнее утверждение теоремы 2 следует из монотонности базисной системы $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ по полунорме $|\cdot|_\omega$ (теорема 1) и по норме $\|\cdot\|_C$ (очевидно). $\square$

Замечание 1. В доказанных теоремах невозможно заменить требование вогнутости $\omega(t)$ на более слабое условие квазивогнутости ($\omega(t)$ и $t\omega(t)^{-1}$ не убывают).

Замечание 2. Как отмечено в [4], если K — компакт, а $\omega(t)$ удовлетворяет $\int\limits_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta))$ и $\int\limits_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O\Big(\frac{\omega(\delta)}{\delta}\Big)$, то существует последовательность $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ такая, что приведенная выше конструкция дает безусловный интерполирующий базис $\{f_i\}_{i=0}^\infty$, пространства $C_\omega^0(K)$.

Литература

1. Semadeni Z. *Schauder bases in Banach spaces of continuous functions.* – Berlin: Springer, Lect. Notes in Math. – 1982. – V. 918. – 136 s.
2. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.*– М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Бычков А.Б. *Базисы в банаховых пространствах функций, удовлетворяющих обобщенному усиленному условию Гёльдера.* – Ростовск. гос. акад. строит. – Ростов-на-Дону, 1996. – 24 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.06.96, № 1994-В96.
4. Бычков А.Б. *0 базисах в строго гёльдеровых пространствах* // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тез. докл. воронежской зимней матем. школы. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. – С. 35.

Ростовский государственный строительный университет

Поступила 23.06.1995