ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 514.76

Л.Б. СМОЛЯКОВА

СТРОЕНИЕ ПОЛНЫХ РАДИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ, МОДЕЛИРУЕМЫХ МОДУЛЯМИ НАД АЛГЕБРАМИ ВЕЙЛЯ

1. Введение

Функтор Вейля $T^{\mathbf{A}}$, определенный для всякой локальной алгебры Вейля $\mathbf{A}$ (см., напр., [1]–[3]), относит гладкому многообразию M_n расслоение $\mathbf{A}$-скоростей $T^{\mathbf{A}}M_n$. Различным вопросам геометрии расслоений Вейля и их обобщений посвящено много работ, подробную библиографию которых можно найти в [1]–[4]. Из недавних публикаций отметим работы [5]–[9]. Расслоение Вейля $T^{\mathbf{A}}M_n$ обладает естественной структурой $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, моделируемого $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n \cong T^{\mathbf{A}}\mathbf{R}^n$, что позволяет при его изучении применять методы теории многообразий над алгебрами [1], [3].

Эпиморфизм локальных алгебр Вейля $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ определяет обобщенный функтор Вейля T^μ [10], относящий слоеному многообразию $(M, \mathcal{F})$ расслоение

$$T^\mu M = T^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}} M \times_{T^{\mathbf{B}}_{\mathrm{tr}} M} T^{\mathbf{B}} M. \tag{1}$$

Расслоение $T^\mu M$ обладает естественной структурой $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, моделируемого $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, где $n + m = \dim M$, а $n = \operatorname{codim} \mathcal{F}$ [10]. Функтор T^μ принадлежит классу функторов, сохраняющих произведения [2]. В случае, когда гомоморфизм локальных алгебр $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ необязательно является сюръекцией, а слоение на M определяется субмерсией $p : M \to N$, такие функторы T^μ изучались в [5], [6].

Если $\mathbf{B} = \mathbf{R}$ и эпиморфизм μ принимает вид $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$, то функтор T^μ на категории слоеных многообразий совпадает с трансверсальным функтором Вейля $T^{\mathbf{A}}_{\mathrm{tr}}$. В случае алгебр плюральных чисел функтор T^μ эквивалентен функтору, относящему слоеному многообразию его полукасательное расслоение второго порядка [4]. Геометрия трансверсальных расслоений Вейля изучалась в [11]–[13]; библиографию работ, посвященных полукасательным расслоениям можно найти в [4].

В данной работе изучаются $\mathbf{A}$-гладкие многообразия, моделируемые $\mathbf{A}$-модулями типа $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, где $\mathbf{A}$ — локальная алгебра Вейля и $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$ — фактор-алгебра алгебры $\mathbf{A}$ по некоторому идеалу $\mathbf{I} \subset \mathbf{A}$. $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $M^{\mathbf{L}}$, моделируемое $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ (кратко $\mathbf{L}$-многообразие), называется радиантным, если оно допускает атлас с преобразованиями координат, имеющими локально тот же вид, что и преобразования координат на расслоении (1).

Основным результатом работы является теорема, утверждающая, что радиантное $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $M^{\mathbf{L}}$, удовлетворяющее дополнительно некоторому условию полноты в смысле теории (X, G)-многообразий и (X, G)-слоений (см., напр., [14], [15]), изоморфно в категории $\mathbf{L}$-многообразий расслоению $T^\mu M$ для некоторого слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$.

Эта теорема является обобщением аналогичных результатов работ, относящихся к случаям полных близко касательных [16], полных квазитрансверсальных [17], полных близко p-касательных [18] структур на многообразиях и полных радиантных $\mathbf{A}$-гладких многообразий, моделируемых $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n$ [19].

2. A-гладкие многообразия, моделируемые A-модулем $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$

Пусть $\mathbf{R}(N, q)$ — алгебра срезанных многочленов степени, не превышающих q от N переменных, и $\mathbf{A} = \mathbf{R}(N, q)/\mathbf{I_A}$ — локальная алгебра Вейля высоты q и ширины N [1]. Алгебру $\mathbf{A}$ можно представить в виде полупрямой суммы $\mathbf{A} = \mathbf{R} \oplus \mathring{\mathbf{A}}$, где $\mathring{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}$ — максимальный идеал, состоящий из всех нильпотентных элементов алгебры $\mathbf{A}$. Символом $\mathbf{A}^n$ будем обозначать модуль строк длины n над $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{I} \subset \mathbf{A}$ — некоторый идеал, $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$ — фактор-алгебра и $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — канонический эпиморфизм. $\mathbf{B}$-модуль $\mathbf{B}^m$ может рассматриваться и как $\mathbf{A}$-модуль, где $\alpha X = 0$ для любых $\alpha \in \mathbf{I}$ и $X \in \mathbf{B}^m$, поэтому естественная структура $\mathbf{A}$-модуля имеется и на векторном пространстве $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Элемент $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{L}$ определяется координатами $X^i = x^i + \mathring{X}^i \in \mathbf{A}$, $Y^\alpha = y^\alpha + \mathring{Y}^\alpha \in \mathbf{B}$, где $x^i, y^\alpha \in \mathbf{R}$, $\mathring{X}^i \in \mathring{\mathbf{A}}$, $\mathring{Y}^\alpha \in \mathring{\mathbf{B}}$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, m$. Будем предполагать, что в алгебре $\mathbf{A}$ выбран некоторый базис $\{e_a\} = \{e_0 = 1, e_{a^*}, e_{\check{a}}\}$ такой, что $\{e_{a^*}, e_{\check{a}}\}$ — базис максимального идеала $\mathring{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$, а $\{e_{\check{a}}\}$ — базис идеала $\mathbf{I}$. При таком выборе базиса в $\mathbf{A}$ набор классов вычетов элементов $\{e_{\overline{a}}\} = \{e_0 = 1, e_{a^*}\}$ является базисом в фактор-алгебре $\mathbf{B}$.

$\mathbf{A}$-гладким многообразием $M^{\mathbf{L}}$, моделируемым $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{L}$ ($\mathbf{L}$-многообразием) называется гладкое многообразие, снабженное $\Gamma(\mathbf{L})$-атласом, т. е. атласом $\{h_\alpha : U_\alpha \subset M^{\mathbf{L}} \to U'_\alpha \subset \mathbf{L}\}_{\alpha \in A}$, карты которого принимают значения в $\mathbf{L}$, а преобразования координат $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ принадлежат псевдогруппе $\Gamma(\mathbf{L})$ локальных $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов модуля $\mathbf{L}$ [10]. В дальнейшем карты на многообразиях со значениями в $\mathbf{L}$ будем называть $\mathbf{L}$-картами, а $\Gamma(\mathbf{L})$-атлас будем называть просто $\mathbf{L}$-атласом. Пусть $U = U_1 \oplus U_2 \subset \mathbf{L}$ и $V = V_1 \oplus V_2 \subset \mathbf{L}$ — открытые координатные параллелепипеды по отношению к вещественным координатам в $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, определяемым вышеуказанным базисом $\{e_a\}$. Всякий $\mathbf{A}$-диффеоморфизм $(\Phi : U \to V) \in \Gamma(\mathbf{L})$ задается уравнениями [10]

$$X^{i'} = \varphi^{i'}(x^i) + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^{i'}}{Dx^p} \mathring{X}^p + \psi^{i'}(x^i, y^\alpha) + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v} \psi^{i'}}{Dx^u Dy^v} \mathring{X}^u \mathring{Y}^v, \tag{2}$$

$$Y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha) + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v} \varphi^{\alpha'}}{Dx^u Dy^v} \mathring{X}^u \mathring{Y}^v, \tag{3}$$

где u, v и p — мультииндексы, q — высота алгебры $\mathbf{A}$, а функции $\varphi^{i'}(x^i)$, $\varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha)$ и $\psi^{i'}(x^i, y^\alpha)$ принимают значения соответственно в $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathrm{Ann}(\mathbf{I})$.

Категорию, объектами которой являются $\mathbf{L}$-многообразия, а морфизмами — локальные $\mathbf{A}$-диффеоморфизмы между $\mathbf{L}$-многообразиями, обозначим символом $\mathbf{L}$–$\mathcal{M}an$.

Естественная структура $\mathbf{L}$-многообразия возникает на расслоении $T^\mu M$ (1) слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$, где $n + m = \dim M$, а $n = \operatorname{codim} \mathcal{F}$ [10]. Напомним основные определения.

Две $\mathbf{A}$-скорости $j_x^{\mathbf{A}} f$ и $j_x^{\mathbf{A}} g$ в точке $x \in M$ называются μ-эквивалентными, если они определяют одну и ту же трансверсальную $\mathbf{A}$-скорость $j_{\mathrm{tr}\,x}^{\mathbf{A}} f = j_{\mathrm{tr}\,x}^{\mathbf{A}} g$ и одну и ту же $\mathbf{B}$-скорость $j_x^{\mathbf{B}} f = j_x^{\mathbf{B}} g$ в $x \in M$. Класс μ-эквивалентности $j_x^\mu f$ $\mathbf{A}$-скорости $j_x^{\mathbf{A}} f$ называется μ-струей в $x \in M$. Из этого определения следует, что множество $T^\mu M$ всех μ-струй на M находится во взаимнооднозначном соответствии с расслоенным произведением $T_{\mathrm{tr}}^{\mathbf{A}} M \times_{T_{\mathrm{tr}}^{\mathbf{B}} M} T^{\mathbf{B}} M$, где $T^{\mathbf{A}} M$ и $T^{\mathbf{B}} M$ — расслоения соответственно $\mathbf{A}$- и $\mathbf{B}$-скоростей на M [2], [3], а $T_{\mathrm{tr}}^{\mathbf{A}} M$ — расслоение трансверсальных $\mathbf{A}$-скоростей на M [12], [3]. Таким образом, множество $T^\mu M$ обладает естественной структурой гладкого многообразия. Естественная проекция $T^\mu M \to M$ превращает $T^\mu M$ в локально тривиальное расслоение над M. Расслоение $T^\mu M$ называется [10] расслоением Вейля μ-струй на M. В случае, когда слоение $\mathcal{F}$ на M образовано сюръективной субмерсией $M \to N$, расслоение $T^\mu M$ естественно эквивалентно расслоенному произведению $T^{\mathbf{A}} N \times_{T^{\mathbf{B}} N} T^{\mathbf{B}} M$.

Если $(M, \mathcal{F})$ и $(M', \mathcal{F}')$ — слоеные многообразия, а $\varphi : M \to M'$ — морфизм слоений, то отображение $T^\mu \varphi : T^\mu M \ni j^\mu f \mapsto j^\mu(\varphi \circ f) \in T^\mu M'$ является морфизмом расслоений. Соответствие T^μ, относящее слоеному многообразию $(M, \mathcal{F})$ расслоение $T^\mu M$, а морфизму слоений $\varphi : M \to M'$ — отображение $T^\mu \varphi$, является функтором.

Расслоение $T^\mu M$ обладает естественной структурой $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, моделируемого $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{L}$. Действительно, применяя функтор T^μ к карте $h : U \to \mathbf{R}^{n+m}$ из атласа слоения на M, получим карту $T^\mu h : T^\mu U \to T^\mu \mathbf{R}^{n+m}$, область значений которой $T^\mu \mathbf{R}^{n+m} = T^{\mathbf{A}}\mathbf{R}^n \times_{T^{\mathbf{B}}\mathbf{R}^n} T^{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{n+m} = \mathbf{A}^n \times_{\mathbf{B}^n} \mathbf{B}^{n+m}$ естественным образом отождествляется с $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Преобразования координат $h' \circ h^{-1}$ на M имеют вид

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i, y^\alpha), \quad y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha), \tag{4}$$

где $\partial\varphi^{i'}/\partial y^\alpha = 0$. Преобразования $T^\mu h' \circ T^\mu h$ индуцированных координат на расслоении $T^\mu M$ задаются уравнениями (2) и (3), где $\psi^{i'}(x^i, y^\alpha) = 0$,

$$X^{i'} = \varphi^{i'} + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^{i'}}{Dx^p} \overset{\circ}{X}{}^p, \tag{5}$$

$$Y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'} + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v}\varphi^{\alpha'}}{Dx^u Dy^v} \overset{\circ}{X}{}^u \overset{\circ}{Y}{}^v. \tag{6}$$

В терминах расслоенных карт морфизм слоений $\varphi : M \to M'$ представляется уравнениями, имеющими вид (4), где $\partial\varphi^{i'}/\partial y^\alpha = 0$. При этом в терминах индуцированных карт на расслоениях $T^\mu M$ и $T^\mu M'$ отображение $T^\mu \varphi$ имеет уравнения (5) и (6) и, следовательно, является $\mathbf{A}$-гладким. Таким образом, функтор T^μ может рассматриваться как функтор из категории слоеных многообразий в категорию $\mathbf{A}$-гладких многообразий.

Подмодулю $\overset{\circ}{\mathbf{L}} = \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n \oplus \overset{\circ}{\mathbf{B}}{}^m \subset \mathbf{L}$ на многообразии $M^{\mathbf{L}}$ соответствует $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-слоение $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$, определяемое вполне интегрируемым распределением подмодулей касательных $\mathbf{A}$-модулей к $M^{\mathbf{L}}$, которые отображаются всякой $\mathbf{L}$-картой на $M^{\mathbf{L}}$ изоморфно на подмодуль $\overset{\circ}{\mathbf{L}} \subset \mathbf{L}$. В локальной $\mathbf{L}$-карте слои слоения $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ задаются уравнениями $x^i = x^i_0 = \mathrm{const}$, $y^\alpha = y^\alpha_0 = \mathrm{const}$. Преобразования координат из псевдогруппы $\Gamma(\mathbf{L})$ на $M^{\mathbf{L}}$ индуцируют преобразования $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-координат $\{\overset{\circ}{X}{}^i, \overset{\circ}{Y}{}^\alpha\}$ на слоях слоения $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$. Эти преобразования принадлежат псевдогруппе $\Gamma(\overset{\circ}{\mathbf{L}})$ локальных диффеоморфизмов модуля $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$, которые на связных компонентах имеют следующий вид:

$$\overset{\circ}{X}{}'^i = \sum_{|p|=0}^{q} a^i_p \overset{\circ}{X}{}^p + \sum_{|u|+|v|=0}^{q} \tilde{a}^i_{uv} \overset{\circ}{X}{}^u \overset{\circ}{Y}{}^v, \quad \overset{\circ}{Y}{}'^\alpha = \sum_{|u|+|v|=0}^{q} b^\alpha_{uv} \overset{\circ}{X}{}^u \overset{\circ}{Y}{}^v, \tag{7}$$

где $a^i_0 \in \overset{\circ}{\mathbf{A}}$, $a^i_p \in \mathbf{A}$, $\tilde{a}^i_{uv} \in \mathrm{Ann}(\mathbf{I})$, $b^\alpha_{00} \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}$ и $b^\alpha_{uv} \in \mathbf{B}$. Поскольку всякими уравнениями вида (7) задается диффеоморфизм $\overset{\circ}{\mathbf{L}} \to \overset{\circ}{\mathbf{L}}$, то псевдогруппа $\Gamma(\overset{\circ}{\mathbf{L}})$ порождается группой Ли $G(\overset{\circ}{\mathbf{L}})$, состоящей из всех (глобальных) диффеоморфизмов $\overset{\circ}{\mathbf{L}} \to \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ вида (7). Группа Ли $G(\overset{\circ}{\mathbf{L}})$ транзитивно действует на $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$. Отсюда следует, что каждый слой слоения $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ на $M^{\mathbf{L}}$ несет на себе индуцированную структуру (X, G)-многообразия в смысле У. Терстона [14] при $X = \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ и $G = G(\overset{\circ}{\mathbf{L}})$. В дальнейшем для краткости $(\overset{\circ}{\mathbf{L}}, G(\overset{\circ}{\mathbf{L}}))$-многообразия будем называть $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразиями. Они образуют категорию $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$–$\mathcal{M}an$, морфизмами которой являются отображения, локально в картах $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-атласов имеющие уравнения вида (7).

Пусть M° — $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразие и $h : M^\circ \supset U \to U' \subset \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ — некоторая $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-карта на M°. Распространение $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-карты h вдоль путей на M° задает так называемое *развертывающее отображение* $D : \widetilde{M^\circ} \to \overset{\circ}{\mathbf{L}}$, где $\widetilde{M^\circ}$ — универсальное накрывающее пространство многообразия M°. В соответствии с общей теорией (X, G)-многообразий [14] дадим следующее

Определение 1. $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразие M° называется *полным*, если развертывающее отображение $D : \widetilde{M^\circ} \to \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ является накрытием.

Поскольку $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$ является односвязным многообразием, то для полного $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразия M° развертывающее отображение $D : \widetilde{M^\circ} \to \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ является диффеоморфизмом и изоморфизмом в категории $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$–$\mathcal{M}an$.

Определение 2. $\mathbf{L}$-многообразие $M^{\mathbf{L}}$ называется *полным*, если все слои канонического слоения $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ на $M^{\mathbf{L}}$ являются полными $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразиями.

Очевидно, расслоение Вейля $T^\mu M$ является полным $\mathbf{L}$-многообразием.

3. Радиантные L-многообразия

Псевдогруппа $\Gamma(\mathbf{L})$ локальных $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов между областями $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{L}$ имеет подпсевдогруппу $\Gamma'(\mathbf{L})$, образованную такими диффеоморфизмами из $\Gamma(\mathbf{L})$, которые локально задаются уравнениями вида (2), (3), где функции $\varphi^{i'}$ и $\varphi^{\alpha'}$ принимают значения в $\mathbf{R}$, а $\psi^{i'}{=}0$. Подпсевдогруппа $\Gamma'(\mathbf{L}) \subset \Gamma(\mathbf{L})$ индуцирует подпсевдогруппу $\Gamma'(\overset{\circ}{\mathbf{L}}) \subset \Gamma(\overset{\circ}{\mathbf{L}})$, состоящую из отображений (7), удовлетворяющих условиям

$$a^i_0 = b^\alpha_{00} = \tilde{a}^i_{uv} = 0, \quad a^i_p \in \mathbf{R}, \quad b^\alpha_{uv} \in \mathbf{R}. \tag{8}$$

Псевдогруппа $\Gamma'(\overset{\circ}{\mathbf{L}})$ порождается группой Ли $G'(\overset{\circ}{\mathbf{L}})$, состоящей из всех (глобальных) диффеоморфизмов $\overset{\circ}{\mathbf{L}} \to \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ вида (7), удовлетворяющих условиям (8).

Определение 3. $\mathbf{L}$-многообразие с $\mathbf{L}$-атласом, функции склейки которого принадлежат псевдогруппе $\Gamma'(\mathbf{L})$, называется радиантным $\mathbf{L}$-многообразием.

$\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразие, снабженное $\Gamma'(\overset{\circ}{\mathbf{L}})$-атласом, называется радиантным $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразием.

Отметим, что в случае алгебры дуальных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon)$ и $\mathbf{R}(\varepsilon)$-модуля $\mathbf{L} = \mathbf{R}(\varepsilon)^n$ группа $G(\overset{\circ}{\mathbf{R}}(\varepsilon)^n)$ является группой аффинных преобразований, а группа $G'(\overset{\circ}{\mathbf{R}}(\varepsilon)^n)$ — группой линейных (однородных) преобразований пространства $\mathbf{R}^n$, поэтому понятие $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(\varepsilon)^n$-многообразия эквивалентно понятию n-мерного аффинного многообразия. В [20] аффинное многообразие M называлось радиантным, если его аффинная структура редуцируется к линейной, т. е. если атлас, задающий на M структуру аффинного многообразия, имеет податлас с линейными (однородными) преобразованиями координат. Для $\mathbf{A}$-гладких многообразий, моделируемых $\mathbf{A}$-модулями $\mathbf{A}^n$, приведенное выше определение радиантности совпадает с определением, использовавшимся в [21].

Радиантные $\mathbf{L}$-многообразия образуют подкатегорию $\mathbf{L}$–$\mathcal{R}ad$ в категории $\mathbf{L}$–$\mathcal{M}an$, а радиантные $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразия — подкатегорию $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$–$\mathcal{R}ad$ в категории $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$–$\mathcal{M}an$. Обозначим символом $\mathbf{R}(N,q)$–$\mathcal{R}ad$ категорию радиантных $\mathbf{R}(N,q)$-гладких многообразий, моделируемых $\mathbf{R}(N,q)$-модулем $\mathbf{R}(N,q)^{n+m}$, а символом $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)$–$\mathcal{R}ad$ — категорию радиантных $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$-многообразий.

Теорема. *Полное радиантное $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $M^{\mathbf{L}}$ изоморфно в категории $\mathbf{L}$-многообразий расслоению $T^\mu M$ для некоторого слоеного многообразия $(M, \mathcal{F})$.*

Доказательство. Построим функторы

$$\overset{\circ}{E} : \overset{\circ}{\mathbf{L}}\text{–}\mathcal{R}ad \to \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)\text{–}\mathcal{R}ad, \quad E : \mathbf{L}\text{–}\mathcal{R}ad \to \mathbf{R}(N,q)\text{–}\mathcal{R}ad$$

и покажем, что они переводят полные многообразия в полные.

Пусть M° — радиантное $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразие и $\{U_\sigma, h_\sigma : U_\sigma \subset M^\circ \to U'_\sigma \subset \overset{\circ}{\mathbf{L}}\}_{\sigma\in\mathbf{A}}$ — $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-атлас, задающий на M° структуру радиантного многообразия. Координатные преобразования $h_\sigma \circ h_\tau^{-1}$ имееют вид

$$\overset{\circ}{X}{}^i_\sigma = \sum_{|p|=1}^{q} a^i_p(\sigma,\tau)\overset{\circ}{X}{}^p_\tau, \quad \overset{\circ}{Y}{}^\alpha_\sigma = \sum_{|u|+|v|=1}^{q} b^\alpha_{uv}(\sigma,\tau)\overset{\circ}{X}{}^u_\tau\overset{\circ}{Y}{}^v_\tau, \tag{9}$$

где a^i_p, b^α_{uv} — $\mathbf{R}$-значные локально постоянные функции. Имеется канонический эпиморфизм алгебр $\psi : \mathbf{R}(N,q) \to \mathbf{A}$, которому соответствует эпиморфизм $\overset{\circ}{\psi} : \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q) \to \overset{\circ}{\mathbf{A}}$, и $\overset{\circ}{\mathbf{A}} \cong \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)/\mathbf{I}_\mathbf{A}$, где $\mathbf{I}_\mathbf{A} = \operatorname{Ker}\psi$. Так как $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$ — фактор-алгебра алгебры $\mathbf{A}$ по идеалу $\mathbf{I} \subset \mathbf{A}$, то $\overset{\circ}{\mathbf{B}} \cong \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)/\mathbf{I}_\mathbf{B}$, где $\mathbf{I}_\mathbf{B} \subset \mathbf{R}(N,q)$ — некоторый идеал, и $\mathbf{I}_\mathbf{B} \supset \mathbf{I}_\mathbf{A}$. Таким образом, алгебры $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{B}}$ могут рассматриваться как модули над алгеброй $\mathbf{R}(N,q)$. Следовательно, $\overset{\circ}{\mathbf{L}} = \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n \oplus \overset{\circ}{\mathbf{B}}{}^m$ так же является $\mathbf{R}(N,q)$-модулем. $\mathbf{A}$-гладкие отображения являются одновременно и $\mathbf{R}(N,q)$-гладкими, поэтому M° несет на себе структуру $\mathbf{R}(N,q)$-гладкого многообразия. Пусть $\overset{\circ}{\Psi} : \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m} \to \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ — канонический эпиморфизм. Рассмотрим дизъюнктное объединение открытых подмножеств $\overset{\circ}{\Psi}{}^{-1}(U'_\sigma) = U'_\sigma \times (\mathbf{I}^n_\mathbf{A} \oplus \mathbf{I}^m_\mathbf{B})$ по всем $\sigma \in A$ и введем отношение эквивалентности на этом объединении, полагая $Z = (X,Y) \in \overset{\circ}{\Psi}{}^{-1}(U'_\sigma)$ и $\widetilde{Z} = (\widetilde{X},\widetilde{Y}) \in \overset{\circ}{\Psi}{}^{-1}(U'_\tau)$ эквивалентными, если

$$X^i_\sigma = \sum_{|p|=1}^{q} a^i_p(\sigma,\tau)\widetilde{X}{}^p_\tau, \quad Y^\alpha_\sigma = \sum_{|u|+|v|=1}^{q} b^\alpha_{uv}(\sigma,\tau)\widetilde{X}{}^u_\tau\widetilde{Y}{}^v_\tau,$$

где $X^i, \widetilde{X}{}^i, Y^\alpha, \widetilde{Y}{}^v \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)$, а функции a^i_p, b^α_{uv} такие же, как и в (9). Фактор-множество

$$\overset{\circ}{E}(M^\circ) = \bigsqcup_{\sigma\in A} \overset{\circ}{\Psi}{}^{-1}(U'_\sigma)/\sim$$

несет на себе структуру радиантного $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$-многообразия. Естественная проекция $\overset{\circ}{\Psi} : \overset{\circ}{E}(M^\circ) \to M^\circ$ является локально тривиальным расслоением со стандартным слоем $\mathbf{I}^n_\mathbf{A} \oplus \mathbf{I}^m_\mathbf{B}$. Соответствие, относящее радиантному $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразию M° радиантное $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$-многообразие $\overset{\circ}{E}(M^\circ)$ и отображению $\Phi : M^\circ \to W^\circ$ радиантных многообразий, имеющему локальные уравнения вида (9), — отображение $\widetilde{\Phi} : \overset{\circ}{E}(M^\circ) \to \overset{\circ}{E}(W^\circ)$ с локальными уравнениями

$$\widetilde{X}{}^{i'} = \sum_{|p|=1}^{q} \varphi^{i'}_p \widetilde{X}{}^p, \quad \widetilde{Y}{}^{\alpha'} = \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \varphi^{\alpha'}_{uv}\widetilde{X}{}^u\widetilde{Y}{}^v,$$

является функтором $\overset{\circ}{E} : \overset{\circ}{\mathbf{L}}\text{–}\mathcal{R}ad \to \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)\text{–}\mathcal{R}ad$. Пусть теперь M° — полное радиантное $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-многообразие, $\widetilde{M^\circ} \cong \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ — универсальное накрывающее пространство для M° и $c : \widetilde{M^\circ} \to M^\circ$ — универсальное накрывающее отображение. Так как $\overset{\circ}{E}(\overset{\circ}{\mathbf{L}}) \cong \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$, то $\overset{\circ}{E}(c) : \overset{\circ}{E}(\widetilde{M^\circ}) \to \overset{\circ}{E}(M^\circ)$ — универсальное накрывающее отображение для $\overset{\circ}{E}(M^\circ)$ и $\overset{\circ}{E}(M^\circ)$ полное.

Пусть $M^\mathbf{L}$ — радиантное $\mathbf{A}$-гладкое многообразие и $\{(U_\sigma, h_\sigma : U_\sigma \subset M^\mathbf{L} \to U'_\sigma \subset \mathbf{L})\}_{\sigma\in A}$ —

$\Gamma_{\mathrm{rad}}(\mathbf{L})$-атлас на $M^{\mathbf{L}}$. Координатные преобразования $h_\sigma \circ h_\tau^{-1}$ имеют вид

$$X^i_\sigma = \varphi^i_{\sigma\tau} + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!}\frac{D^p\varphi^i_{\sigma\tau}}{Dx^p_\tau}\overset{\circ}{X}{}^p_\tau,$$

$$Y^\alpha_\sigma = \varphi^\alpha_{\sigma\tau} + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!}\frac{D^{u+v}\varphi^\alpha_{\sigma\tau}}{Dx^u_\tau Dy^v_\tau}\overset{\circ}{X}{}^u_\tau\overset{\circ}{Y}{}^v_\tau,$$

где $\varphi^i_{\sigma\tau}$ и $\varphi^\alpha_{\sigma\tau}$ — базовые $\mathbf{R}$-значные функции для канонического $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-слоения на $\mathbf{L}$. Пусть $\Psi : \mathbf{R}(N,q)^{n+m} \to \mathbf{L}$ — канонический эпиморфизм. Рассмотрим дизъюнктное объединение по всем $\sigma \in A$ открытых подмножеств $\Psi^{-1}(U'_\sigma) = U'_\sigma \times (\mathbf{I}^n_{\mathbf{A}} \oplus \mathbf{I}^m_{\mathbf{B}})$, полагая $Z = \{X, Y\} \in \Psi^{-1}(U'_\sigma)$ и $\widetilde{Z} = \{\widetilde{X}, \widetilde{Y}\} \in \Psi^{-1}(U'_\tau)$ эквивалентными, если выполняются соотношения

$$X^i = \varphi^i_{\sigma\tau} + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!}\frac{D^p\varphi^i_{\sigma\tau}}{Dx^p_\tau}\overset{\circ}{\widetilde{X}}{}^p,$$

$$Y^\alpha = \varphi^\alpha_{\sigma\tau} + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!}\frac{D^{u+v}\varphi^\alpha_{\sigma\tau}}{Dx^u_\tau Dy^v_\tau}\overset{\circ}{\widetilde{X}}{}^u\overset{\circ}{\widetilde{Y}}{}^v,$$

где $\overset{\circ}{\widetilde{X}}{}^i, \overset{\circ}{\widetilde{Y}}{}^\alpha \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)$, а функции $\varphi^i_{\sigma\tau}$, $\varphi^\alpha_{\sigma\tau}$ такие же, как в (2) и (3). Фактор-множество

$$E(M^{\mathbf{L}}) = \bigsqcup_{\sigma\in A} \Psi^{-1}(U'_\sigma)/\sim$$

несет на себе структуру радиантного $\mathbf{R}(N,q)^{n+m}$-многообразия. Естественная проекция $E(M^{\mathbf{L}}) \to M^{\mathbf{L}}$ является локально тривиальным расслоением со стандартным слоем $\mathbf{I}^n_{\mathbf{A}} \oplus \mathbf{I}^m_{\mathbf{B}}$. Обозначим ее той же буквой Ψ. Соответствие, относящее радиантному $\mathbf{L}$-многообразию $M^{\mathbf{L}}$ многообразие $E(M^{\mathbf{L}})$, а морфизму радиантных многообразий $\Phi : M^{\mathbf{L}} \to W^{\mathbf{L}}$, который в локальных $\mathbf{L}$-координатах на областях $U \subset M^{\mathbf{L}}$ и $V \subset W^{\mathbf{L}}$ имеет уравнения вида (2), (3) с $\psi^{i'} = 0$ и $\mathbf{R}$-значными функциями $\varphi^{i'}$, $\varphi^{\alpha'}$, — отображение $E(\Phi) : E(M^{\mathbf{L}}) \to E(W^{\mathbf{L}})$, определяемое в соответствующих локальных $\mathbf{R}(N,q)$-координатах на $\Psi^{-1}(U) \subset E(M^{\mathbf{L}})$ и $\Psi^{-1}(V) \subset E(W^{\mathbf{L}})$ теми же самыми уравнениями, является функтором

$$E : \mathbf{L}\text{–}\mathcal{R}ad \to \mathbf{R}(N,q)\text{–}\mathcal{R}ad.$$

Прообраз $\Psi^{-1}(C^{\overset{\circ}{\mathbf{L}}}_{Z_0})$ слоя $C^{\overset{\circ}{\mathbf{L}}}_{Z_0}$ канонического $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-слоения на $M^{\mathbf{L}}$ является слоем канонического $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$-слоения на $E(M^{\mathbf{L}})$, изоморфным $\overset{\circ}{E}(C^{\overset{\circ}{\mathbf{L}}}_{Z_0})$. Отсюда следует, что если $M^{\mathbf{L}}$ — полное радиантное $\mathbf{A}$-гладкое многообразие, то $E(M^{\mathbf{L}})$ — полное радиантное $\mathbf{R}(N,q)$-гладкое многообразие.

Пусть $M^{\mathbf{R}(N,q)}$ — полное радиантное $\mathbf{R}(N,q)^{n+m}$-многообразие. Слои канонического $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$-слоения на $M^{\mathbf{R}(N,q)}$ являются полными радиантными $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$-многообразиями, и, следовательно, изоморфны $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$ (см. [19], предложение 5). Рассмотрим дифференциальную группу Ли G^q_N, образованную q-струями локальных диффеоморфизмов $\mathbf{R}^N$ в нуле. Модуль $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$ образуется q-струями ростков вида $f : (\mathbf{R}^N, 0) \to (\mathbf{R}^{n+m}, 0)$, поэтому на $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$ имеется правое действие группы Ли G^q_N по закону композиции струй. В соответствии с этим каждому элементу v из алгебры Ли $\mathfrak{l}^q_N$ группы Ли G^q_N соответствует фундаментальное векторное поле $\widetilde{v}$ на многообразии $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$. Фундаментальное векторное поле на $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)$, соответствующее $v \in \mathfrak{l}^q_N$, может рассматриваться как дифференцирование

$$D_v : \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q) \ni X = \sum_{|p|=1}^{q} x_p\varepsilon^p \mapsto \sum_{|p|=1}^{q}\sum_{a=1}^{N} v^a x_p p_a \varepsilon^{p-a} \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q) \tag{10}$$

(см. [22]), где $\{\varepsilon^a\}$ — стандартная система образующих в алгебре $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)$, $a = 1,2,\ldots,N$, p — мультииндекс длины N и $v^a \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)$. Векторное поле $\widetilde{v}$ на $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$ тогда имеет вид ([22]):

$$\widetilde{v} : \overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^n \ni \{X^i\} \mapsto \{X^i, D_v X^i\} \in \mathrm{T}\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^n. \tag{11}$$

Из формул (10), (11) следует, что фундаментальные векторные поля на модуле $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$ одновременно обращаются в нуль только в нуле, который является единственной неподвижной точкой при действии группы Ли G^q_N. Таким образом, в каждом слое канонического $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$-слоения на $M^{\mathbf{R}(N,q)}$ имеется только одна точка, в которой обращаются в нуль сразу все фундаментальные векторные поля группы Ли G^q_N. Множество таких точек является гладким подмногообразием M' вещественной размерности $n+m$ (это следует из того, что в локальных $\mathbf{R}(N,q)$-координатах на $M^{\mathbf{R}(N,q)}$ подмногообразие M' задается уравнениями $\overset{\circ}{X}{}^i = 0$, $i = 1,\ldots,n+m$). Подмногообразие M' трансверсально каноническому $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)^{n+m}$-слоению и пересекает каждый слой этого слоения в одной точке. Отсюда следует, что соответствие, относящее точке $Z \in M^{\mathbf{R}(N,q)}$ точку $z \in C_Z^{\overset{\circ}{\mathbf{R}}(N,q)} \cap M'$, является субмерсией $M^{\mathbf{R}(N,q)} \to M'$. В частности, если $M^{\mathbf{L}}$ — полное радиантное многообразие, получаем такое подмногообразие $M' \subset E(M^{\mathbf{L}})$. Многообразие M' обладает структурой слоения коразмерности n. При проекции $\Psi : E(M^{\mathbf{L}}) \to M^{\mathbf{L}}$ образ $\Psi(M')$ является слоеным подмногообразием M в $M^{\mathbf{L}}$, трансверсальным каноническому $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-слоению и пересекающим каждый слой этого слоения в одной точке. Таким образом, имеется субмерсия $p : M^{\mathbf{L}} \to M$, слои которой совпадают со слоями канонического $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-слоения на $M^{\mathbf{L}}$ и изоморфны $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$. Рассмотрим $\mathbf{L}$-карту $(U, h : U \to U' \subset \mathbf{L})$ на $M^{\mathbf{L}}$ такую, что U' — открытый координатный параллелепипед, и пусть $\overline{U} = p(U) \subset M$, $\overline{U}' = p(U') \subset \mathbf{R}^{n+m}$. Карта (U,h) может быть распространена неограниченно вдоль любого слоя слоения $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$, пересекающего множество U. В результате получается $\mathbf{A}$-диффеоморфизм $h : p^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U}' \times \overset{\circ}{\mathbf{L}}$. Таким образом, субмерсия $p : M^{\mathbf{L}} \to M$ является локально тривиальным расслоением. Это локально тривиальное расслоение допускает гладкое сечение ([23], гл. I, теорема 5.7) $s : M \to M^{\mathbf{L}}$, трансверсальное каноническому $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-слоению. Применяя к отображению s функтор T^μ, получаем $\mathbf{A}$-диффеоморфизм $T^\mu s : T^\mu M \to M^{\mathbf{L}}$, являющийся изоморфизмом в категории слоеных $\mathbf{L}$-многообразий. $\square$

Литература

1. Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1981. – Т. 12. – С. 61–95.
2. Kolář I., Michor P.W., Slovák J. *Natural operations in differential geometry.* – Springer, 1993. – 434 p.
3. Shurygin V.V. *Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles* // J. Math. Sci. – 2002. – V. 108. – № 2. – P. 249–294.
4. Вишневский В.В. *Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1988. – Т. 20. – С. 35–75.
5. Mikulski W.M. *Product preserving bundle functors on fibered manifolds* // Archiv. Math. – 1996. – V. 32. – P. 307–316.
6. Tomáš J.V. *Natural operators transforming projectable vector fields to product preserving bundles* // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. – 1999. – V. 59. – P. 181–187.
7. Султанов А.Я. *Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 64–72.
8. Kolář I. *Affine structures on Weil bundles* // Nagoya Math. J. – 2000. – V. 158. – P. 99–106.

9. Muñoz J., Rodriguez J., Muriel F.J. *Weil bundles and jet spaces* // Czech. Math. J. – 2000. – V. 50. – № 4. – P. 721–748.
10. Shurygin V.V., Smolyakova L.B. *An analog of the Vaisman–Molino cohomology for manifolds modelled on some types of modules over Weil algebras and its application* // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 9. – P. 55–75.
11. Wołak R. *Normal bundles of foliations of order r* // Demonstratio Math. – 1985. – V. 18. – № 4. – P. 977–994.
12. Pogoda Z. *Horizontal lifts and foliations* // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. – 1989. – V. 38. – № 21. – P. 279–289.
13. Шурыгин В.В. *Применение теории многообразий над алгебрами в трансверсальной геометрии слоений* // В сб. “Памяти Лобачевского посвящается”. Вып. 2. – Изд-во Казанск. ун-та, 1992. – С. 119–140.
14. Апанасов Б.Н. *Геометрия дискретных групп и многообразий.* – М.: Наука, 1991. – 432 с.
15. Малахальцев М.А. (X, G)-*слоения* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 7. – С. 55–65.
16. Brickell F., Clark R.S. *Integrable almost tangent structures* // J. Different. Geom. – 1974. – V. 9. – № 4. – P. 557–563.
17. Duc T.V. *Structures presque-transverse* // J. Different. Geom. – 1979. – V. 14. – № 2. – P. 215–219.
18. León M. de, Méndes I., Salgado M. *Integrable p-almost tangent manifolds and tangent bundles of* p^1-*velocities* // Acta Math. Hung. – 1991. – V. 58. – №№ 1–2. – P. 45–54.
19. Шурыгин В.В. *Многообразия над локальными алгебрами эквивалентные расслоениям струй* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 10. – С. 68–79.
20. Goldman W., Hirsch M.W. *The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 26. – № 2. – P. 629–649.
21. Шурыгин В.В. *О строении трансверсально радиантных многообразий над локальными алгебрами Вейля.* – Тр. конф., посв. 90-летию Г.Ф. Лаптева “Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики”. – МГУ, 2001. – С. 227–236.
22. Шурыгин В.В. *Структурные уравнения расслоения A-аффинных реперов* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 12. – С. 78–80.
23. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. I. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

Казанский государственный университет

Поступила 13.11.2002