ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 6 (517)

УДК 519.688

О.А. ЗАДВОРНОВ

О СХОДИМОСТИ ПОЛУЯВНОГО МЕТОДА С РАСЩЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ВТОРОГО РОДА

1. Введение

Статья посвящена исследованию сходимости итерационного метода решения вариационных неравенств второго рода. Рассматриваются задачи с обратно сильно монотонными [1], коэрцитивными и, вообще говоря, непотенциальными операторами и выпуклыми недифференцируемыми функционалами в гильбертовых пространствах. Такие задачи возникают при математическом моделировании нелинейных процессов, приводящем к дифференциальным операторам с вырождением. Постановкам и приближенным методам решения подобных задач посвящена обширная литература (напр., [2]–[7]).

Итерационный метод, исследуемый в данной статье, осуществляет декомпозицию (расщепление) исходной задачи и назван полуявным, поскольку не требует обращения оператора, фигурирующего в вариационном неравенстве. Близкие методы декомпозиции, основанные на теории двойственности, исследованы в [8], [9], но, в отличие от изучаемого здесь, используют оператор из решаемой задачи на верхнем слое итерационной процедуры. Для решения вариационных неравенств с потенциальным оператором итерационный метод, реализующий поиск седловой точки расширенного лагранжиана и аналогичный исследуемому в данной статье, изучался в [10], [11].

2. Постановка задачи и описание итерационного процесса

Пусть V, H — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_H$ соответственно, отождествленные со своими сопряженными.

Рассматривается задача

$$(Au, \eta - u)_V + G(\Lambda\eta) - G(\Lambda u) + F(\eta) - F(u) \geq (f, \eta - u)_V \quad \forall \eta \in V, \tag{1}$$

где $\Lambda : V \to H$ — линейный непрерывный оператор, $F : V \to R^1$, $G : H \to R^1$ — собственные, выпуклые, слабо полунепрерывные снизу функционалы, f — элемент пространства V, оператор $A : V \to V$ монотонный, деминепрерывный и коэрцитивный. Из этих условий вытекает существование решения вариационного неравенства (1) ([4], с. 49).

Предполагаем, что для функционалов F и $G \circ \Lambda \in \Gamma_0(V)$ выполнено условие квалификации ([4], с. 35)

$$\exists y^* \in \Lambda(\operatorname{dom} F) \cap \operatorname{dom} G : \lim_{y \to y^*} G(y) = G(y^*), \tag{2}$$

а оператор $\Lambda^*\Lambda : V \to V$ является изоморфизмом

$$v = \Lambda^*\Lambda v \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 04-01-00821, 03-01-00380) и конкурсного центра фундаментального естествознания Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № Е02-1.0-189).

где $\Lambda^* : H \to V$ определен следующим образом:

$$(\Lambda^* y, \eta)_V = (y, \Lambda\eta)_H \quad \forall y \in H, \ \ \forall \eta \in V. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует равенство

$$(\Lambda u, \Lambda\eta)_H = (u, \eta)_V \quad \forall u, \eta \in V. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь следующий итерационный процесс. Пусть $u^{(0)} \in V$, $y^{(0)} \in H$ и $\lambda^{(0)} \in H$ — произвольные элементы. Зная $y^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $k \geq 0$, определим $u^{(k+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\left(\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{\tau}, \eta - u^{(k+1)}\right)_V + F(\eta) - F(u^{(k+1)}) \geq$$
$$\geq (f - Au^{(k)} - \Lambda^*\lambda^{(k)} - r(u^{(k)} - \Lambda^* y^{(k)}), \eta - u^{(k+1)})_V \quad \forall \eta \in V. \tag{6}$$

Затем находим $y^{(k+1)}$, решая задачу

$$r(y^{(k+1)}, z - y^{(k+1)})_H + G(z) - G(y^{(k+1)}) \geq (r\Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}, z - y^{(k+1)})_H \quad \forall z \in H. \tag{7}$$

Полагаем, наконец,

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r(\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)}). \tag{8}$$

Для исследования сходимости описанного итерационного процесса переформулируем его с использованием оператора перехода.

Пусть Y — гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным, $t > 0$ — положительная константа, $g \in Y$ — произвольный элемент, $\varphi : Y \to R^1$ — выпуклый, собственный, полунепрерывный снизу функционал. Тогда вариационное неравенство

$$(y, z - y)_Y + t(\varphi(z) - \varphi(y)) \geq (g, z - y)_Y \quad \forall z \in Y \tag{9}$$

имеет единственное решение. Определим оператор $J^t_{\partial\varphi} = (I + t\partial\varphi)^{-1} : Y \to Y$ (резольвенту субдифференциала $\partial\varphi : Y \to 2^Y$). Тогда (9) эквивалентно равенству

$$y = J^t_{\partial\varphi}(g). \tag{10}$$

Оператор $J^t_{\partial\varphi}$ удовлетворяет неравенству жесткой нерастягиваемости ([9], с. 285, предложение 2.1)

$$\|J^t_{\partial\varphi}(y) - J^t_{\partial\varphi}(z)\|^2_Y \leq (J^t_{\partial\varphi}(y) - J^t_{\partial\varphi}(z), y - z)_Y. \tag{11}$$

Введем гильбертово пространство $Q = V \times H \times H$. Для элементов q из этого пространства будем использовать обозначения $q = (q_1, q_2, q_3) = (u, y, \lambda)$. Определим оператор $T : Q \to Q$, $Tq = (\widehat{q}_1, \widehat{q}_2, \widehat{q}_3)$ следующим образом:

$$\widehat{q}_1 = J^\tau_{\partial F}(q_1 - \tau(Aq_1 - f + \Lambda^* q_3 + r(q_1 - \Lambda^* q_2))), \tag{12}$$
$$\widehat{q}_2 = J^{1/r}_{\partial G}(\Lambda\widehat{q}_1 + r^{-1}q_3), \tag{13}$$
$$\widehat{q}_3 = q_3 + r(\Lambda\widehat{q}_1 - \widehat{q}_2). \tag{14}$$

Очевидно, итерационный процесс (6)–(8) можно записать в виде $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$, $q^{(k)} = (u^{(k)}, y^{(k)}; \lambda^{(k)})$, $k = 0, 1, 2\ldots$, т. е. T — оператор перехода этого итерационного процесса.

Теорема 1. *Отображение T имеет хотя бы одну неподвижную точку $q = (q_1, q_2, q_3)$, при этом первая компонента любой неподвижной точки q_1 — это решение задачи (1), вторая и третья компоненты неподвижной точки q_2 и q_3 связаны с первой компонентой соотношениями $q_2 = \Lambda q_1$, $q_3 \in \partial G(\Lambda q_1)$. Наоборот, если u — какое-либо решение задачи (1), то существует такой элемент $\lambda \in \partial G(\Lambda u)$, что $q = (u, \Lambda u, \lambda)$ — неподвижная точка оператора T.*

Доказательство. Пусть (q_1, q_2, q_3) — неподвижная точка оператора T, т. е.

$$q_1 = J^{\tau}_{\partial F}(q_1 - \tau[Aq_1 - f + \Lambda^* q_3 + r(q_1 - \Lambda^* q_2)]), \tag{15}$$

$$q_2 = J^{1/r}_{\partial G}(\Lambda q_1 + r^{-1} q_3), \tag{16}$$

$$q_3 = q_3 + r[\Lambda q_1 - q_2]. \tag{17}$$

Из (17) получаем равенство

$$q_2 = \Lambda q_1, \tag{18}$$

из которого с учетом (3) следует

$$q_1 - \Lambda^* q_2 = \Lambda^*(\Lambda q_1 - q_2) = 0. \tag{19}$$

Далее, расписывая соотношение (16), имеем

$$(q_2, z - q_2)_H + r^{-1}(G(z) - G(q_2)) \geq (\Lambda q_1 + r^{-1} q_3, z - q_2)_H \quad \forall z \in H. \tag{20}$$

Умножая это неравенство на r и учитывая (18), получаем

$$G(z) - G(\Lambda q_1) \geq (q_3, z - \Lambda q_1)_H \quad \forall z \in H. \tag{21}$$

Таким образом, $q_3 \in \partial G(\Lambda q_1)$. Из равенства (15) с учетом (19) имеем

$$(q_1, \eta - q_1)_V + \tau(F(\eta) - F(q_1)) \geq (q_1 - \tau[Aq_1 - f + \Lambda^* q_3], \eta - q_1)_V \quad \forall \eta \in V. \tag{22}$$

Разделив это неравенство на τ, получим

$$F(\eta) - F(q_1) \geq (f - Aq_1 - \Lambda^* q_3, \eta - q_1)_V \quad \forall \eta \in V. \tag{23}$$

В неравенстве (21) положим $z = \Lambda\eta$ и сложим его с (23), после чего в силу равенства $(\Lambda^* q_3, \eta - q_1)_V = (q_3, \Lambda(\eta - q_1))_H$ получим

$$G(\Lambda\eta) - G(\Lambda q_1) + F(\eta) - F(q_1) \geq (f - Aq_1, \eta - q_1)_V \quad \forall \eta \in V,$$

т. е. q_1 — решение задачи (1).
Наоборот, пусть u — решение задачи (1), что эквивалентно включению $f - Au \in \partial(G \circ \Lambda + F)(u)$. Из условия (2), предложений 5.6 и 5.7 ([4], с. 35–36) получаем следующие равенства:

$$\partial(G \circ \Lambda + F)(u) = \partial(G \circ \Lambda)(u) + \partial F(u), \tag{24}$$

$$\partial(G \circ \Lambda)(u) = \Lambda^* \partial G(\Lambda u). \tag{25}$$

В силу (24) найдутся такие элементы $v \in \partial F(u)$ и $w \in \partial(G \circ \Lambda)(u)$, что выполнено равенство $f - Au = v + w$, а (25) означает существование элемента $\lambda \in \partial G(\Lambda u)$, для которого выполнено соотношение $w = \Lambda^* \lambda$. Таким образом, выполнены вариационные неравенства

$$G(z) - G(\Lambda u) \geq (\lambda, z - \Lambda u)_H \quad \forall z \in H, \tag{26}$$

$$F(\eta) - F(u) \geq (f - Au - w, \eta - u)_V = (f - Au - \Lambda^* \lambda, \eta - u)_V \quad \forall \eta \in V. \tag{27}$$

Положим теперь $q_1 = u$, $q_2 = \Lambda u$, $q_3 = \lambda$ и докажем, что $q = (q_1, q_2, q_3)$ — неподвижная точка отображения T, а именно, установим равенства (15)–(17).

Непосредственно из определения q следуют (18) и (17). Неравенство (26) в новых обозначениях совпадает с (21). Разделим его на r, с учетом (18) перепишем в виде (20), что означает справедливость (16). Неравенство (27) в новых обозначениях совпадает с (23). Умножим его на τ, к обеим частям прибавим слагаемое $(q_1, \eta - q_1)_V$, тогда получим (22). Из вариационного неравенства (22) с учетом (19) получаем (15). Таким образом, q — неподвижная точка оператора T.

Из существования решения задачи (1) и вышедоказанной связи этого решения с неподвижной точкой оператора T вытекает существование этой точки. □

В силу теоремы 1 исследование сходимости итерационного процесса (6)–(8) можно свести к исследованию сходимости метода последовательных приближений для нахождения неподвижной точки оператора T.

3. Исследование сходимости итерационного процесса с обратно сильно монотонным оператором

Рассмотрим случай, когда оператор A обратно сильно монотонный, т. е. [1]

$$(Au - Av, u - v)_V \geq \sigma \|Au - Av\|_V^2, \quad \sigma > 0, \quad \forall u, v \in V. \tag{28}$$

Будем считать, что τ и r связаны соотношением $\tau r < 1$. Введем гильбертово пространство $Q = V \times H \times H$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_Q = a_1(\cdot,\cdot)_V + a_2(\cdot,\cdot)_H + a_3(\cdot,\cdot)_H$, где $a_1 = (1-\tau r)/(2\tau)$, $a_2 = r/2$, $a_3 = 1/(2r)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (28) *и неравенство*

$$\tau < \frac{2\sigma}{2\sigma r + 1}. \tag{29}$$

Тогда оператор T является нерастягивающим.

Более того, для $q = (q_1, q_2, q_3)$, $p = (p_1, p_2, p_3) \in Q$ (далее используются обозначения $Tq = (\widehat{q}_1, \widehat{q}_2, \widehat{q}_3)$, $Tp = (\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3)$) справедливо неравенство

$$\|Tq - Tp\|_Q^2 + \delta(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V + \frac{r}{2}\|(q_2 - \Lambda\widehat{q}_1) - (p_2 - \Lambda\widehat{p}_2)\|_H^2 +$$
$$+ \frac{1}{2\tau(1-\tau r)}\|(1-\tau r)((q_1 - \widehat{q}_1) - (p_1 - \widehat{p}_1)) - \tau(Aq_1 - Ap_1)\|_V^2 \leq \|q - p\|_Q^2, \tag{30}$$

где $\delta = 1 - \tau/[2\sigma(1-\tau r)]$.

Доказательство. Заметим предварительно, что в силу (29) выполнены неравенства $\tau r < 1$ и $\delta > 0$, а значит, из (30) и (28) будет следовать нерастягиваемость оператора T.

Докажем неравенство (30). Перепишем (12) в виде

$$\widehat{q}_1 = J_{\partial F}^{\tau}((1-\tau r)q_1 - \tau A q_1 + \tau f - \tau[\Lambda^* q_3 - r\Lambda^* q_2]) = J_{\partial F}^{\tau}(Sq_1 - \tau[\Lambda^* q_3 - r\Lambda^* q_2]),$$

где оператор $S : V \to V$ определяется соотношением $S\eta = (1-\tau r)\eta - \tau A\eta + \tau f$. Используя (28), получаем

$$\|Sq_1 - Sp_1\|_V^2 = (1-\tau r)^2\|q_1 - p_1\|_V^2 - 2\tau(1-\tau r)(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V + \tau^2\|Aq_1 - Ap_1\|_V^2 \leq$$
$$\leq (1-\tau r)^2\|q_1 - p_1\|_V^2 - \tau\left(2 - \tau\frac{2r\sigma + 1}{\sigma}\right)(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V. \tag{31}$$

Далее, используя (12) и (11), имеем

$$\|\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1\|_V^2 \leq (\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1, (Sq_1 - Sp_1) - \tau[\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2)])_V =$$
$$= (\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1, Sq_1 - Sp_1)_V - \tau(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1, \Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2))_V. \tag{32}$$

Для произвольного числа ε справедливо равенство

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|a - \varepsilon b\|_V^2 = \frac{1}{2\varepsilon}(\|a\|_V^2 - 2\varepsilon(a,b)_V + \varepsilon^2\|b\|_V^2) = \frac{1}{2\varepsilon}\|a\|_V^2 - (a,b)_V + \frac{\varepsilon}{2}\|b\|_V^2$$

и, таким образом, получаем

$$(a,b)_V = \frac{1}{2\varepsilon}\|a\|_V^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|a - \varepsilon b\|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|b\|_V^2. \tag{33}$$

Используя это равенство с $a = Sq_1 - Sp_1$, $b = \widehat{q}_1 - \widehat{p}_1$, преобразуем (32)

$$\|\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1\|_V^2 \le \frac{1}{2\varepsilon}\|Sq_1 - Sp_1\|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1\|_V^2 - \\ - \frac{1}{2\varepsilon}\|(Sq_1 - Sp_1) - \varepsilon(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)\|_V^2 - \tau(\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2), \widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)_V.$$

Отсюда (после деления на τ) с учетом (31)

$$\frac{1}{2\varepsilon\tau}\|Sq_1 - Sp_1 - \varepsilon(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)\|_V^2 + \frac{2-\varepsilon}{2\tau}\|\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1\|_V^2 \le \\ \le \frac{1}{2\varepsilon\tau}\|Sq_1 - Sp_1\|_V^2 - (\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2), \widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)_V \le \\ \le \frac{(1-\tau r)^2}{2\varepsilon\tau}\|q_1 - p_1\|_V^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\left(2 - 2\tau r - \frac{\tau}{\sigma}\right)(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V - \\ - (\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2), \widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)_V.$$

Выбирая $\varepsilon = 1 - \tau r$ и учитывая определение оператора S, получим

$$\frac{1}{2(1-\tau r)\tau}\|(1-\tau r)((q_1 - \widehat{q}_1) - (p_1 - \widehat{p}_1)) - \tau(Aq_1 - Ap_1)\|_V^2 + \frac{1+\tau r}{2\tau}\|\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1\|_V^2 \le \\ \le \frac{1-\tau r}{2\tau}\|q_1 - p_1\|_V^2 - \delta(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V - (\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2), \widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)_V = \\ = \frac{1-\tau r}{2\tau}\|q_1 - p_1\|_V^2 - \delta(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V - (q_3 - p_3, \Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1))_H + r(q_2 - p_2, \Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1))_H. \tag{34}$$

Воспользуемся равенством (33) при $a = q_2 - p_2$, $b = \Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)$, $\varepsilon = 1$ и преобразуем (34) к следующему виду:

$$\frac{1}{2(1-\tau r)\tau}\|(1-\tau r)((q_1 - \widehat{q}_1) - (p_1 - \widehat{p}_1)) - \tau(Aq_1 - Ap_1)\|_V^2 + \\ + \frac{r}{2}\|(q_2 - \Lambda\widehat{q}_1) - (p_2 - \Lambda\widehat{p}_1)\|_H^2 + \delta(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V + \frac{1+\tau r}{2\tau}\|\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1\|_V^2 \le \\ \le \frac{1-\tau r}{2\tau}\|q_1 - p_1\|_V^2 - (q_3 - p_3, \Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1))_H + \frac{r}{2}\|q_2 - p_2\|_H^2 + \frac{r}{2}\|\Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)\|_H^2. \tag{35}$$

Далее, из (13) с учетом неравенства (11) имеем

$$\|\widehat{q}_2 - \widehat{p}_2\|_H^2 \le (\Lambda\widehat{q}_1 + r^{-1}q_3 - \Lambda\widehat{p}_1 - r^{-1}p_3, \widehat{q}_2 - \widehat{p}_2)_H,$$

откуда, после умножения на r, получаем

$$r\|\widehat{q}_2 - \widehat{p}_2\|_H^2 \le r(\Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1), \widehat{q}_2 - \widehat{p}_2)_H + (q_3 - p_3, \widehat{q}_2 - \widehat{p}_2)_H. \tag{36}$$

Из (14) следует соотношение

$$\|\widehat{q}_3 - \widehat{p}_3\|_H^2 = \|q_3 - p_3\|_H^2 + 2r(q_3 - p_3, \Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1))_H - \\ - 2r(q_3 - p_3, \widehat{q}_2 - \widehat{p}_2)_H + r^2\|\Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1) - (\widehat{q}_2 - \widehat{p}_2)\|_H^2,$$

из которого вытекает

$$\frac{1}{2r}\|\widehat{q}_3 - \widehat{p}_3\|_H^2 = \frac{1}{2r}\|q_3 - p_3\|_H^2 + (q_3 - p_3, \Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1))_H - (q_3 - p_3, \widehat{q}_2 - \widehat{p}_2)_H + \\ + \frac{r}{2}\|\Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)\|_H^2 - r(\Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1), \widehat{q}_2 - \widehat{p}_2)_H + \frac{r}{2}\|\widehat{q}_2 - \widehat{p}_2\|_H^2. \tag{37}$$

Складывая соотношения (35)–(37) и учитывая то, что в силу (5) $\|\Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1)\|_H = \|\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1\|_V$, получаем неравенство (30). □

Основным результатом данной работы является

Теорема 3. *Пусть выполнено неравенство* (29), *итерационная последовательность* $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ *построена согласно правилу* $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$, $q^{(0)} \in Q$ *— произвольно заданный элемент. Тогда эта последовательность сходится слабо в* Q *при* $k \to +\infty$, *ее предел* q^* *является неподвижной точкой оператора* T, *и справедливы равенства*

$$\lim_{k\to+\infty} \|y^{(k)} - \Lambda u^{(k)}\|_H = 0, \tag{38}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \|q^{(k+1)} - q^{(k)}\|_Q = 0. \tag{39}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (30), положив в нем $q = q^{(k)}$ и считая p неподвижной точкой оператора T (по теореме 1 существует хотя бы одна такая точка). Учитывая, что по определению итерационной последовательности $Tq^{(k)} = q^{(k+1)}$, а для неподвижной точки согласно теореме 1 выполнены равенства $p_2 - \Lambda\widehat{p}_1 = p_2 - \Lambda p_1 = 0$, $p_1 - \widehat{p}_1 = 0$, получаем

$$\|q^{(k+1)} - p\|_Q^2 + \delta(Au^{(k)} - Ap_1, u^{(k)} - p_1)_V + \frac{r}{2}\|y^{(k)} - \Lambda u^{(k+1)}\|_H^2 +$$
$$+ \frac{1}{2\tau(1-\tau r)}\|(1-\tau r)(u^{(k)} - u^{(k+1)}) - \tau(Au^{(k)} - Ap_1)\|_V^2 \le \|q^{(k)} - p\|_Q^2. \tag{40}$$

Из неравенства (40) следует, что числовая последовательность $\{\|q^{(k)} - p\|_Q^2\}_{k=0}^{\infty}$ не возрастает, и поэтому имеет конечный предел

$$\lim_{k\to+\infty} \|q^{(k)} - p\|_Q^2 = \lambda_p. \tag{41}$$

Значит, выполнены соотношения

$$\lim_{k\to+\infty} (Au^{(k)} - Ap_1, u^{(k)} - p_1)_V = 0, \tag{42}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \|(1-\tau r)(u^{(k)} - u^{(k+1)}) - \tau(Au^{(k)} - Ap_1)\|_V = 0, \tag{43}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \|y^{(k)} - \Lambda u^{(k+1)}\|_H = 0. \tag{44}$$

Используя (42) и (28), получаем

$$\lim_{k\to+\infty} \|Au^{(k)} - Ap_1\|_V = 0. \tag{45}$$

Из (43) и (45) следует

$$\lim_{k\to+\infty} \|u^{(k)} - u^{(k+1)}\|_V = 0. \tag{46}$$

Далее, используя (44), (46), (5) и неравенство

$$\|y^{(k)} - \Lambda u^{(k)}\|_H \le \|y^{(k)} - \Lambda u^{(k+1)}\|_H + \|\Lambda(u^{(k)} - u^{(k+1)})\|_H,$$

получаем соотношение (38), из которого с учетом условия (46) и равенства $y^{(k)} - y^{(k+1)} = (y^{(k)} - \Lambda u^{(k)}) + (\Lambda u^{(k)} - \Lambda u^{(k+1)}) + (\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)})$ следует

$$\lim_{k\to+\infty} \|y^{(k)} - y^{(k+1)}\|_H = 0. \tag{47}$$

Наконец, используя (14) и (38), имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|_H = r \lim_{k\to+\infty} \|\Lambda u^{(k)} - y^{(k)}\|_H = 0. \tag{48}$$

Равенства (46)–(48) означают, что выполнено условие (39).

Введем множество $K = \{q \in Q : \|q - p\|_Q \le d = \|q^{(0)} - p\|_Q\}$, являющееся, очевидно, выпуклым, замкнутым и ограниченным. Оператор T в силу теоремы 2 является нерастягивающим, а следовательно, переводит множество K в себя, поскольку $\|Tq - p\|_Q = \|Tq - Tp\|_Q \le \|q - p\|_Q \le d$

для всех $q \in K$. Поэтому итерационная последовательность $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ содержится в множестве K и, таким образом, ограничена. Следовательно, у нее существуют слабо предельные точки. Пусть $q^* = (u^*, y^*, \lambda^*)$ — одна из них, т. е. существует такая подпоследовательность $\{q^{(k_m)}\}_{m=0}^{\infty}$, что

$$q^{(k_m)} \rightharpoonup q^* \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{49}$$

Докажем, что q^* — неподвижная точка оператора T.

В силу соотношений (45), (49) и монотонности оператора A

$$(A\eta - Ap_1, \eta - u^*)_V = \lim_{m\to+\infty}(A\eta - Au^{(k_m)}, \eta - u^{(k_m)})_V \geq 0 \quad \forall \eta \in V. \tag{50}$$

Из (28) вытекает липшиц-непрерывность оператора A. Но тогда из (50) следует равенство $Au^* = Ap_1$ в силу леммы 18.1 ([12], с. 257).

Далее, поскольку, с одной стороны, из (49) следует слабая сходимость последовательности $\{(\Lambda u^{(k_m)} - y^{(k_m)})\}_{m=0}^{\infty}$ к $(\Lambda u^* - y^*)$, а с другой, в силу (38) этот предел равен нулю, получаем

$$y^* = \Lambda u^*, \tag{51}$$

откуда

$$\lambda^* = \lambda^* + r(\Lambda u^* - y^*). \tag{52}$$

Используя (3), получим $\|u^{(k)} - \Lambda^* y^{(k)}\|_V = \|\Lambda^*(\Lambda u^{(k)} - y^{(k)})\|_V$. Тогда из (38) следует

$$\lim_{k\to+\infty} \|u^{(k)} - \Lambda^* y^{(k)}\|_V = 0. \tag{53}$$

Теперь, вводя обозначение $t^{(k)} = \tau^{-1}(u^{(k+1)} - u^{(k)}) + Au^{(k)} - f + r(u^{(k)} - \Lambda^* y^{(k)})$ и складывая неравенства (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned}(t^{(k)}, \eta - u^{(k+1)})_V + F(\eta) - F(u^{(k+1)}) + (\Lambda^*\lambda^{(k)}, \eta - u^{(k+1)})_V + r(y^{(k+1)} - \Lambda u^{(k)}, z - y^{(k+1)})_H +\\ + G(z) - G(y^{(k+1)}) - (\lambda^{(k)}, z - y^{(k+1)})_H \geq 0 \quad \forall \eta \in V, \quad \forall z \in H.\end{aligned} \tag{54}$$

Используя равенство (51), имеем

$$(\Lambda^*\lambda^{(k)}, \eta - u^{(k+1)})_V - (\lambda^{(k)}, z - y^{(k+1)})_H = (\Lambda^*\lambda^{(k)}, \eta - u^*)_V - (\lambda^{(k)}, z - y^*)_H + (\lambda^{(k)}, y^{(k+1)} - \Lambda u^{(k+1)})_H.$$

С учетом последнего равенства преобразуем (54) к виду

$$\begin{aligned}(t^{(k)}, \eta - u^{(k+1)})_V + F(\eta) + (\Lambda^*\lambda^{(k)}, \eta - u^*)_V + (y^{(k+1)} - \Lambda u^{(k)}, r(z - y^{(k+1)}) + \lambda^{(k)})_H +\\ + G(z) - (\lambda^{(k)}, z - y^*)_H \geq F(u^{(k+1)}) + G(y^{(k+1)}) \quad \forall \eta \in V, \quad \forall z \in H.\end{aligned} \tag{55}$$

Из условий (39) и (49) вытекает, что $q^{(k_m+1)} \rightharpoonup q^*$ при $m \to +\infty$, и, учитывая слабую полунепрерывность снизу функционалов G и F, получаем

$$\liminf_{m\to+\infty} G(q_2^{(k_m+1)}) \geq G(y^*), \quad \liminf_{m\to+\infty} F(q_1^{(k_m+1)}) \geq F(u^*).$$

Принимая во внимание также (53), (45) и (39), имеем

$$\lim_{m\to+\infty}(t^{(k_m)}, u^{(k_m+1)})_V = (Au^* - f, u^*)_V,$$
$$\lim_{m\to+\infty}(y^{(k_m+1)} - \Lambda u^{(k_m)}, r(z - y^{(k_m+1)}) + \lambda^{(k_m)})_H = 0.$$

В неравенстве (55) для $k = k_m$, фиксированных $\eta \in V$, $z \in H$ перейдем к нижнему пределу при $m \to +\infty$, в результате получим

$$\begin{aligned}(Au^* - f, \eta - u^*)_V + F(\eta) + (\Lambda^*\lambda^*, \eta - u^*)_V +\\ + G(z) - (\lambda^*, z - y^*)_H \geq F(u^*) + G(y^*) \quad \forall \eta \in V, \quad \forall z \in H.\end{aligned} \tag{56}$$

Полагая в (56) $z = y^*$, имеем $F(\eta) - F(u^*) + (Au^* - f + \Lambda^*\lambda^*, \eta - u^*)_V \geq 0$. Это неравенство с учетом (51) преобразуем к виду

$$(\tau^{-1}(u^* - u^*), \eta - u^*)_V + F(\eta) - F(u^*) + (Au^* - f + \Lambda^*\lambda^* + r(u^* - \Lambda^* y^*), \eta - u^*)_V \geq 0,$$

что эквивалентно равенству

$$u^* = J^{\tau}_{\partial F}(u^* - \tau[Au^* - f + \Lambda^*\lambda^* + r(u^* - \Lambda^* y^*)]). \tag{57}$$

Далее, из (56) при $\eta = u^*$ получим неравенство $G(z) - G(y^*) - (\lambda^*, z - y^*)_H \geq 0$, из которого, используя (51), имеем

$$G(z) - G(y^*) - (\lambda^* - r(y^* - \Lambda u^*), z - y^*)_H \geq 0 \quad \forall z \in H,$$

и, таким образом,

$$y^* = J^{1/r}_{\partial G}(\Lambda u^* + r^{-1}\lambda^*). \tag{58}$$

Равенства (57), (58), (52) означают, что $Tq^* = q^*$.

Докажем теперь, что все слабо предельные точки последовательности $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ совпадают, откуда и будет следовать слабая сходимость всей итерационной последовательности к некоторой неподвижной точке оператора T.

Пусть p^*, q^* — две слабо предельные точки последовательности $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, т. е. существуют подпоследовательности $\{q^{(n_k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{q^{(m_k)}\}_{k=0}^{\infty}$, слабо сходящиеся в Q к p^* и q^* соответственно при $k \to +\infty$. Из вышедоказанного следует, что элементы p^* и q^* являются неподвижными точками оператора T, следовательно, для всей последовательности $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ справедливы соотношения (41) с $p = p^*$ и $p = q^*$, т. е. $\lim\limits_{k\to+\infty} \|q^{(k)} - p^*\|_Q^2 = \lambda_{p^*}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \|q^{(k)} - q^*\|_Q^2 = \lambda_{q^*}$.

Эти соотношения справедливы и для любой подпоследовательности последовательности $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, в частности, для подпоследовательностей $\{q^{(n_k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{q^{(m_k)}\}_{k=0}^{\infty}$

$$\lim_{k\to+\infty} \|q^{m_k} - p^*\|_Q^2 = \lim_{k\to+\infty} \|q^{n_k} - p^*\|_Q^2 = \lambda_{p^*}, \quad \lim_{k\to+\infty} \|q^{m_k} - q^*\|_Q^2 = \lim_{k\to+\infty} \|q^{n_k} - q^*\|_Q^2 = \lambda_{q^*}. \tag{59}$$

Следуя теперь [13], [14], рассмотрим числовую последовательность

$$e^{(k)} = \|q^{(n_k)} - q^*\|_Q^2 - \|q^{(n_k)} - p^*\|_Q^2 + \|q^{(m_k)} - p^*\|_Q^2 - \|q^{(m_k)} - q^*\|_Q^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из (59) имеем $\lim\limits_{k\to+\infty} e^{(k)} = 0$. С другой стороны, при помощи непосредственных вычислений нетрудно проверить, что $e^{(k)} = 2(q^{(n_k)} - q^{(m_k)}, p^* - q^*)_Q$, следовательно, в силу слабой сходимости в Q подпоследовательностей $\{q^{(n_k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{q^{(m_k)}\}_{k=0}^{\infty}$ к p^* и q^* соответственно при $k \to +\infty$ получаем

$$\lim_{k\to+\infty} e^{(k)} = 2(p^* - q^*, p^* - q^*)_Q = 2\|p^* - q^*\|_Q^2.$$

Таким образом, $\|p^* - q^*\|_Q = 0$, т. е. $p^* = q^*$. □

Замечание. Пусть u, v — решения задачи (1), тогда выполнены неравенства

$$(Au, v - u)_V + G(\Lambda v) - G(\Lambda u) + F(v) - F(u) \geq (f, v - u)_V,$$
$$(Av, u - v)_V + G(\Lambda u) - G(\Lambda v) + F(u) - F(v) \geq (f, u - v)_V.$$

Складывая эти неравенства, получим $(Av - Au, v - u)_V \leq 0$, и учитывая (28), имеем $Av = Au$. Таким образом, естественным является то, что, взяв в доказательстве теоремы 3 произвольную неподвижную точку p, получили равенство $Au^* = Ap_1$ для предельной точки q^* итерационной последовательности.

4. Исследование сходимости итерационного процесса с сильно монотонным оператором

Будем считать теперь, что оператор A сильно монотонен и липшиц-непрерывен

$$(Au - Av, u - v)_V \geq \mu\|u - v\|_V^2, \quad \mu > 0, \quad \forall u, v \in V, \tag{60}$$

$$\|Au - Av\|_V \leq L\|u - v\|_V, \quad L > 0, \quad \forall u, v \in V. \tag{61}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (60), (61) *и неравенство*

$$\tau < \frac{2\mu}{2\mu r + L^2}\ . \tag{62}$$

Тогда оператор T является нерастягивающим. Более того, для $q = (q_1, q_2, q_3), p = (p_1, p_2, p_3) \in Q$ справедливо неравенство

$$\|Tq - Tp\|_Q^2 + \beta\|q_1 - p_1\|_V^2 + \frac{r}{2}\|(q_2 - \Lambda\widehat{q}_1) - (p_2 - \Lambda\widehat{p}_1)\|_H^2 +$$
$$+ \frac{1}{2(1 - \tau r)\tau}\|(1 - \tau r)((q_1 - \widehat{q}_1) - (p_1 - \widehat{p}_1)) - \tau(Aq_1 - Ap_1)\|_V^2 \leq \|q - p\|_Q^2, \tag{63}$$

где $\beta = 1 - \tau L^2/[2\mu(1 - \tau r)]$.

Доказательство. Заметим предварительно, что в силу условия (62) выполнены неравенства $\tau r < 1$ и $\beta > 0$ и, таким образом, оператор T является нерастягивающим. Для оператора S, $S\eta = (1 - \tau r)\eta - \tau A\eta + \tau f$, введенного в теореме 2, используя (60) и (61), получаем неравенство

$$\|Sp_1 - Sq_1\|_V^2 = (1 - \tau r)^2\|p_1 - q_1\|_V^2 - 2\tau(1 - \tau r)(Ap_1 - Aq_1, p_1 - q_1)_V + \tau^2\|Ap_1 - Aq_1\|_V^2 \leq$$
$$\leq (1 - \tau r)^2\|p_1 - q_1\|_V^2 - \tau(2\mu - \tau(2r\mu + L^2))\|p_1 - q_1\|_V^2.$$

Следуя доказательству теоремы 2, вместо (34) имеем

$$\frac{1}{2(1 - \tau r)\tau}\|(1 - \tau r)((q_1 - \widehat{q}_1) - (p_1 - \widehat{p}_1)) - \tau(Aq_1 - Ap_1)\|_V^2 + \frac{1 + \tau r}{2\tau}\|\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1\|_V^2 \leq$$
$$\leq \frac{1 - \tau r}{2\tau}\|q_1 - p_1\|_V^2 - \beta\|q_1 - p_1\|_V^2 - (q_3 - p_3, \Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1))_H + r(q_2 - p_2, \Lambda(\widehat{q}_1 - \widehat{p}_1))_H,$$

где $\beta = 1 - \tau L^2/[2\mu(1 - \tau r)]$. Следуя доказательству теоремы 2, получим неравенство (63). □

Заметим, что из (60) (см. замечание) вытекает единственность решения вариационного неравенства (1).

Теорема 5. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям* (60), (61) *и выполнено неравенство* (62), *тогда выполнены* (38), (39) *и равенства*

$$\lim_{k\to+\infty}\|q_1^{(k)} - u\|_V = 0, \quad \lim_{k\to+\infty}\|q_2^{(k)} - \Lambda u\|_H = 0, \tag{64}$$

где u – решение задачи (1).

Доказательство. Из неравенства (63), положив в нем $q = q^{(k)}$ и считая p неподвижной точкой оператора T, имеем

$$\|q^{(k+1)} - p\|_Q^2 + \beta\|q_1^{(k)} - p_1\|_V^2 + \frac{r}{2}\|q_2^{(k)} - \Lambda q_1^{(k+1)}\|_H^2 +$$
$$+ \frac{1}{2(1 - \tau r)\tau}\|(1 - \tau r)(q_1^{(k)} - u^{(k+1)}) - \tau(Aq_1^{(k)} - Ap_1)\|_V^2 \leq \|q^{(k)} - p\|_Q^2.$$

Из этого неравенства получаем, что выполнены (43), (44) и

$$\lim_{k\to+\infty}\|q_1^{(k)} - p_1\|_V = 0. \tag{65}$$

Из (65) и (61) имеем (45), и, следуя доказательству теоремы 3, получаем (38), (39). Поскольку задача (1) имеет единственное решение u, то в силу теоремы 1 выполнены равенства $p_1 = u$, $p_2 = \Lambda u$, и из (65), (38) получаем сильную сходимость (64). $\square$

Литература

1. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. *Модифицированные функции Лагранжа.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. Панагиотопулос П. *Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии.* – М.: Мир, 1989. – 496 с.
4. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 400 с.
5. Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р. *Исследование одномерных уравнений статического состояния мягкой оболочки и алгоритма их решения* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 1. – С. 8–16.
6. Лапин А.В. *Об исследовании некоторых задач нелинейной теории фильтрации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1979. – Т. 19. – № 3. – С. 689–700.
7. Гловински Р.Г., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. *Численное исследование вариационных неравенств.* – М.: Мир, 1979. – 576 с.
8. Gabay D., Merscier B. *A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation* // Computer Math. Appl. – 1976. – V. 2. – P. 17–40.
9. Fortin M., Glowinski R. *Résolution numériques de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté.* – Paris: Dunod, 1983. – 320 p.
10. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. *Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
11. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. *Метод декомпозиции для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 7. – С. 945–951.
12. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
13. Maruster S. *The solution by iteration of nonlinear equations in Hilbert spaces* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 63. – № 1. – P. 69–73
14. Opial Z. *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – P. 591–597

Казанский государственный университет

Поступила 11.03.2003