ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 2 (441)

УДК 517.929+517.534

С.А. ГУСАРЕНКО

О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Область применения классического вариационного исчисления не охватывает некоторые актуальные классы вариационных задач, в частности, задачу минимизации функционалов с отклоняющимся аргументом. Распространение классических методов на такие задачи оказалось возможным для некоторых специальных задач (напр., [1], [2]) при наличии жестких и не всегда оправданных ограничений.

Метод исследования вариационных задач, предлагаемый в данной работе, основан на редукции вариационной задачи к некоторой экстремальной задаче без ограничений.

Вариационные задачи с линейными ограничениями в виде равенств в пространствах, изоморфных прямому произведению пространств $\mathbf{L}_2[a,b]\times\mathbf{R}^n$, изучались на Пермском Семинаре по функционально–дифференциальным уравнениям [3]–[5]. Наиболее обстоятельно рассмотрен случай квадратичного функционала [6]–[8]. Идеи упомянутых работ приводят к общим методам исследования вариационных задач в нормированных пространствах.

Для удобства читателя напомним основные определения и приведем некоторые утверждения теории экстремальных задач.

Пусть на некотором линейном нормированном пространстве $\mathbf{B}$ определен дважды дифференцируемый по Гато функционал $f:\mathbf{B}\to\mathbf{R}$. Для такого функционала при любых $z,h\in\mathbf{B}$ и $\lambda\in\mathbf{R}$ справедливо представление

$$f(z+\lambda h)=f(z)+\lambda\langle f'(z),h\rangle+\frac{\lambda^2}{2}\langle f''(z)h,h\rangle+r(\lambda,z,h), \tag{0.1}$$

где $\lim\limits_{\lambda\to0}\frac{r(\lambda,z,h)}{\lambda^2}=0$, $f'(z)\in\mathbf{B}^*$, а оператор $f''(z):\mathbf{B}\to\mathbf{B}^*$ симметрический, т.е. $\langle f''(z)h,g\rangle=\langle f''(z)g,h\rangle$ при всех $h,g\in\mathbf{B}$. Ниже предполагается также непрерывность оператора $f''(z)$ в следующем смысле:

$$\lim_{h\to0}\sup_{\lambda\in[0,1]}\frac{\langle(f''(z+\lambda h)-f''(z))h,h\rangle}{\|h\|^2}=0. \tag{0.2}$$

Оператор $U:\mathbf{B}\to\mathbf{B}^*$ называется *положительно определенным* (ниже используется обозначение $U\succeq0$), если $\langle Uz,z\rangle\geq0$ при всех $z\in\mathbf{B}$, и *сильно положительно определенным* ($U\succ0$), если $\langle Uz,z\rangle\geq\mu\|z\|^2$ при всех $z\in\mathbf{B}$, где $\mu>0$.

Условия разрешимости экстремальной задачи

$$f(z)\longrightarrow\min \tag{0.3}$$

формулируются в виде обобщенной теоремы Ферма: если $z\in\mathbf{B}$ — решение задачи (0.3), то $f'(z)=0$ и $f''(z)\succeq0$, а если $f'(z)=0$ и $f''(z)\succ0$ в некоторой точке $z\in\mathbf{B}$, то z — решение задачи (0.3) ([9], с. 154). Отметим также, что если функционал f выпуклый, то условия $f'(z)=0$, $f''(z)\succeq0$ необходимы и достаточны, чтобы точка $z\in\mathbf{B}$ являлась решением задачи (0.3); при этом все минимумы функционала f глобальные.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01613, 96-15-96195) и Конкурсного центра фундаментального естествознания.

Для квадратичного функционала $f(z) = \langle Uz, z\rangle + \langle g, z\rangle$, где $U : \mathbf{B} \to \mathbf{B}^*$ — линейный оператор, $g \in \mathbf{B}^*$, остаточный член $r(\lambda, z, h)$ в представлении (0.1) отсутствует и теорема Ферма формулируется следующим образом: точка $z \in \mathbf{B}$ является решением задачи (0.3) тогда и только тогда, когда $(U + U^*)z + g = 0$ и $(U + U^*) \succeq 0$.[1]

1. Разрешимость вариационных задач

Пусть $\mathbf{W}$, $\mathbf{E}$ — некоторые линейные нормированные пространства. В работе исследуется разрешимость вариационных задач вида

$$f(T_1x, T_2x, \dots, T_mx) \longrightarrow \min, \quad \ell x = c, \tag{1.1}$$

где линейные операторы $T_i : \mathbf{W} \to \mathbf{B}$, $i = \overline{1, m}$, $\ell : \mathbf{W} \to \mathbf{E}$ ограничены, $c \in \mathbf{E}$, а функционал $f : \mathbf{B}^m \to \mathbf{R}$ дважды дифференцируем по Гато:

$$f'(y)h = \langle f'(y), h\rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i'(y_1, \dots, y_i, \dots, y_m)h_i,$$

$$\langle f''(y)g, h\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\langle f_{ij}''(y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_m)g_j, h_i\rangle,$$

$y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{B}^m$, $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbf{B}^m$, $g = (g_1, \dots, g_m) \in \mathbf{B}^m$, и при этом обладает свойством (0.2).

Отметим, что (1.1) является задачей отыскания локального минимума функционала с ограничениями в виде равенств. Она будет рассматриваться в предположении, что существуют такие линейные ограниченные операторы $G : \mathbf{B} \to \mathbf{W}$ и $Y : \mathbf{E} \to \mathbf{W}$, что каждый элемент $x \in \mathbf{W}$ представим в виде

$$x = Gz + Y\gamma, \tag{1.2}$$

где $z \in \mathbf{B}$, $\gamma \in \mathbf{E}$.

Определим линейные операторы равенствами: $Q_i \overset{\text{def}}{=} T_iG : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, $A_i \overset{\text{def}}{=} T_iY : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$, $\Psi \overset{\text{def}}{=} \ell G : \mathbf{B} \to \mathbf{E}$, $\mathrm{q} \overset{\text{def}}{=} \ell Y : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$.

Рассмотрим сначала случай обратимого оператора q. Положим

$$\mathcal{E}x \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m}(Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)^* f_i'(T_1x, \dots, T_ix, \dots, T_mx),$$

$$U(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)^* f_{ij}''(T_1x, \dots, T_ix, \dots, T_jx, \dots, T_mx)(Q_j - A_j\mathrm{q}^{-1}\Psi).$$

Теорема 1. *Если $x \in \mathbf{W}$ — решение задачи* (1.1)*, то $\mathcal{E}x = 0$, $\ell x = c$, $U(x) \succeq 0$. Если $\mathcal{E}x = 0$, $\ell x = c$, $U(x) \succ 0$ для $x \in \mathbf{W}$, то x — решение задачи* (1.1).

Доказательство. Подстановкой (1.2) задача (1.1) приводится к виду

$$f(Q_1z + A_1\gamma, \dots, Q_mz + A_m\gamma) \longrightarrow \min, \quad \Psi z + \mathrm{q}\gamma = c. \tag{1.3}$$

Так как $\gamma = \mathrm{q}^{-1}c - \mathrm{q}^{-1}\Psi z$, то задача (1.3) редуцируется к экстремальной задаче

$$J(z) \longrightarrow \min \tag{1.4}$$

с функционалом $J(z) = f\big((Q_1 - A_1\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_1\mathrm{q}^{-1}c, \dots, (Q_m - A_m\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_m\mathrm{q}^{-1}c\big)$, определенным на пространстве $\mathbf{B}$. Из теоремы Ферма следует, что если z является решением задачи (1.4), то

[1] В силу изометрического вложения $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}^{**}$, не оговаривая особо, считаем, что оператор U^* действует из пространства $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}^*$.

$\langle J'(z),h\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle (Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)^* f_i'\big((Q_1 - A_1\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_1\mathrm{q}^{-1}c,\dots,(Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_i\mathrm{q}^{-1}c,\dots,(Q_m - A_m\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_m\mathrm{q}^{-1}c\big),h\rangle = 0$, при всех $h\in\mathbf{B}$, т. е. $J'(z) = \sum\limits_{i=1}^{m}(Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)^* f_i'\big((Q_1 - A_1\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_1\mathrm{q}^{-1}c,\dots,(Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_i\mathrm{q}^{-1}c,\dots,(Q_m - A_m\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_m\mathrm{q}^{-1}c\big) = 0$, причем $J''(z) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}(Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)^* f_{ij}''\big((Q_1 - A_1\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_1\mathrm{q}^{-1}c,\dots,(Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_i\mathrm{q}^{-1}c,\dots,(Q_j - A_j\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_j\mathrm{q}^{-1}c,\dots,(Q_m - A_m\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_m\mathrm{q}^{-1}c\big)(Q_j - A_j\mathrm{q}^{-1}\Psi) \succeq 0$. Аналогично, если $J'(z) = 0$ и $J''(z) \succ 0$, то z — решение задачи (1.4). Так как $x = Gz + Y\gamma = (G - Y\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + Y\mathrm{q}^{-1}c$ и $T_ix = (Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)z + A_i\mathrm{q}^{-1}c$, $\ell x = c$, то отсюда следуют утверждения теоремы о разрешимости задачи (1.1) в точке x. $\square$

Уравнение $\mathcal{E}x = 0$, где $\mathcal{E}:\mathbf{W}\to\mathbf{B}$, естественно назвать *уравнением Эйлера* задачи (1.1), а систему уравнений

$$\mathcal{E}x = 0, \quad \ell x = c, \tag{1.5}$$

— *краевой задачей Эйлера.* Линейный оператор $U(x):\mathbf{B}\to\mathbf{B}^*$ будем называть *оператором Якоби.* Таким образом, из теоремы 1 следует, что разрешимость краевой задачи Эйлера (1.5) необходима для разрешимости вариационной задачи (1.1). Если, кроме того, оператор Якоби $U(x)$ сильно положительно определен, то точка x является локальным решением задачи (1.1).

Следствие. Если оператор Y является правым обратным оператором к ℓ, то уравнение Эйлера принимает вид

$$\mathcal{E}x = \sum_{i=1}^{m}(Q_i - A_i\Psi)^* f_i'(T_1x,\dots,T_ix,\dots,T_mx).$$

Пусть $\mathbf{L}_p[a,b]$ — пространство функций $z:[a,b]\to\mathbf{R}$, суммируемых на $[a,b]$ со степенью $p\geq 1$, с нормой $\|z\| = \Big(\int\limits_a^b |z(s)|^p\,ds\Big)^{1/p}$ и $\mathbf{W}_p^{(n)}[a,b]$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbf{R}$, что $x^{(n)}\in\mathbf{L}_p[a,b]$ с нормой $\|x\| = \Big(|x(a)|^p + |\dot{x}(a)|^p + \dots + |x^{(n-1)}(a)|^p + \int\limits_a^b |x^{(n)}(s)|^p\,ds\Big)^{1/p}$.

Пример 1. Рассмотрим вариационную задачу с отклоняющимся аргументом

$$\int_a^b \big(\dot{x}^2(t) - p(t)x[h_1(t)]x[h_2(t)]\big)\,dt \longrightarrow \min, \quad x(\xi) = \varphi(\xi), \text{ если } \xi\notin(a,b), \tag{1.6}$$

где $p\in\mathbf{L}_1[a,b]$, а функции h_1, $h_2:[a,b]\to\mathbf{R}$, $\varphi:\mathbf{R}\setminus(a,b)\to\mathbf{R}$ измеримы по Лебегу. Исходя из вида функционала, будем искать решение этой задачи в пространстве $\mathbf{W} = \mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$.

Приведем задачу (1.6) к виду (1.1). Для этого положим $\mathbf{B} = \mathbf{L}_2[a,b]$, $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$, $\ell x = \big(x(a),x(b)\big)$, $c = \big(\varphi(a),\varphi(b)\big)$ и определим линейные операторы $(T_3x)(t) = \dot{x}(t)$,

$$(T_ix)(t) = \begin{cases} x[h_i(t)], & \text{если } h_i(t)\in[a,b];\\ 0, & \text{если } h_i(t)\notin[a,b],\end{cases}$$

$i = 1,2$. Тогда задачу (1.6) можно записать в виде (1.1)

$$\frac{1}{2}\int_a^b \Big((T_3x)^2(t) - p(t)\big((T_1x)(t)(T_2x)(t) + \varphi_2(t)(T_1x)(t) + \varphi_1(t)(T_2x)(t) + \varphi_1(t)\varphi_2(t)\big)\Big)\,dt \longrightarrow \min,$$
$$\ell x = c$$

при условии, что функции $\varphi_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } h_i(t) \in [a,b]; \\ \varphi[h_i(t)], & \text{если } h_i(t) \notin [a,b], \end{cases}$ принадлежат пространству $\mathbf{L}_\infty[a,b]$.

Так как для каждого $x \in \mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$ справедливо тождество

$$x(t) = \int_a^t \left(\dot{x}(s) - \frac{x(b)-x(a)}{b-a}\right) ds - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b \left(\dot{x}(s) - \frac{x(b)-x(a)}{b-a}\right) ds + \frac{(b-t)x(a)+(t-a)x(b)}{b-a},$$

то операторы G, Y в представлении (1.2) можно определить равенствами

$$(Gz)(t) = \int_a^t z(s)\,ds - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b z(s)\,ds, \quad (Y(\alpha,\beta))(t) = \frac{(b-t)\alpha+(t-a)\beta}{b-a}.$$

Тогда уравнение Эйлера задачи (1.6) принимает вид

$$\mathcal{E}x = \dot{x}(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \dot{x}(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_a^b p(s)\big(K_2(t,s)(T_1x)(s) + K_1(t,s)(T_2x)(s)\big)\,ds =$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b p(s)\big(K_2(t,s)\varphi_1(s) + K_1(t,s)\varphi_2(s)\big)\,ds,$$

где

$$K_i(t,s) = \begin{cases} \dfrac{b-h_i(s)}{b-a}, & \text{если } a \le t \le h_i(s) \le b; \\ -\dfrac{h_i(s)-a}{b-a}, & \text{если } a \le h_i(s) < t \le b; \\ 0, & \text{если } h_i(s) \notin [a,b], \end{cases}$$

а оператор Якоби определяется равенством

$$(Uz)(t) = z(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b z(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(\tau)\big(K_1(t,\tau)K_2(s,\tau) + K_2(t,\tau)K_1(s,\tau)\big)z(s)\,d\tau ds.$$

Так как при этом $\langle Uz, z\rangle = \langle (I - PKP)z, Pz\rangle$, где I — тождественный оператор, $(Pz)(t) = z(t) - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b z(s)\,ds$, $(Ky)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)y(s)\,ds$, $K(t,s) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b p(\tau)\big(\chi_1(s,\tau)\chi_2(t,\tau) + \chi_2(s,\tau)\chi_1(t,\tau)\big)\,d\tau$,

$$\chi_i(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \le t \le h_i(s) \le b; \\ 0, & \text{если } a \le h_i(s) < t \le b; \\ 0, & \text{если } h_i(s) \notin [a,b], \end{cases}$$

то, например, условие $\|PK\| \le 1$ гарантирует положительную определенность оператора U.

Отметим также, что если $h_1 = h_2$, функция φ непрерывна и существует такая функция $\rho \in \mathbf{W}_1^{(1)}[a,b]$, что $\frac{d}{dt}\rho[h_1(t)] = p(t)$, то обе части уравнения Эйлера можно продифференцировать и преобразовать краевую задачу Эйлера к эквивалентной классической двухточечной краевой задаче

$$\ddot{x}(t) + \dot{\rho}(t)x(t) = 0, \quad x(a) = \varphi(a), \quad x(b) = \varphi(b).$$

Получить представление (1.2) особенно просто в случае, если существует такой оператор $\delta : \mathbf{W} \to \mathbf{B}$, что краевая задача

$$\delta x = z, \quad \ell x = \gamma$$

при любых $z \in \mathbf{H}$, $\gamma \in \mathbf{E}$ имеет единственное решение $x = Gz + Y\gamma$. Тогда уравнение Эйлера задачи (1.1) принимает вид $\mathcal{E}x = \sum\limits_{i=1}^m Q_i^* f_i'(T_1x, \dots, T_ix, \dots, T_mx) = 0$, а оператор Якоби $U(x) = \sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{j=1}^m Q_i^* f_{ij}''(T_1x, \dots, T_ix, \dots, T_jx, \dots, T_mx)Q_j$.

Пример 2. Рассмотрим вариационную задачу

$$\begin{aligned} &\int_a^b \big(\dot{x}^p(t) - \nu x^p(t)\big)\,dt \longrightarrow \min, \\ &x(a) + \int_a^b \psi(s)\dot{x}(s)\,ds = c, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{L}_p[a,b]$, $\mathbf{E} = \mathbf{R}$, $\mathbf{W} = \mathbf{W}_p^{(1)}[a,b]$, $(T_1x)(t) = \dot{x}(t)$, $(T_2x)(t) = x(t)$, $\psi \in \mathbf{L}_{\frac{p}{p-1}}[a,b]$, $\nu \in \mathbf{R}$, $f(u,v) = \int\limits_a^b \big(u^p(t) - \nu v^p(t)\big)\,dt$, $\ell x = x(a) + \int\limits_a^b \psi(s)\dot{x}(s)\,ds$, p целое и $p > 1$. Так как задача $\dot{x}(t) = z(t)$, $x(a) = \gamma$ при $z \in \mathbf{L}_p[a,b]$, $\gamma \in \mathbf{R}$ имеет единственное решение $x(t) = \gamma + \int\limits_a^t z(s)\,ds$, $x \in \mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$, то, полагая $(Gz)(t) = \int\limits_a^t z(t)\,dt$, $(Y\gamma)(t) = \gamma$, получаем уравнение Эйлера задачи (1.7) в виде

$$(\mathcal{E}x)(t) = p\left(\dot{x}^{p-1}(t) - \nu \int_t^b x^{p-1}(s)\,ds + \nu\psi(t)\int_a^b x^{p-1}(s)\,ds\right) = 0,$$

а оператор Якоби имеет вид

$$(U(x)z)(t) = \dot{x}^{p-2}(t)z(t) - \nu \int_a^b \int_a^b K(\tau,t)x^{p-2}(\tau)K(\tau,s)z(s)\,d\tau\,ds,$$

где

$$K(t,s) = \begin{cases} 1 - \psi(s), & \text{если } a \le s \le t \le b; \\ \ \ -\psi(s), & \text{если } a \le t < s \le b. \end{cases}$$

Если при этом функция ψ абсолютно непрерывна, то, положив $t = b$ и затем продифференцировав обе части уравнения Эйлера, получим, что решение задачи (1.7) является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} &(p-1)\ddot{x}(t)\dot{x}^{p-2}(t) + \nu x^{p-1}(t) + \nu\dot{\psi}(t)\int_a^b x^{p-1}(s)\,ds = 0, \\ &x(a) + \int_a^b \psi(s)\dot{x}(s)\,ds = c, \quad \dot{x}^{p-1}(b) = -\nu\psi(b)\int_a^b x^{p-1}\,ds. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Отметим также, что при $\psi \equiv 0$, $\nu > 0$ положительная определенность оператора $U(x)$ обеспечивается неравенством $b - a \le (\frac{p-1}{\nu})^{1/p}\frac{\pi}{p\sin(\pi/p)}$.

Рассмотрим теперь ситуацию необратимого оператора q. Пусть оператор $\mathrm{q}^- : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ — *обобщенный* обратный оператор к оператору q, определяемый равенством $\mathrm{q}\mathrm{q}^-\mathrm{q} = \mathrm{q}$. Легко проверить, что если r принадлежит множеству значений оператора q, то общее решение уравнения $\mathrm{q}\gamma = r$ имеет вид $\gamma = \mathrm{q}^-r + (I - \mathrm{q}^-\mathrm{q})u$, где u — произвольный элемент пространства $\mathbf{E}$.

Равенствами

$$U_{11}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (Q_i - A_i\mathrm{q}^-\Psi)^* f''_{ij}(T_1x,\dots,T_mx)(Q_j - A_j\mathrm{q}^-\Psi),$$

$$U_{12}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (Q_i - A_i\mathrm{q}^-\Psi)^* f''_{ij}(T_1x\dots,T_mx)(A_j - A_j\mathrm{q}^-\mathrm{q}),$$

$$U_{21}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (A_i - A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q})^* f''_{ij}(T_1x,\dots,T_mx)(Q_j - A_j\mathrm{q}^-\Psi),$$

$$U_{22}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (A_i - A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q})^* f''_{ij}(T_1x,\dots,T_mx)(A_j - A_j\mathrm{q}^-\mathrm{q})$$

определим матричный оператор $U(x) = \begin{pmatrix} U_{11}(x) & U_{12}(x) \\ U_{21}(x) & U_{22}(x) \end{pmatrix} : \mathbf{B} \times \mathbf{E} \to \mathbf{B}^* \times \mathbf{E}^*$.

Теорема 2. *Пусть* q^- *— обобщенный обратный оператор к оператору* q. *Тогда если* $x \in \mathbf{W}$ *— решение задачи* (1.1), *то*

$$\sum_{i=1}^{m}(Q_i - A_i\mathrm{q}^-\Psi)^* f_i'(T_1x,\dots,T_mx) = 0, \quad \sum_{i=1}^{m}(A_i - A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q})^* f_i'(T_1x,\dots,T_mx) = 0, \quad \ell x = c, \quad U(x) \succeq 0;$$

если для $x \in \mathbf{W}$ *имеем*

$$\sum_{i=1}^{m}(Q_i - A_i\mathrm{q}^-\Psi)^* f'(T_1x,\dots,T_mx) = 0, \quad \sum_{i=1}^{m}(A_i - A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q})^* f'(T_1x,\dots,T_mx) = 0, \quad \ell x = c, \quad U(x) \succ 0,$$

то x *является решением задачи* (1.1).

Доказательство. Подстановка (1.2) приводит задачу (1.3) к виду (1.1). Так как $\gamma = \mathrm{q}^-c - \mathrm{q}^-\Psi z + (I - \mathrm{q}^-\mathrm{q})u$, $u \in \mathbf{E}$, то задача (1.1) редуцируется к экстремальной задаче

$$\varphi(z,u) \longrightarrow \min \tag{1.9}$$

с функционалом

$$\varphi(z,u) = f((Q_1 - A_1\mathrm{q}^-\Psi)z + (A_1 - A_1\mathrm{q}^-\mathrm{q})u + A_1\mathrm{q}^-c, \dots, (Q_m - A_m\mathrm{q}^-\Psi)z + (A_m - A_m\mathrm{q}^-\mathrm{q})u + A_m\mathrm{q}^-c),$$

определенным на прямом произведении пространств $\mathbf{B} \times \mathbf{E}$. Чтобы закончить доказательство, достаточно применить к задаче (1.9) теорему Ферма. □

Таким образом, уравнение Эйлера задачи (1.1) в этом случае имеет вид

$$\mathcal{E}x \equiv \sum_{i=1}^{m}(Q_i - A_i\mathrm{q}^-\Psi)^* f_i'(T_1x,\dots,T_mx) = 0,$$

краевая задача Эйлера записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{m}(Q_i - A_i\mathrm{q}^-\Psi)^* f_i'(T_1x,\dots,T_mx) = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m}(A_i - A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q})^* f_i'(T_1x,\dots,T_mx) = 0, \quad \ell x = c,$$

а оператор Якоби $U(x)$ матричный.

Замечание. Если оператор q обратим, то

$$U(x) \equiv \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)^* f_{ij}''(T_1x,\dots,T_mx)(Q_j - A_j\mathrm{q}^{-1}\Psi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

краевая задача Эйлера приводится к виду (1.5) и из теоремы 2 следует теорема 1.

Приведем условия положительной определенности матричного оператора вида

$$U = \begin{pmatrix} P & \Pi^* \\ \Pi & \mathcal{P} \end{pmatrix} : \mathbf{H} \times \mathbf{E} \to \mathbf{H}^* \times \mathbf{E}^*,$$

где $\Pi : \mathbf{H} \to \mathbf{E}^*$, $\Pi^* : \mathbf{E} \to \mathbf{H}^*$, а операторы $P : \mathbf{H} \to \mathbf{H}^*$, $\mathcal{P} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^*$ симметрические. Такой вид имеет оператор Якоби $U(x)$. Положительная определенность оператора U эквивалентна условию $\langle Pz, z\rangle + 2\langle \Pi z, \gamma\rangle + \langle \mathcal{P}\gamma, \gamma\rangle \geq 0$ при всех $(z,\gamma) \in \mathbf{H} \times \mathbf{E}$. Зафиксировав z, получим относительно γ экстремальное уравнение $\Pi z + \mathcal{P}\gamma = 0$. Отсюда следует, что если оператор $\mathcal{P}$ обратим, то

$\gamma = -\mathcal{P}^{-1}\Pi z$, и $U \succeq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P} \succeq 0$, $P - \Pi^*\mathcal{P}^{-1}\Pi \succeq 0$. Если оператор $\mathcal{P}$ не обратим, то $U \succeq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P} \succeq 0$, $P - \Pi^*\mathcal{P}^{-}\Pi \succeq 0$ и $\ker \mathcal{P} \subseteq \ker \Pi^*$, $\Pi\mathbf{H} \subseteq \mathcal{P}\mathbf{E}$.

Пусть $\Omega = [a,b] \times [p,q]$, $\mathbf{W}_2(\Omega)$ — пространство функций $u : \Omega \to \mathbf{R}$, представимых в виде

$$u(t,s) = \int_a^t \int_p^s v(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma + \int_a^t v_1(\tau)\,d\tau + \int_p^s v_2(\sigma)\,d\sigma + \gamma,$$

где $v \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $v_1 \in \mathbf{L}_2[a,b]$, $v_2 \in \mathbf{L}_2[p,q]$, $\gamma \in \mathbf{R}$, с нормой $\|u\| = (\|v\|^2 + \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + |\gamma|^2)^{1/2}$.

Пример 3. Построим уравнение Эйлера для задачи

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega} f\big(t,s,u'_t[\mu(t,s),\nu(t,s)],u'_s[\mu(t,s),\nu(t,s)],u(t,s)\big)\,dt\,ds \longrightarrow \min,\\
&u(a,s) = \alpha(s),\ u(b,s) = \beta(s),\ s \in [p,q],\\
&u(t,p) = \pi(t),\ u(t,q) = \theta(t),\ t \in [a,b],
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где функция $f : \Omega \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ имеет непрерывные частные производные $f'_1(t,s,v,w,u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f(t,s,v,w,u)}{\partial v}$, $f'_2(t,s,v,w,u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f(t,s,v,w,u)}{\partial w}$, $f'_3(t,s,v,w,u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f(t,s,v,w,u)}{\partial u}$ и оператор $\big(F(v,w,u)\big)(t,s) = f\big(t,s,v(t,s),w(t,s),u(t,s)\big)$ непрерывно действует из $\mathbf{L}_2^2(\Omega) \times \mathbf{W}_2(\Omega)$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$; $\alpha,\beta \in \mathbf{W}_2^{(1)}[p,q]$; $\pi,\theta \in \mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$; $\alpha(p) = \pi(a)$, $\alpha(q) = \theta(a)$, $\beta(p) = \pi(b)$, $\beta(q) = \theta(b)$; функции $(\mu,\nu) : \Omega \to \Omega$ измеримы и

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{s\in[p,q]\\ e\subset[a,b]}} \frac{\operatorname{mes}\{\tau \in [a,b] : \mu(\tau,s) \in e\}}{\operatorname{mes}\{e\}} < \infty, \quad \operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{t\in[a,b]\\ e\subset[p,q]}} \frac{\operatorname{mes}\{\sigma \in [p,q] : \mu(t,\sigma) \in e\}}{\operatorname{mes}\{e\}} < \infty.$$

Положим $\mathbf{W} = \mathbf{W}_2(\Omega)$, $\mathbf{B} = \mathbf{L}_2(\Omega)$, $\mathbf{E} = \{(w,y,v,z) \in \mathbf{W}_2^{(1)2}[a,b] \times \mathbf{W}_2^{(1)2}[p,q] : v(p) = w(a),\ w(b) = z(p),\ z(q) = y(b),\ y(a) = v(q)\}$ и $(c)(t,s) = \big(\pi(t),\theta(t),\alpha(s),\beta(s)\big)$, $(\ell u)(t,s) = \big(u(t,p),u(t,q),u(a,s),u(b,s)\big)$. Так как каждый $x \in \mathbf{W}_2(\Omega)$ представим в виде

$$u(t,s) = \int_a^t \int_p^s u''_{ts}(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma + u(a,s) + u(t,c) - u(a,c),$$

то, полагая

$$(Y(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4))(t,s) = \gamma_1(t) + \gamma_3(s) - \gamma_1(a), \quad (Gu)(t,s) = \int_a^t \int_p^s u(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma,$$

имеем

$$\begin{gathered}
(\mathrm{q}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4))(t,s) = (\gamma_1(t), \gamma_1(t) + \gamma_3(q) - \gamma_1(a), \gamma_3(s), \gamma_1(b) - \gamma_1(a) + \gamma_3(s)),\\
(\mathrm{q}^-(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4))(t,s) = (\gamma_1(t), 0, \gamma_3(s), 0).
\end{gathered}$$

Следовательно, в случае, когда для функционала из (1.10) существует производная по Гато, уравнение Эйлера задачи (1.10) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Omega} \chi(t,s,\tau,\sigma) f'_1\big(\tau,\sigma,u'_t[\mu(\tau,\sigma),\nu(\tau,\sigma)],u'_s[\mu(\tau,\sigma),\nu(\tau,\sigma)],u(\tau,\sigma)\big)\,d\tau\,d\sigma +\\
&\qquad + \frac{d}{ds}\iint\limits_{\Omega} \eta(t,s,\tau,\sigma) f'_2\big(\tau,\sigma,u'_t[\mu(\tau,\sigma),\nu(\tau,\sigma)],u'_s[\mu(\tau,\sigma),\nu(\tau,\sigma)],u(\tau,\sigma)\big)\,d\tau\,d\sigma +\\
&\qquad\qquad + \int_t^b \int_s^q f'_3\big(\tau,\sigma,u'_t[\mu(\tau,\sigma),\nu(\tau,\sigma)],u'_s[\mu(\tau,\sigma),\nu(\tau,\sigma)],u(\tau,\sigma)\big)\,d\tau\,d\sigma = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\chi(t,s,\tau,\sigma)=\begin{cases}1, & \text{если } (t,s)\in[\mu(\tau,\sigma),b]\times[p,\nu(\tau,\sigma)];\\ 0, & \text{если } (t,s)\notin[\mu(\tau,\sigma),b]\times[p,\nu(\tau,\sigma)],\end{cases}$$

$$\eta(t,s,\tau,\sigma)=\begin{cases}1, & \text{если } (t,s)\in[a,\mu(\tau,\sigma)]\times[\nu(\tau,\sigma),q];\\ 0, & \text{если } (t,s)\notin[a,\mu(\tau,\sigma)]\times[\nu(\tau,\sigma),q].\end{cases}$$

Отметим, что если $f(t,s,v,w,u)=v^2+w^2+2g(t,s)u^2$, $\mu(t,s)=t$, $\nu(t,s)=s$, то задача (1.10) является известной задачей о равновесии мембраны. При этом выполнено условие (0.2), обе части уравнения Эйлера можно продифференцировать по t и s и получить, что в этом случае задача Эйлера совпадает с задачей Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases}u''_{tt}(t,s)+u''_{ss}(t,s)=g(t,s), \quad (t,s)\in\Omega,\\ u(a,s)=\alpha(s), \quad u(b,s)=\beta(s), \quad s\in[p,q],\\ u(t,p)=\pi(t), \quad u(t,q)=\theta(t), \quad t\in[a,b].\end{cases}$$

2. Квадратичные вариационные задачи

Пусть пространство $\mathbf{B}$ гильбертово. Рассмотрим *квадратичную вариационную задачу*

$$\sum_{i=1}^{m}\langle T_i x, T^i x\rangle+\langle g, T_0 x\rangle \longrightarrow \min, \quad \ell x=c, \tag{2.1}$$

где T_0, T_i, $T^i:\mathbf{W}\to\mathbf{B}$, $i=1,\ldots,m$, — линейные ограниченные операторы, $g\in\mathbf{B}$. Такая задача часто встречается в приложениях. Уравнение Эйлера этой задачи линейное, а оператор Якоби не зависит от точки x. Определим операторы $Q_i=T_iG:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$, $Q^i=T_iG:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$, $A_i=T_iY:\mathbf{E}\to\mathbf{B}$, $A^i=T_iG:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$, $i=1,\ldots,m$, и

$$\begin{aligned}
U_{11}&=\sum_{i=1}^{m}(Q^i-A^i\mathrm{q}^-\Psi)^*(Q_i-A_i\mathrm{q}^-\Psi)+(Q^i-A^i\mathrm{q}^-\Psi)^*(Q_i-A_i\mathrm{q}^-\Psi),\\
U_{12}&=\sum_{i=1}^{m}(Q^i-A^i\mathrm{q}^-\Psi)^*(A_i-A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q})+(Q^i-A^i\mathrm{q}^-\Psi)^*(A_i-A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q}),\\
U_{21}&=\sum_{i=1}^{m}(A^i-A^i\mathrm{q}^-\mathrm{q})^*(Q_i-A_i\mathrm{q}^-\Psi)+(A^i-A^i\mathrm{q}^-\mathrm{q})^*(Q_i-A_i\mathrm{q}^-\Psi),\\
U_{22}&=\sum_{i=1}^{m}(A^j-A^j\mathrm{q}^-\mathrm{q})^*(A_i-A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q})+(A^j-A^j\mathrm{q}^-\mathrm{q})^*(A_i-A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q}),\\
\mathcal{L}x&=\sum_{i=1}^{m}((Q^i-A^i\mathrm{q}^-\Psi)^*T_i+(Q_i-A_i\mathrm{q}^-\Psi)^*T^i)x, \quad \varphi=-(Q_0-A_0q^-\Psi)^*g.
\end{aligned}$$

Теорема 3. *Если оператор* q *обратим, то* $x\in\mathbf{W}$ *является решением задачи* (2.1) *тогда и только тогда, когда* x *является решением задачи Эйлера*

$$\mathcal{L}x=\varphi, \quad \ell x=c,$$

а оператор Якоби U_{11} *положительно определен. Если оператор* q *необратим, то* $x\in\mathbf{W}$ *является решением задачи* (2.1) *тогда и только тогда, когда* x *является решением системы*

$$\begin{cases}\mathcal{L}x=\varphi,\\ \sum\limits_{i=1}^{m}((A^i-A^i\mathrm{q}^-\mathrm{q})^*T_i+(A_i-A_i\mathrm{q}^-\mathrm{q})^*T^i)x=-(A_0-A_0\mathrm{q}^-\mathrm{q})^*g,\\ \ell x=c,\end{cases}$$

а матричный оператор Якоби $\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ *положительно определен. Каждый локальный минимум задачи* (2.1) *является глобальным.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично приведенным выше доказательствам теорем 1, 2 и основано на применении теоремы Ферма к квадратичному функционалу.

Задача (2.1) имеет единственное решение, если оператор Якоби сильно положительно определенный. Спектр такого оператора действительный и больше некоторой положительной постоянной.

Спектр положительно определенного оператора Якоби действительный и неотрицательный. Если точка 0 принадлежит его спектру, то решение задачи Эйлера может не существовать либо быть не единственным.

Если оператор Якоби не является положительно определенным, то функционал снизу не ограничен.

Достаточные условия положительной определенности (а также сильной положительной определенности) оператора Якоби U можно получать с помощью следующего утверждения: если существует такой ограниченный самосопряженный оператор $U_0 : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, что $\|U_0 - U\| \le \inf\limits_{\|z\|=1} \langle U_0 z, z\rangle$, то оператор U положительно определенный. В частности, если выполняется эффективно проверяемое условие $\|I - U\| \le 1$ (< 1), то оператор U положительно определен (сильно положительно определен). Для канонического фредгольмова оператора $U = I - K$, где оператор $K : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ вполне непрерывный, условие $\|K\| \le 1$ (< 1) достаточное, а в случае изотонности оператора K и необходимое для положительной определенности (сильной положительной определенности) оператора U.

Пример 4. Рассмотрим вариационную задачу

$$\begin{gathered} \iint\limits_{\Omega} \left({u''_{ts}}^2(t,s) + r(t,s)u^2[h(t,s), g(t,s)]\right) dt\,ds \longrightarrow \min, \\ u(t,p) = \alpha(t), \quad t \in [a,b], \quad u(a,s) = \beta(s), \quad s \in [p,q], \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\Omega = [a,b] \times [p,q]$, $r \in \mathbf{L}_1(\Omega)$, $\alpha \in \mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$, $\beta \in \mathbf{W}_2^{(1)}[p,q]$, $\alpha(a) = \beta(p)$, функция $(h,g) : \Omega \to \Omega$ измерима по Лебегу. Положим $\mathbf{W} = \mathbf{W}_2(\Omega)$, $\mathbf{B} = \mathbf{L}_2(\Omega)$, $\mathbf{E} = \{(\alpha,\beta) \in \mathbf{W}_2^{(1)}[a,b] \times \mathbf{W}_2^{(1)}[p,q] : \alpha(a) = \beta(p)\}$, $(Gz)(t,s) = \int\limits_a^t\int\limits_p^s z(t,s)\,dt\,ds$, $\big(Y(\alpha,\beta)\big)(t,s) = \alpha(t) + \beta(s) - \beta(0)$. Тогда краевая задача Эйлера принимает вид

$$\begin{gathered} u''_{ts}(t,s) + \iint\limits_{\Omega} K(\tau,\sigma,t,s) r(\tau,\sigma) u[h(\tau,\sigma), g(\tau,\sigma)]\,d\tau d\sigma = 0, \\ u(t,p) = \alpha(t),\ t \in [a,b], \quad u(a,s) = \beta(s),\ s \in [p,q], \end{gathered}$$

где $K(t,s,\tau,\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \le h(t,s) \text{ и } \sigma \le g(t,s), \\ 0, & \text{если } \tau > h(t,s) \text{ или } \sigma > g(t,s), \end{cases}$ а оператор Якоби равен

$$(Uz)(t,s) = z(t,s) + \iint\limits_{\Omega}\ \iint\limits_{\Omega} K(\tau,\sigma,t,s) r(\tau,\sigma) K(\tau,\sigma,\theta,\xi) z(\theta,\xi)\,d\theta\,d\xi\,d\tau\,d\sigma.$$

Следовательно, условие

$$\iint\limits_{\Omega}\ \iint\limits_{\Omega} \bigg(\ \iint\limits_{\Omega} K(\tau,\sigma,t,s) r(\tau,\sigma) K(\tau,\sigma,\theta,\xi)\,d\tau d\sigma\bigg)^2 d\theta\,d\xi\,dt\,ds < 1$$

гарантирует однозначную разрешимость задачи (2.2). В частности, задача (2.2) однозначно разрешима, если $\|r\|^2(b-a)(q-p) < 1$. При $r(t,s) \equiv r$, $h(t,s) \equiv t$, $g(t,s) \equiv s$ задача (2.2) разрешима при условии $|r|(b-a)^2(q-p)^2 < 6$.

Пусть линейная краевая задача

$$\delta x = z, \quad \ell x = \gamma,$$

где $\delta : \mathbf{W} \to \mathbf{B}$, имеет единственное решение $x = Gz + Y\gamma$ при любых $z \in \mathbf{B}$, $\gamma \in \mathbf{E}$. Тогда уравнение Эйлера задачи (2.1) принимает вид

$$\mathcal{L}x = \sum_{i=1}^{m}({Q_i}^* T^i + {Q^i}^* T_i)x = -Q_0^* g,$$

а оператор Якоби равен $U = \sum\limits_{i=1}^{m} {Q^i}^* Q_i + {Q_i}^* Q^i$. Среди квадратичных задач отметим "простейшую" вариационную задачу

$$\frac{1}{2}\langle \delta x, \delta x\rangle + \langle g, T_0 x\rangle \longrightarrow \min, \quad \ell x = c, \tag{2.3}$$

где оператор Якоби единичный. Задача (2.3) всегда однозначно разрешима, решение соответствующей задачи Эйлера равно $x = -GQ_0^* g + Yc$ и минимум функционала равен $\langle g, Ac\rangle - \frac{1}{2}\langle Q_0^* g, Q_0^* g\rangle$. Отметим также, что для любого самосопряженного оператора $U : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ и любого $g \in \mathbf{B}$ уравнение $U\delta x = g$ является уравнением Эйлера вариационной задачи

$$\frac{1}{2}\langle U\delta x, \delta x\rangle - \langle g, \delta x\rangle \longrightarrow \min, \quad \ell x = c.$$

Рассмотрим подробнее квадратичную вариационную задачу в пространстве $\mathbf{W}_2^{(n)}[a,b]$

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{m} (T_i x)(t)(T^i x)(t) + g(t)(T_0 x)(t)\right) dt \longrightarrow \min, \quad \ell_j x = c_j, \quad j = \overline{1,k}, \tag{2.4}$$

где $k \geq n$; линейные операторы $T_i, T^i : \mathbf{W}_2^{(n)}[a,b] \to \mathbf{L}_2[a,b]$, $i = \overline{0,m}$, $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_k) : \mathbf{W}_2^{(n)}[a,b] \to \mathbf{R}^k$ ограничены; $g \in \mathbf{L}_2[a,b]$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathbf{R}^k$.

Пусть решение полуоднородной краевой задачи

$$\delta x = z, \quad \delta : \mathbf{W}_2^{(n)}[a,b] \to \mathbf{L}_2[a,b], \quad \ell_j x = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.5}$$

имеет вид $x = Gz$, а оператор $Y : \mathbf{R}^k \to \mathbf{W}_2^{(n)}[a,b]$, причем $k \times k$-матрица ℓY обратима. Здесь G — *оператор Грина* задачи (2.5) ([10], с. 50), Тогда для каждого $x \in \mathbf{W}_2^{(n)}[a,b]$ справедливо представление (1.2) $x = Gz + Y\gamma$, $z \in \mathbf{L}_2[a,b]$, $\gamma \in \mathbf{R}^k$.

Отметим, что подобная конструкция, где G — оператор Грина некоторой краевой задачи, а система функций Y биортогональна к функционалу ℓ (т. е. матрица ℓY единичная), использовалась в работе [6].

Из теоремы 3 следует, что решение соответствующей задачи Эйлера

$$\mathcal{L}x = \varphi, \quad \ell x = c, \tag{2.6}$$

где $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{m} \left((Q_i - A_i \mathrm{q}^{-1}\Psi)^* T^i + (Q^i - A^i \mathrm{q}^{-1}\Psi)^* T_i\right)$, $Q_i = T_i G$, $Q^i = T^i G$, $A_i = T_i G$, $A^i = T^i G$, $\varphi = -(Q_0 - A_0 \mathrm{q}^{-1}\Psi)^* g$, является решением вариационной задачи (2.4), если оператор Якоби $U = \sum\limits_{i=1}^{m} \left((Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)^*(Q^i - A^i\mathrm{q}^{-1}\Psi) + (Q^i - A^i\mathrm{q}^{-1}\Psi)^*(Q_i - A_i\mathrm{q}^{-1}\Psi)\right)$ положительно определен. Отметим также представление $U \equiv \mathcal{L}(G - Y\mathrm{q}^{-1}\Psi)$.

Напомним, что линейный оператор $K : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ с замкнутой областью значений называется *нетеровым*, если размерности ядер $\ker K$ и $\ker K^*$ конечны, а величина $\operatorname{ind} K = \dim\ker K -$

$\dim\ker K^*$ называется *индексом* оператора K. Нетеров оператор нулевого индекса называется *фредгольмовым.*

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *оператор* $\sum\limits_{i=1}^{m}(T_i^*T^i + {T^i}^*T_i)$ *фредгольмов;*

б) *оператор* $\mathcal{L}$ *нетеров, при этом* $\operatorname{ind}\mathcal{L} = n$;

в) *оператор Якоби* U *фредгольмов;*

г) *задача Эйлера* (2.6) *нетерова с индексом* $\operatorname{ind}[\mathcal{L},\ell] = n - k$ *и разрешима, если и только если для любого решения однородной задачи Эйлера* $\mathcal{L}y = 0$, $\ell y = 0$ *справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\langle T_i y, A^i \mathrm{q}^{-1}c\rangle + \langle T^i y, A_i \mathrm{q}^{-1}c\rangle\right) + \langle T_0 y, g\rangle = 0.$$

Доказательство. Так как G — оператор Грина, то ([10], с. 50) $\ker G = \{0\}$ и $\operatorname{ind}G = -n$. Так как оператор $G - Y\mathrm{q}^{-1}\Psi$ нетеров, причем $\operatorname{ind}(G - Y\mathrm{q}^{-1}\Psi) = \operatorname{ind}(I - Y\mathrm{q}^{-1}\ell) + \operatorname{ind}G = \operatorname{ind}G$, а оператор $U = (G - Yq^{-1}\Psi)^* \sum\limits_{i=1}^{m}(T_i^*T^i + T^{i*}T_i)(G - Y\mathrm{q}^{-1}\Psi)$ самосопряженный, то $\operatorname{ind}U = \operatorname{ind}\sum\limits_{i=1}^{m}(T_i^*T^i + T^{i*}T_i) = \operatorname{ind}\mathcal{L} + \operatorname{ind}G = 0$ и утверждения а), б), в) эквивалентны. Далее в силу тождества $[\mathcal{L}(G - Y\mathrm{q}^{-1}\Psi), \ell(G - Y\mathrm{q}^{-1}\Psi)] = [U, 0]$ и равенства $\operatorname{ind}[\mathcal{L}(G - Yq^{-1}\Psi), \ell(G - Yq^{-1}\Psi)] = \operatorname{ind}[\mathcal{L},\ell] - n = \operatorname{ind}[U,0] = -k$ фредгольмовость оператора U эквивалентна нетеровости задачи $[\mathcal{L},\ell]$. Для разрешимости задачи (2.6) необходимо и достаточно, чтобы все решения однородного уравнения $U\eta = 0$ были ортогональны $f - \mathcal{L}Yq^{-1}c$ ([12], с. 230). $\square$

Следствие 1. Если задача Эйлера (2.6) фредгольмова, то $n = k$.

Следствие 2. Если задача Эйлера (2.6) нетерова, то следующие утверждения эквивалентны:

а) однородная задача Эйлера (2.6) имеет только тривиальное решение;

б) задача Эйлера (2.6) однозначно разрешима при любых $(g, c) \in \mathbf{L}_2[a, b] \times \mathbf{R}^k$;

в) размерность ядра оператора $\mathcal{L}$ равна k;

г) размерность ядра оператора Якоби U равна $k - n$.

Замечание 1. Если задача Эйлера (2.5) нетерова и задача (2.4) однозначно разрешима при любых $(g, c) \in \mathbf{L}_2[a, b] \times \mathbf{R}^k$, то вариационная задача с дополнительными ограничениями

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{m}(T_i x)(t)(T^i x)(t) + g(t)(T_0 x)(t)\right) dt \longrightarrow \min, \quad \ell_j x = c_j, \quad j = \overline{1, l},$$

где $l \geq k$ и функционалы ℓ_j линейно независимы, также однозначно разрешима при любых $(g, c) \in \mathbf{L}_2[a, b] \times \mathbf{R}^n$.

Замечание 2. Если оператор $\sum\limits_{i=1}^{m}(T_i^*T^i + {T^i}^*T_i)$ положительно определен, то оператор U также положительно определен.

Замечание 3. Спектры (кроме, быть может, точки 0) операторов U и $(G - Yq^{-1}\Psi)\mathcal{L}$ совпадают.

Пример 5. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{W}_2^{(1)}[a, b]$ задачу

$$\begin{gathered}\int_a^b \left(\dot{x}^2(t) - r(t)\dot{x}(t)\dot{x}[g(t)] - p(t)x[h(t)]\right) dt \longrightarrow \min, \\ x(a) = \alpha, \quad x(\xi) = 0, \quad \dot{x}(\xi) = 0, \quad \text{если } \xi \notin (a, b),\end{gathered} \tag{2.7}$$

где $p \in \mathbf{L}_2[a,b]$, функции $h, g, r : [a,b] \to \mathbf{R}$ измеримы по Лебегу, причем оператор внутренней суперпозиции

$$(Sz)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} r(t)z[g(t)], & \text{если } g(t) \in [a,b]; \\ 0, & \text{если } g(t) \notin [a,b], \end{cases}$$

ограничен в пространстве $\mathbf{L}_2[a,b]$. Для этого достаточно, чтобы [13]

$$\|S\| = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} \left(|r(t)| \lim_{\substack{\mathrm{mes}(e)\to 0 \\ t\in e\subset[a,b]}} \left(\frac{\mathrm{mes}\, q^{-1}(e) \cap [a,b])}{\mathrm{mes}(e)} \right)^{1/2} \right) < \infty.$$

Обозначив

$$(Tx)(t) = \begin{cases} p(t)x[h(t)], & \text{если } h(t) \in [a,b]; \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [a,b], \end{cases}$$

запишем задачу (2.7) в виде

$$\int_a^b (\dot{x}^2(t) - \dot{x}(t)(S\dot{x})(t) - (Tx)(t))\, dt \longrightarrow \min, \quad x(a) = \alpha.$$

Полагая $x(t) = \alpha + \int\limits_a^t z(s)\, ds$ и применяя теорему 3, получим уравнение Эйлера этой задачи в виде

$$2\dot{x}(t) - ((S + S^*)\dot{x})(t) = \int_a^b K(s,t)p(s)\, ds,$$

где $(S^*\dot{x})(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_a^b R(s,t)r(s)\dot{x}(s)\, ds$, $R(t,s) = \begin{cases} 1, & g(t) \in [a,s]; \\ 0, & g(t) \notin [a,s], \end{cases}$ $K(t,s) = \begin{cases} 1, & h(t) \in [s,b]; \\ 0, & h(t) \notin [s,b], \end{cases}$ а оператор Якоби равен $(Uz)(t) = 2(z(t) - \frac{((S+S^*)z)(t)}{2})$.

Достаточным условием сильной положительной определенности оператора U является условие $\|S\| < 1$. Для постоянного отклонения $g(t) = t - \tau$ оно принимает вид $\operatorname*{vrai\,sup}_{t-\tau\in[a,b]} |r(t)| < 1$. Однако в этом случае, используя представление сопряженного оператора

$$(S^*z)(t) = \begin{cases} r(t+\tau)z(t), & \text{если } t+\tau \in [a,b]; \\ 0, & \text{если } t+\tau \notin [a,b], \end{cases}$$

можно получать точные условия сильной положительной определенности оператора U. В частности, если $\tau = \frac{b-a}{3}$, то $U \succ 0$ тогда и только тогда, когда точная верхняя граница существенных значений функции $r^2(t) + r^2(t+\tau)$ на промежутке $[a+\tau, b-\tau]$ меньше 4. Для постоянной функции r этот критерий имеет вид: если κ — такое наименьшее целое, что $\frac{b-a}{\tau} < \kappa$, то $U \succ 0 \Longleftrightarrow |r| \cos(\frac{\pi}{1+\kappa}) \le 1$.

Из разрешимости задачи (2.7) следует разрешимость задачи

$$\begin{gathered} \int_a^b (\dot{x}^2(t) - r(t)\dot{x}(t)\dot{x}[g(t)] - p(t)x[h(t)])\, dt \longrightarrow \min, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \text{ если } \xi \notin (a,b), \end{gathered} \tag{2.8}$$

где функции φ, $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывны и ограничены на всей оси. Оператор Якоби U_0 задачи (2.8) представим в виде $U_0 = P^*UP$, где $P\eta = \eta(t) - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \eta(s)\, ds$. Если оператор U строго положительно определен, то оператор U_0 фредгольмов, причем $\dim\ker U_0 = 1$, и задача (2.8) однозначно разрешима. Условие $\|PS\| < 1$ также гарантирует однозначную разрешимость задачи (2.8). Отметим, что в работе [2] была установлена в случае $\tau = 1$, $r = 1$ разрешимость задачи вида (2.8) на промежутке $[0,3]$.

3. Пространство решений вариационных задач

Если задача (2.1) в пространстве $\mathbf{W}$ не имеет решений, т.к. функционал не ограничен снизу, то он остается неограниченным и в любом расширении этого пространства. Однако, если функционал ограничен, т.е. оператор U положительно определен, но минимум в пространстве $\mathbf{W}$ не достигается, т.е. соответствующая задача Эйлера не разрешима, то минимум может достигаться в более широком пространстве.

Пример 6. Вариационная задача

$$\int_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt + \int_1^2 (x(t)-1)^2 dt \longrightarrow \min, \quad x(0)=0,$$

в пространстве $\mathbf{W}_2^{(1)}[0,2]$ не имеет решений, т.к. задача Эйлера

$$\dot{x}(t)=0, \text{ если } t\in[0,1], \quad x(0)=0;$$

$$\int_t^2 x(t)\,dt + (t-2)(1+x(0)) = 0, \text{ если } t\in[1,2],$$

в этом пространстве неразрешима; при этом функционал задачи, очевидно, ограничен снизу. Однако в пространстве $\mathbf{W}_2^{(1)}[0,1]\times\mathbf{W}_2^{(1)}[1,2]$ абсолютно непрерывных функций с разрывом в точке 1 эта вариационная задача имеет единственное решение

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\in[0,1];\\ 1, & \text{если } t\in[1,2].\end{cases}$$

Относительная свобода в выборе пространства решений вариационной задачи может привести к неожиданным последствиям. Некоторые возможные эффекты иллюстрирует

Пример 7. Рассмотрим стандартную задачу вариационного исчисления

$$\int_a^b \left((\dot{x}^2(t) - 2g(t)\dot{x}(t) - 2x(t)\right) dt \longrightarrow \min, \quad x(a)=0, \ \ x(b)=0, \tag{3.1}$$

где $g\in\mathbf{L}_2[a,b]$.

Классическое решение задачи принадлежит пространству непрерывно дифференцируемых функций. Для этого функция g также должна быть непрерывно дифференцируемой. Уравнение Эйлера, полученное методом вариации, имеет вид $-2(\ddot{x}(t)-\dot{g}(t)+1)=0$. Так как условия Якоби и Лежандра здесь выполнены, то задача (3.1) имеет в точке $x(t)=\int\limits_a^t g(t)\,dt - \frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b g(t)\,dt + \frac{(b-t)(t-a)}{2}$ сильный минимум. Найдем еще три решения задачи (3.1).

1. Будем искать решение в пространстве $\mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$. Используя подстановку $x(t)=\int\limits_a^t z(s)\,ds - \frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b z(s)\,ds$, получим, что решение задачи Эйлера

$$\dot{x}(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \dot{x}(s)\,ds - g(t) + \frac{1}{b-a}g(s)\,ds + t - \frac{a+b}{2} = 0, \quad x(a)=0, \ \ x(b)=0$$

равно $x(t)=\int\limits_a^t g(s)\,ds - \frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b g(s)\,ds + \frac{(b-t)(t-a)}{2}$, а оператор Якоби $(Uz)(t)=z(t)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b z(s)\,ds$ положительно определен. Следовательно, задача (4.2) имеет единственное решение, и минимум функционала равен $-\int\limits_a^b \left(g(t)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(s)\,ds - t + \frac{a+b}{2}\right)^2 dt$.

2. Рассмотрим теперь задачу (3.1) в пространстве функций $\mathbf{W}_2^{(1)}[a,\tau]\times\mathbf{W}_1^{(1)}[\tau,b]$ с разрывом в фиксированной точке $\tau\in(a,b)$. Полагая $x(t)=\int\limits_a^t z(s)\,ds-\chi_\tau(t)\int\limits_a^b z(s)\,ds$, где

$$\chi_\tau(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t<\tau;\\ 1, & \text{если } t\ge\tau,\end{cases}$$

имеем $U=I$, а решение задачи Эйлера

$$\dot{x}(t)-g(t)+t-\tau=0,\quad x(a)=0,\quad x(b)=0$$

в пространстве $\mathbf{W}_2^{(1)}[a,\tau]\times\mathbf{W}_1^{(1)}[\tau,b]$ равно

$$x(t)=\int_a^t g(t)\,dt-\chi_\tau(t)\int_a^b g(t)\,dt+\frac{(2\tau-t-a)(t-a)}{2}-\chi_\tau(t)\frac{(2\tau-b-a)(b-a)}{2}.$$

Следовательно, минимум функционала равен $-\int\limits_a^b(g(t)-t+\tau)^2\,dt$. Как видно, здесь решение вариационной задачи зависит от точки разрыва τ, т. е. от выбора пространства $\mathbf{W}$. В случае $\tau=\frac{1}{2}(b+a)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(s)\,ds$ это решение не имеет точки разрыва и принадлежит пространству $\mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$.

3. В отличие от предыдущего случая рассмотрим теперь задачу (3.1) в пространстве $\mathbf{W}_2^{(2)}[a,b]$, более узком, чем $\mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$. Полагая

$$x(t)=-\int_a^t\frac{(b-t)(s-a)}{b-a}z(s)\,ds-\int_t^b\frac{(b-s)(t-a)}{b-a}z(s)\,ds$$

(это общее решение краевой задачи $\ddot{x}(t)=z(t)$, $x(a)=0$, $x(b)=0$), получим, что задача Эйлера имеет вид

$$\int_a^b K(t,s)\big(\dot{x}(s)-g(s)\big)\,ds+\frac{1}{2}(b-t)(t-a)=0,\quad x(a)=0,\ \ x(b)=0,$$

$$K(t,s)=\begin{cases}-\dfrac{b-t}{b-a}, & \text{если } s\le t;\\[2mm] \dfrac{t-a}{b-a}, & \text{если } s>t,\end{cases}$$

а оператор Якоби U равен $(Uz)(t)=\frac{t-a}{b-a}\int_t^b(b-s)z(s)\,ds+\frac{b-t}{b-a}\int_a^t(s-a)z(s)\,ds$. В этом случае уравнение Эйлера получилось интегро-дифференциальным, а оператор U интегральным и вполне непрерывным.

Отметим, что в первой и второй ситуациях оператор Якоби был фредгольмов. Оператор U положительно определенный, т. к. точки его спектра $\frac{1}{k^2}\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$, $k=1,\dots$, неотрицательны. При этом решение задачи Эйлера существует в пространстве $\mathbf{W}_2^{(2)}[a,b]$ только при условии, что функция $g\in\mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$ абсолютно непрерывна.

Литература

1. Каменский Г.А. *Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т.6. – № 8. – С. 1349–1358.
2. Каменский Г.А. Скубачевский А.Л. *Экстремумы функционалов с отклоняющимися аргументами.* – М.: Изд-во МАИ, 1979. – 54 с.
3. Драхлин М.Е., Макагонова М.А. *Функционально–дифференциальные уравнения Эйлера* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1987. – С. 12–18.

4. Драхлин М.Е. *К вопросу о необходимом условии экстремума функционала* // Краев. задачи. — Пермь, 1990. – С. 196–200.
5. Груздев А.А., Гусаренко С.А. *О редукции вариационных задач к экстремальным задачам без ограничений* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 39–50.
6. Груздев А.А. *О редукции экстремальных задач к линейным уравнениям в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 36–42.
7. Азбелев Н.В. *Современное состояние и тенденции развития теории функционально-дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 8–19.
8. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. *Theory of linear abstract functional differential equations and applications* // Mem. on different. equat. and math. physics. – Tbilisi, 1996. – V. 8. – P. 1–102.
9. Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1988. – 304 с.
10. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально–дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974. – 479 с.
12. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 495 с.
13. Драхлин М.Е. *Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 5. – С. 18–24.

Пермский государственный университет

Поступила
03.03.1998