ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

УДК 519.853

В.С. ИЖУТКИН, А.В. БЛИНОВ

МЕТОД ВНЕШНИХ ЦЕНТРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИВЕДЕННОГО ГРАДИЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Введение

Рассматривается задача

$$\min\{f_0(x),\ x \in \Omega\}, \quad \Omega = \{x \in E^n \mid f_j(x) \le 0,\ j \in J\}, \tag{1}$$

где E^n есть n-мерное евклидово пространство, J — конечное множество индексов, функции $f_j(x) \in C^{(2)}(E^n)$, $j \in J \cup \{0\}$.

Под решением задачи (1) будем понимать точку x_*, удовлетворяющую необходимым условиям минимума первого порядка: существуют такие числа $\lambda_*^j \ge 0$, $j \in J$, что

$$f_0'(x_*) + \sum_{j \in J} \lambda_*^j f_j'(x_*) = 0, \quad \lambda_*^j f_j(x_*) = 0, \quad j \in J,\ \ x \in \Omega. \tag{2}$$

В работах [1], [2] предложена единая схема построения и исследования методов решения задачи (1), основанная на использовании "приведенного" направления в качестве направления движения в текущей итерационной точке и применении различных штрафных функций для выбора длины шага.

В рамках указанной единой схемы реализованы как известные, так и новые методы точных [1] и дифференцируемых штрафных функций [3], методы возможных направлений [2] и модифицированных функций Лагранжа [4], методы центров и барьерных функций [5].

В данной работе в качестве функции выигрыша предлагается использовать внешнюю функцию расстояния ([6], с. 84)

$$\Phi_\beta(x) = ((f_0(x) - \beta)^+)^2 + \sum_{j \in J} (f_j^+(x))^2, \quad y^+ = \max\{0, y\}, \tag{3}$$

реализуя в рамках единой схемы как известный, так и новый метод центров. Здесь β — штрафной параметр. Отметим, что функция (3) ранее применялась многими авторами в методах нагруженных функций.

1. Метод внешних центров

Назовем

$$J_0(x) = \{j \in J \mid f_j(x) \ge 0\}$$

множеством индексов "рабочих" ограничений.

Пусть выполняются

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00680).

Условие 1. В каждой точке x_*, являющейся решением задачи (1), выполняется условие строгой дополняющей нежесткости, т. е. в (2)

$$\lambda_*^j > 0, \quad j \in J_*, \quad J_* = \{j \in J \mid f_j(x_*) = 0\}.$$

Условие 2. Градиенты $f_j'(x)$, $j \in J_0(x)$, линейно независимы для всех точек $x \in E^n$.

Аналогично [1] линеаризуем в точке $x \in \Omega$ функции $f_j(\xi)$, $j \in J_0(x)$, ограничений задачи (1). Перейдем от системы неравенств $f_j(\xi) \le 0$ к системе уравнений

$$f_j(x) + \langle f_j'(x),\ \xi - x\rangle = -v_j, \quad j \in J_k(x), \quad \xi \in E^n, \tag{4}$$

где $v = (v_j)_{j \in J_0(x)} \in E^r$ — вектор параметров.

Обозначим через $A = A(x)$ матрицу, состоящую из столбцов $f_j'(x)$, $j \in J_0(x)$, r — количество элементов множества $J_0(x)$. В случае $0 < r < n$ определим матрицу $P = P(x)$ размерности $n \times (n - r)$, ранга $n - r$ и матрицу $R = R(x)$ размерности $n \times r$, ранга r условиями

$$A^T P = 0, \quad A^T R = I_r. \tag{5}$$

Здесь I_r — единичная матрица порядка r.

Укажем для случая $0 < r < n$ один из способов построения матриц P, R, удовлетворяющих условиям (5).

Пусть G — положительно определенная матрица размерности $n \times n$, H — такая нижняя треугольная матрица, что $G = HH^T$. Получим LQ-разложение матрицы A^T в виде

$$A^T = (L : 0)Q. \tag{6}$$

Здесь L — левая треугольная, Q — ортогональная матрицы размерностей $r \times r$ и $n \times n$ соответственно. Разобьем Q на блоки Q_1 и Q_2 размерностей $r \times n$ и $(n - r) \times n$ так, что $Q^T = (Q_1^T; Q_2^T)$. Положим

$$P = HQ_2^T, \quad R = Q_1^T L^{-1} = GA(A^T GA)^{-1}. \tag{7}$$

Выпишем в общем виде решение $s = \xi - x$ системы (4):

$$s = \begin{cases} -Pz, & r = 0,\ P = I_n,\ z \in E^n; \\ -Pz - R(v + f), & 0 < r < n,\ z \in E^{n-r},\ v \in E^r; \\ -R(v + f), & r = n,\ R = (A^T)^{-1},\ v \in E^n. \end{cases} \tag{8}$$

Согласно (8) построение удовлетворяющего (4) вектора $s = \xi - x$ сводится к выбору матриц P, R и векторов $z \in E^{n-r}$, $v \in E^r$.

Предполагая, что выбор векторов z, v обеспечивает равномерную ограниченность определенной в (8) величины $\|s(z(x), v(x))\|$ при $x \in E^n$, получим оценку изменения функции $\Phi_\beta(x)$ при движении из точки x вдоль направления s на длину шага t, где $t \in (0, 1]$. Для этого будем предполагать, что выполняется

Условие 3. Матрица Гессе $\Phi_\beta''(x)$ функции (3) является ограниченной (т. е. имеет конечную норму) для любых $x \in E^n$.

Используя разложение функции $\Phi_\beta(x)$ в ряд Тейлора в точке x с остаточным членом в точке $\zeta = x + \alpha ts$, $\alpha \in (0;1)$, на основе (5), (8) и условий 2, 3 имеем

$$\begin{aligned}
\Phi_\beta(x+ts) &= \Phi_\beta(x) + t\langle \Phi'_\beta(x), s\rangle + \frac{t^2}{2}\langle s, \Phi''_\beta(\zeta)s\rangle \le \\
&\le \Phi_\beta(x) + t\Big[2B\langle f'_0(x), s\rangle + 2\sum_{j\in J} f_j^+(x)\langle f'_j(x), s\rangle\Big] + t^2 O(\|s\|^2) = \\
&= \Phi_\beta(x) + t\Big[2B\langle f'_0(x), s\rangle - 2\sum_{j\in J_0(x)} f_j^+(x)(v_j + f_j(x))\Big] + t^2 O(\|s\|^2) = \\
&= \Phi_\beta(x) + t[2B\omega(x,z,v) - 2\langle f^+(x),\, v + f(x)\rangle] + t^2 O(\|s\|^2), \qquad (9)
\end{aligned}$$

где

$$\omega(x,z,v) = \langle f'_0(x), s\rangle = \begin{cases} \langle g(x), z\rangle, & r = 0; \\ \langle g(x), z\rangle + \langle u(x),\, v + f(x)\rangle, & 0 < r < n; \\ \langle u(x),\, v + f(x)\rangle, & r = n, \end{cases} \qquad (10)$$

$g(x) = -P^T(x)f'_0(x)$, $u(x) = -R^T(x)f'_0(x)$, $f(x) = (f_j(x))_{j\in J_0(x)}$, $B = B(x) = (f_0(x) - \beta)^+$.

В качестве аппроксимации множества Ω в текущей точке x используем систему уравнений (4).

Обозначим

$$\omega_\beta(x,z,v) = 2(f_0(x)-\beta)^+\omega(x,z,v) - 2\langle f^+(x),\, v + f(x)\rangle. \qquad (11)$$

Имея в виду уменьшение штрафной функции $\Phi_\beta(x)$ при движении из точки x вдоль направления s, будем выбирать определяющие его векторы $z \in E^{n-r}$, $v \in E^r$ следующим образом:

$$z = P^T(x)f'_0(x) = -g(x), \qquad (12)$$

$$z = (P^T(x)G(x)P(x))^{-1}P^T(x)f'_0(x), \qquad (13)$$

где $G(x)$ — аппроксимирующая матрица для L''_{xx} — гессиана функции Лагранжа задачи (1).

Вектор v вычисляем как стационарную точку квадратичной функции

$$v = \operatorname*{Arg\,min}_{\eta\in E^n}\{\langle Bu(x) - f^+(x),\, \eta + f(x)\rangle + \tfrac{1}{2}\|\eta + f(x)\|^2\} = -Bu(x) + f^+(x) - f(x). \qquad (14)$$

Оценим величину

$$\begin{aligned}
\omega_\beta(x,z,v) &= 2B(\langle g(x), z\rangle + \langle u(x),\, v + f(x)\rangle) - 2\langle f^+(x),\, v + f(x)\rangle = \\
&= 2B\langle g(x), z\rangle + 2B\langle u(x) - \tfrac{1}{B}f^+(x),\, v + f(x)\rangle = \\
&= -2B\|g(x)\|^2 - 2\langle Bu(x) - f^+(x),\, Bu(x) - f^+(x)\rangle = -2B\|g(x)\|^2 - 2\|Bu(x) - f^+(x)\|^2 \le 0.
\end{aligned}$$

Если $\omega_\beta(x,z,v) < 0$, то штрафная функция $\Phi_\beta(x)$ будет убывать. Если $\omega_\beta(x,z,v) = 0$, то

$$g(x) = 0, \quad u(x) = \frac{1}{B}f^+(x). \qquad (15)$$

При этом справедлива

Лемма 1. *Условия* (15) *эквивалентны необходимым условиям экстремума для функции* $\Phi_\beta(x)$ *в точке* x.

Доказательство. Действительно, равенство $g(x) = -P^T(x)f_0'(x) = 0$ означает, что вектор $-f_0'(x)$ принадлежит подпространству, натянутому на векторы $f_j'(x)$, $j \in J_0(x)$, т. е. $f_0'(x) + \sum\limits_{j \in J_0(x)} \mu^j f_j'(x) = 0$. Умножая обе части равенства на матрицу R^T, получаем $\mu^j(x) = u^j(x)$, $j \in J_0(x)$, из чего следует, что $f_0'(x) + \frac{1}{B} \sum\limits_{j \in J_0(x)} f_j^+(x) f_j'(x) = 0$; далее, умножая обе части равенства на $2B$, будем иметь $2Bf_0'(x) + 2\sum\limits_{j \in J} f_j^+(x)f_j'(x) = \Phi_\beta'(x) = 0$, что и требовалось доказать. Доказательство обратного утверждения очевидно. □

Итак, при вышеуказанном выборе параметров z и v вариант метода внешних центров [6] может быть реализован в рамках единой схемы методов приведенных направлений.

2. Метод рекурсивного квадратичного программирования на основе внешней функции расстояния

Рассмотрим случай, когда условие 2 не выполняется, т. е. когда градиенты "рабочих" ограничений линейно зависимы. Аналогично [3] будем определять направление s из систем линейных уравнений

$$Gs = -f_0'(x) + A(x)w, \tag{16}$$

$$A^T(x)s = -v - f(x), \tag{17}$$

рассматривая векторы $w, v \in E^r$ как векторы параметров. Разрешая первую систему относительно s и подставляя во вторую, получим

$$-A^T(x)G^{-1}(x)f_0'(x) + A^T(x)G^{-1}(x)Aw + f(x) = -v.$$

Полагая

$$v = Bw + f^+(x) - f(x), \tag{18}$$

получим систему

$$(A^T(x)G^{-1}(x)A(x) + BI_r)w = A^T(x)G^{-1}(x)f_0'(x) - f^+(x). \tag{19}$$

Оценим значение функции $\omega_\beta(x, z, v)$ при движении вдоль направления s,вычисляемого из (16), (19),

$$\begin{aligned}
\omega_\beta(x,z,v) &= 2B\langle f_0'(x), s\rangle - 2\langle f^+(x),\, v + f(x)\rangle = \\
&= 2B\langle f_0'(x), s\rangle - 2\langle f^+(x),\, v + f(x)\rangle + 2B\langle w, f(x) + v\rangle - 2B\langle w, f(x) + v\rangle = \\
&= 2B\langle f_0'(x) - A(x)w, s\rangle - 2\langle Bw + f^+(x),\, v + f(x)\rangle = \\
&= -2B\langle s, G^{-1}(x)s\rangle - 2\langle Bw + f^+(x), Bw + f^+(x)\rangle = \\
&= -2B\langle s, G^{-1}(x)s\rangle - 2\|Bw + f^+(x)\|^2 \le 0.
\end{aligned}$$

Так как матрица $G(x)$ является строго положительно определенной для $x \in E^n$, то из соотношения $\omega_\beta(x,z,v) = 0$ следует $s = 0$, $w = -\frac{1}{B}f^+(x)$. Отсюда согласно (16) получаем

$$-f_0'(x) + A(x)w = 0, \quad -f_0'(x) - A\frac{1}{B}f^+(x) = 0,$$

$$Bf_0'(x) + Af^+(x) = \Phi_\beta'(x) = 0.$$

Итак, при выборе направления s из формул (16)–(19) может быть построен метод рекурсивного квадратичного программирования. Так как (19) определяет вектор w независимо от того, является матрица A вырожденной или нет, то направление s всегда может быть вычислено из (16), (19). Отметим, что в силу условия 1 в окрестности решения градиенты функций "рабочих" ограничений линейно независимы.

3. Метод внешних центров с использованием приведенного градиента

Перейдем теперь к построению нового метода. В качестве "рабочего" набора выберем множество

$$J_\varepsilon(x) = \{j \in J \mid f_j(x) \geq -\varepsilon\}, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Накладывая на параметр v условие неотрицательности, аналогично (4) будем иметь для направления s соотношение

$$f_j(x) + \langle f_j'(x), s\rangle \leq 0, \quad j \in J_\varepsilon(x). \tag{20}$$

Отметим, что налагаемое на v условие определяет более точную линеаризацию "рабочих" ограничений.

Заменим условие 2 на

Условие 4. Градиенты $f_j'(x)$, $j \in J_\varepsilon(x)$, являются линейно независимыми для всех $x \in E^n$.

Будем выбирать векторы $z \in E^{n-r}$, $v \in E_+^r$, используя

Условие 5. Функции $P(x)$, $R(x)$, $z(x)$, $v(x)$ непрерывны при фиксированном в окрестности точки x множестве $J_\varepsilon(x)$, $\omega_\beta(x,z,v) \leq 0$, причем соотношение $\omega_\beta(x,z,v) = 0$ влечет

$$g(x) = 0, \quad \langle u(x), f(x)\rangle = 0, \quad u(x) \geq 0, \quad f^+(x) = 0. \tag{21}$$

Лемма 2. *Условия* (21) *эквивалентны необходимым условиям минимума для задачи* (1) *в точке x.*

Доказательство леммы 2 приведено в ([1], с. 1802).

Отметим, что в отличие от известного метода (см. лемму 1) вышеуказанные условия определяют условия экстремума для исходной задачи, а не для вспомогательной функции.

Один из способов вычисления векторов z и v, удовлетворяющих указанным выше условиям, дают соотношения

$$z = -g(x), \tag{22}$$

$$v(B) = \operatorname*{Arg\,min}_{\eta \in E_+^r}\{\langle Bu(x) - f^+(x),\, \eta + f(x)\rangle + \tfrac{1}{2}\|\eta + f(x)\|^2\} = (-Bu(x) + f^+(x) - f(x))^+. \tag{23}$$

Получим условие на выбор параметра β в итерационной точке x_k. Из (11) следует, что если $\omega(x_k, z_k, v(B_k)) \leq 0$, то $\omega_{\beta_k}(x_k, z_k, v(B_k)) \leq 0$ при любом B_k. Если $\omega(x_k, z_k, v(B_k)) > 0$, то для обеспечения отрицательности $\omega_{\beta_k}(x_k, z_k, v(B_k))$ вычисляем B_{k+1} по формуле

$$B_{k+1} = \alpha\frac{\langle f^+(x_k), v(B_k) + f(x_k)\rangle}{\omega(x_k, z_k, v_k)}, \quad \alpha \in (0,1). \tag{24}$$

При этом

$$\beta_{k+1} = f_0(x_k) - \alpha\frac{\langle f^+(x_k),\, v_k + f(x_k)\rangle}{\omega(x_k, z_k, v_k)}.$$

Покажем выполнение (21). Обозначим

$$J_1 = \{j \in J_\varepsilon(x) \mid -Bu_j - f_j + f_j^+ \geq 0\}, \quad J_2 = J_\varepsilon(x) \setminus J_1.$$

Оценим значение $\omega_\beta(x,z,v)$. Для этого, подставив (22), (23) в (11), имеем

$$\omega_\beta(x,z,v(B)) = B\langle g(x), z\rangle + B\langle u(x), v(B) + f(x)\rangle - \langle f^+(x), v(B)\rangle - \langle f^+(x), f(x)\rangle =$$

$$= -B\|g(x)\|^2 + \sum_{j\in J_1}(Bu_j(x) - f_j^+(x))(-Bu_j(x) - f_j(x) + f_j^+(x) + f_j(x)) + \sum_{j \in J_2}(Bu_j(x) - f_j^+(x))f_j(x) =$$

$$= -B\|g(x)\|^2 - \sum_{j\in J_1}(Bu_j(x) - f_j^+(x))^2 + B\sum_{j\in J_2} u_j(x)f_j(x) - \|f^+(x)\|^2. \tag{25}$$

Если $\omega_\beta(x,z,v) = 0$ при любом B, то согласно (25) следует, что $g(x) = 0$, $f^+(x) = 0$, $\langle u(x), f(x)\rangle = 0$, $u(x) \geq 0$. Последнее по лемме 2 означает, что точка x — решение задачи (1).

Отметим, что определяемый (5), (8), (22), (23), (24) метод с использованием приведенного градиента, в отличие от рассмотренного выше метода внешних центров, не является адаптивным, т. к. не использует итерационной процедуры безусловной минимизации внешней функции расстояния (3) при фиксированном значении штрафного параметра β.

Итак, используя формулу (24) для расчета штрафного параметра β, мы можем построить алгоритм нового метода внешних центров с функцией расстояния (3).

4. Алгоритм метода внешних центров и его сходимость

Для решения задачи (1) предлагается

Алгоритм

1. Выбираем начальное приближение $x_0 \in E^n$, параметры $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma \in (0; 1/2)$, $\beta_0 \leq \min\limits_x f_0(x)$, $\alpha \in (0; 1)$.
2. Пусть уже получены точка x_k, числа ε_k, β_k. Следуя (6), осуществляем разложение матрицы $A(x_k)$. В случае вырожденности матрицы $A(x_k)$ определяем направление s_k из (16) и переходим на шаг 4, иначе определяем матрицы $P(x_k)$, $R(x_k)$ согласно (7) и направление s_k из (8). Определяем $\omega(x_k, z_k, v_k)$ из (10), параметр v_k из соотношения $v_k = (-(f_0(x_k) - \beta_k)^+ u(x_k) + f^+(x_k) - f(x_k))^+$.
3. Определяем
$$\beta_{k+1} = \begin{cases} f_0(x_k) - \alpha \dfrac{\langle f^+(x_k),\, v_k + f(x_k)\rangle}{\omega(x_k, z_k, v_k)}, & \text{если } \omega(x_k, z_k, v_k) > 0, \\ \beta_k \ \text{ иначе;} \end{cases}$$
$$\omega_{\beta_{k+1}}(x_k, z_k, v_k) = 2(f_0(x_k) - \beta_{k+1})^+ \omega(x_k, z_k, v_k) - 2\langle f^+(x_k),\, v_k + f(x_k)\rangle.$$
Если $\omega_{\beta_{k+1}}(x_k, z_k, v_k) \geq 0$, то x_k является решением задачи (1). Процесс на этом заканчивается. Пусть $\omega_{\beta_{k+1}}(x_k, z_k, v_k) < 0$. Если $J_{\varepsilon_k}(x_k) = \emptyset$ либо выполняются неравенства $u_k^j > |f_j(x_k)|$, $j \in J_{\varepsilon_k}(x_k)$, то полагаем $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$, в противном случае принимаем $\varepsilon_{k+1} = \min\{\varepsilon_k,\, |\omega_{\beta_{k+1}}(x_k, z_k, v_k)|\}$.
4. Находим величину шага
$$t_k = \max\{t = 2^{-l} \mid \Phi_{\beta_{k+1}}(x_k + ts_k) \leq \Phi_{\beta_{k+1}}(x_k) + \gamma t \omega_{\beta_{k+1}}(x_k, z_k, v_k),\ l = 0, 1, \dots\}. \quad (26)$$
5. Вычисляем $x_{k+1} = x_k + t_k s_k$. Переходим на шаг 2.

Приступая к анализу алгоритма, покажем, что выбор шага на каждой итерации осуществляется за конечное число проб.

Из (9) следует, что фигурирующее в (26) неравенство выполняется для всех значений $t \in [0, \bar{t}_k]$, где
$$\bar{t}_k = \min\left\{1, \frac{(1-\gamma)|\omega_{\beta_{k+1}}(x_k, z_k, v_k)|}{O(\|s_k(x_k, z_k, v_k)\|^2)}\right\}. \quad (27)$$
Отсюда вытекает конечность процедуры дробления при выборе шага из условия (26) и неравенство
$$t_k > 0.5\, \bar{t}_k. \quad (28)$$

Если вырабатываемая алгоритмом последовательность $\{x_k\}$ конечна, то последняя ее точка является решением задачи (1).

Сходимость алгоритма в случае бесконечной последовательности $\{x_k\}$ устанавливает

Теорема. *Пусть последовательность $\{x_k\}$ ограничена. Тогда любая ее предельная точка является решением задачи (1). При этом существуют такое число $\varepsilon_* > 0$ и номер k_1, что $\varepsilon_k = \varepsilon_*$, $k \geq k_1$.*

Доказательство. Докажем вначале второе утверждение теоремы. Поскольку последовательность ε_k монотонно не возрастает и ограничена, существует $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = \widetilde{\varepsilon}_k \geq 0$. Достаточно показать, что множество $N_1 = \{k \in N \mid \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k\}$ конечно. Здесь N — множество натуральных чисел.

Предполагая противное, рассмотрим возможные случаи.

а) $\widetilde{\varepsilon}_k > 0$. Тогда $\varepsilon_k \geq \widetilde{\varepsilon}_k > 0$, $k \in N$. Из непрерывности функций $P(x)$, $R(x)$, $z(x)$, $v(x)$ при фиксированном множестве $J_\varepsilon(x)$ с учетом конечности множества J следует ограниченность величин $s(x_k, z(x_k), v(x_k))$. Из соотношений (27), (28)

$$t_k > C_1|\omega_{\beta_{k+1}}(x_k, z_k, v_k)|. \tag{29}$$

Объединяя (26), (29), получаем

$$\Phi_{\beta_{k+1}}(x_{k+1}) \leq \Phi_{\beta_{k+1}}(x_k) - C_1\gamma\omega^2_{\beta_{k+1}}(x_k, z_k, v_k). \tag{30}$$

Пусть x_k, $k \in N_1$, сходится. Покажем, что $\lim\limits_{k\in N_1} \omega_{\beta_{k+1}}(x_k, z_k, v_k) = 0$. Для этого рассмотрим последовательность B_k. Согласно (24) последовательность B_k монотонно не возрастает, ограничена снизу и, следовательно, сходится. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = \overline{B} \geq 0$. Рассмотрим два случая.

1) $\overline{B} > 0$. Будем считать, что $x_{k'}$, $x_{k''}$ — две соседние точки подпоследовательности N_1. Оценим изменение значения функции $\Phi_\beta(x)$ на подпоследовательности N_1. Используя (30), имеем

$$\begin{aligned}\Phi_{\beta_{k''}}(x_{k''}) &\leq \Phi_{\beta_{k''}}(x_{k''-1}) - C_1\gamma\omega^2_{\beta_{k''}}(x_{k''-1}, z_{k''-1}, v_{k''-1}) \leq \Phi_{\beta_{k''}}(x_{k''-1}) \leq \cdots \\ &\cdots \leq \Phi_{\beta_{k'+1}}(x_{k'}) - C_1\gamma\omega^2_{\beta_{k'+1}}(x_{k'}, z_{k'}, v_{k'}) \leq \Phi_{\beta_{k'}}(x_{k'}) - C_1\gamma\omega^2_{\beta_{k'+1}}(x_{k'}, z_{k'}, v_{k'}).\end{aligned}$$

Переходя в обеих частях последнего полученного неравенства к пределу по $k \in N_1$ и учитывая, что $\overline{B} > 0$, имеем $\lim\limits_{k\in N_1} \omega_{\beta_k}(x_k, z_k, v_k) = 0$.

2) $\overline{B} = 0$. Тогда согласно (24) получаем

$$\lim_{k\in N} B_k = \lim_{k\in N} \alpha\frac{\langle f^+(x_k), v(B_k) + f(x_k)\rangle}{\omega(x_k, z_k, v_k)} = 0,$$

откуда следует с учетом ограниченности $\omega(x_k, z_k, v_k)$, что $\lim\limits_{k\in N}\langle f^+(x_k), v(B_k) + f(x_k)\rangle = 0$. Далее, переходя в неравенстве

$$0 < \omega(x_k, z_k, v_k) = -g^2(x_k) - \sum_{j\in J_1} u_j^2(x_k) + \sum_{j\in J_2} u_j(x_k) f_j(x_k)$$

к пределу по k, получаем $\lim\limits_{k\in N} \omega_{\beta_k}(x_k, z_k, v_k) = 0$. Но $\varepsilon_{k+1} = |\omega_{\beta_k}(x_k, z_k, v_k)|$, $k \in N_1$, и, следовательно, $\lim\limits_{k\in N_1} \varepsilon_k = 0$, что противоречит предположению $\widetilde{\varepsilon} > 0$.

б) $\widetilde{\varepsilon} = 0$. Так как $\varepsilon_{k+1} = |\omega_{\beta_k}(x_k, z_k, v_k)|$, $k \in N_1$, то

$$\lim_{k\in N_1} \omega_{\beta_k}(x_k, z_k, v_k) = 0. \tag{31}$$

Без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{x_k\}_{k\in N_1}$ сходится,

$$\lim_{k\in N_1} x_k = \widetilde{x}, \quad \lim_{k\in N_1} z_k = \widetilde{z}, \quad \lim_{k\in N_1} v_k = \widetilde{v}$$

и множество $J_\varepsilon(x_k) = I$ не зависит от номера итерации $k \in N_1$.

Из соотношения (31) с учетом непрерывности $z(x)$, $v(x)$, $\omega(x, z, v)$ вытекает $\omega_I(\widetilde{x}, \widetilde{z}, \widetilde{v}) = 0$, где функция $\omega_I(\widetilde{x}, \widetilde{z}, \widetilde{v})$ определяется аналогично $\omega_\beta(\widetilde{x}, \widetilde{z}, \widetilde{v})$ заменой множества $J_\varepsilon(x)$ на I. В силу условия 5 точка $x \in \Omega$ удовлетворяет необходимым условиям минимума: существуют такие числа $\mu^j \geq 0$, $j \in I$, что

$$f_0(x) + \sum_{j\in I} \mu^j f_j'(x) = 0, \quad \mu^j f_j(x) = 0, \quad j \in I. \tag{32}$$

При этом $\mu = u_I(\widetilde{x})$, где $\mu = \mu^j$, $j \in J$, вектор $u_I(x)$ определяется аналогично $u(x)$ с заменой $J_\varepsilon(x_k)$ на I.

Так как $\lim\limits_{k\in N_1} \varepsilon_k = 0$, то для $k \in N_1$ выполняется включение $I = J_\varepsilon(x_k) \subset J(x_k)$. Сопоставляя соотношения (2) и (32) с условием 5, заключаем, что $I = J(\widetilde{x})$ и $u_I^j(\widetilde{x}) > 0$, $j \in J$. В силу соотношения $\lim\limits_{k\in N_1} f_j(x_k) = 0$, $j \in I$, и непрерывности функции $u(x)$ при фиксированном множестве $J_\varepsilon(x_k)$ для достаточно больших номеров $k \in N_1$ выполняются неравенства $u_k^j > |f_j(x_k)|$, $j \in J_\varepsilon(x_k)$. Таким образом, множество N_1 содержит лишь конечное число элементов, что противоречит нашему предположению. Следовательно, начиная с некоторого номера k_1, значение ε_k перестает меняться.

Пусть теперь x_k, $k \in N_2$, — произвольная сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{k\in N_2} x_k = \overline{x}$. Поскольку $\varepsilon_k = \varepsilon_* > 0$, $k \geq k_1$, то по доказанному в п. а) выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{k\in N_2} \omega_{\beta_k}(x_k, z_k, v_k) = 0$. Последнее согласно случаю б) означает, что точка $\overline{x}$ является решением задачи (1). $\square$

Заключение

В работе предлагается дальнейшее развитие единого подхода к построению методов решения задачи нелинейного программирования (1) на основе понятия приведенного направления, предложенного в работах [1]–[5]. Наряду с методами точных штрафных функций [1], возможных направлений [2] и методами дифференцируемых штрафных функций [3] и модифицированной функции Лагранжа [4] в единую схему методов приведенных направлений включен новый метод внешних центров, использующий внешнюю функцию расстояния (3). Предложенный алгоритм метода внешних центров основан на специальном способе построения индексного множества “рабочих” ограничений и процедуре пересчета штрафного параметра в итерационных точках.

Показано, что при определенном выборе параметров, в рамках единой схемы могут быть реализованы известный метод внешних центров [6] и метод рекурсивного квадратичного программирования, основанный на внешней функции расстояния (3), который используется при решении вырожденных задач.

Изложенный метод реализован программно и включен в оптимизационную диалоговую систему ОДиС [7].

Благодарность

Авторы выражают благодарность профессору К. Гроссману за плодотворное обсуждение работы, а также рецензентам за замечания, способствовавшие устранению неточностей и улучшению изложения результатов.

Литература

1. Ижуткин В.С., Кокурин М.Ю. *Методы приведенных направлений для задачи нелинейного программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – № 12. – С. 1799–1814.
2. Ижуткин В.С., Кокурин М.Ю. *Методы приведенных направлений с допустимыми точками для задачи нелинейного программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 30. – № 2. – С. 217–230.

3. Ижуткин В.С., Петропавловский М.В. *Методы приведенных направлений на основе дифференцируемой штрафной функции для задачи нелинейного программирования* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 12. – С. 57–67.
4. Ижуткин В.С., Петропавловский М.В. *Методы приведенных направлений на основе модифицированной функции Лагранжа для задачи нелинейного программирования* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 12. – С. 33–42.
5. Ижуткин В.С., Петропавловский М.В., Блинов А.В. *Методы центров и барьерных функций с использованием приведенных направлений для задачи нелинейного программирования* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 12. – С. 30–41.
6. Гроссман К., Каплан А.А. *Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации.* – Новосибирск: Наука, 1981. – 183 с.
7. Ижуткин В.С., Петропавловский М.В. *Оптимизационная диалоговая система ОДиС на основе методов приведенных направлений* // Материалы XII научн. конф. Системы программного обеспечения решения экономических задач. – Нарва–Йыэссуу, 1992. – С. 10–11.

Марийский государственный университет

Поступила 28.08.1997