ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.54

Я. ГОДУЛЯ, В.В. СТАРКОВ

К ТЕОРЕМЕ РЕГУЛЯРНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ В ПОЛИКРУГЕ

В [1] были введены и изучались линейно-инвариантные семейства аналитических в круге $\Delta = \{z \in \mathcal{C},\ |z| < 1\}$ функций. В [2], [3] была получена теорема регулярности для таких семейств. В [4] понятие линейно-инвариантного семейства было перенесено на аналитические в поликруге $\Delta^m \subset \mathcal{C}^m$, $m \geq 1$, функции. Основной целью данной работы является перенос некоторых результатов из [3] на случай поликруга.

Обозначим $\mathbb{T} = \partial\Delta$, $\mathbb{T}^m$ — остов поликруга Δ^m. Будем рассматривать аналитические в Δ^m функции $f : \Delta^m \longrightarrow \mathcal{C}$. Для $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{C}^m$ определим норму

$$\|z\| = \max_{1 \leq j \leq m} |z_j|.$$

Пусть $\mathcal{O} = (0, \dots, 0) \in \mathcal{C}^m$. Для $a = (a_1, \dots, a_m) \in \Delta^m$ обозначим $\phi_a(z) = (\phi_1(z_1), \dots, \phi_m(z_m))$, где $\phi_j(z_j) = \dfrac{z_j + a_j}{1 + \overline{a_j} z_j}$, $j = 1, \dots, m$, — автоморфизм Δ^m на Δ^m.

Определение 1 ([4]). Пусть $l = 1, \dots, m$ фиксировано. Семейство $\mathfrak{M}_l$ аналитических в Δ^m функций $f(z)$ называется l-линейно-инвариантным семейством, если

1) $f(\mathcal{O}) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\mathcal{O}) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(z) \neq 0$, для $z \in \Delta^m$,

2) $f(ze^{i\theta})e^{-i\theta_l} \in \mathfrak{M}_l$ для любых $f \in \mathfrak{M}_l$ и $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$, где $ze^{i\theta} = (z_1 e^{i\theta_1}, \dots, z_m e^{i\theta_m})$,

3)
$$f(a, z) = \frac{f(\phi_a(z)) - f(\phi_a(\mathcal{O}))}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(a)(1 - |a_l|^2)} \in \mathfrak{M}_l$$

для любых $f \in \mathfrak{M}_l$ и $a = (a_1, \dots, a_m) \in \Delta^m$.

Обозначим
$$\frac{\partial f}{\partial z_l}(z) = 1 + c_1(f) z_1 + \dots + c_m(f) z_m + o(\|z\|).$$

Определение 2 ([4]). Если f удовлетворяет условию 1) определения 1, то порядком функции f называется число

$$\operatorname{ord} f = \sup_{a \in \Delta^m} \frac{1}{2} \left\| \nabla \frac{\partial f(a, \mathcal{O})}{\partial z_l} \right\| = \frac{1}{2} \sup_{a \in \Delta^m} \|(c_1(f(a,z)), \dots, c_m(f(a,z)))\|.$$

Порядком линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}_l$ назовем число

$$\operatorname{ord} \mathfrak{M}_l = \sup_{f \in \mathfrak{M}_l} \operatorname{ord} f.$$

Определение 3 ([4]). Универсальным l-линейно-инвариантным семейством $\mathcal{U}_\alpha^l$ порядка α назовем объединение всех l-линейно-инвариантных семейств $\mathfrak{M}_l$, для которых $\operatorname{ord}\mathfrak{M}_l \le \alpha$.

При $m = 1$ семейства $\mathcal{U}_\alpha^l$ — классические универсальные линейно-инвариантные семейства $\mathcal{U}_\alpha$ аналитических в Δ функций, введенные в [1].

Важным моментом при изучении аналитических в Δ^m функций является вопрос о поведении таких функций при приближении z к остову $\mathbb{T}^m$. В ряде классов аналитических в Δ функций известна теорема регулярности роста модуля функции при радиальном приближении z к $\mathbb{T}$. В [5] аналогичная теорема получена в $\mathcal{U}_\alpha^l$.

Обозначим $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{r}e^{i\theta} = (r_1e^{i\theta_1}, \dots, r_me^{i\theta_m})$, $\mathbb{I}^- = (1^-, \dots, 1^-)$; для аналитической в Δ^m функции $p(z)$ обозначим $M(r,p) = \max\limits_{\|z\| \le r} |p(z)|$ и пусть для $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$

$$\Phi_\theta(\mathbf{r}) = \left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\theta})\right| \prod_{k=1}^m \left(\frac{1-r_k}{1+r_k}\right)^\alpha (1-r_l^2).$$

Теорема A (**теорема регулярности**) [5]. 1) *Для любой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$ и любого фиксированного θ величины $\Phi_\theta(\mathbf{r})$ и $\max\limits_{\theta\in\mathbb{R}^m} \Phi_\theta(\mathbf{r})$ — убывающие функции по каждой переменной $r_k \in (0,1)$, $k = 1, \dots, m$. Величина*

$$M\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right)\frac{(1-r)^{\alpha m+1}}{(1+r)^{\alpha m-1}}$$

убывает по $r \in (0,1)$.

2) *Существуют такие $\delta_0 \in [0,1]$ и $\theta^0 \in [0,2\pi)^m$, что для каждого $k = 1, \dots, m$*

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \lim_{r\to 1^-}\left[M\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right)\frac{(1-r)^{\alpha m+1}}{(1+r)^{\alpha m-1}}\right] = \lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\max_\theta \Phi_\theta(\mathbf{r}) = \\ &= \lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\Phi_{\theta^0}(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\left[\max_\theta\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z_l \partial z_k}(z)\right|\frac{(1-r_k^2)(1-r_l^2)}{2(\alpha+\delta_k^l r_k)}\prod_{j=1}^m\left(\frac{1-r_j}{1+r_j}\right)^\alpha\right] = \\ &= \lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\int_0^{r_k}\max_\theta\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z_l\partial z_k}(r_1e^{i\theta_1}, \dots, se^{i\theta_k}, \dots r_me^{i\theta_m})\right| ds \prod_{j=1}^m\left(\frac{1-r_j}{1+r_j}\right)^\alpha (1-r_l^2),\end{aligned}$$

где δ_k^l — символы Кронекера.

3) $\delta_0 = 1 \Longleftrightarrow$

$$f_\theta(z) = \frac{e^{i\theta_l}}{2\alpha}\left[\prod_{k=1}^m\left(\frac{1+z_ke^{-i\theta_k}}{1-z_ke^{-i\theta_k}}\right)^\alpha - 1\right] + Q(z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_m),$$

где Q — любая аналитическая в Δ^{m-1} функция, $Q(\mathcal{O}) = 0$.

Далее будем придерживаться принятых в теореме A обозначений. Вектор θ^0 из теоремы A называется *направлением максимального роста* (н. м. р.) функции f, а число δ_0 — *числом Хеймана* функции f. Множество функций из $\mathcal{U}_\alpha^l$, которым соответствует фиксированное число Хеймана δ, обозначим $\mathcal{U}_\alpha^l(\delta)$. Вектор $\theta \in [0,2\pi)^m$ будем называть *направлением интенсивного роста* (н. и. р.) функции $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$, если $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathcal{I}^-}\Phi_\theta(\mathbf{r}) = \delta_\theta > 0$; при этом $\delta_\theta \in (0,1]$ будем называть *числом Хеймана, соответствующим н. и. р. θ.*

Если $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$, то существует бесконечное множество функций

$$\Psi(z) = \int_0^{z_l}\frac{\partial f}{\partial z_l}(z_1, \dots, z_{l-1}, s, z_{l+1}, \dots, z_m)\, ds + Q(z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_m) \qquad (1)$$

из $\mathcal{U}_\alpha^l$ (здесь Q — аналитическая в Δ^{m-1} функция, $Q(\mathcal{O}) = 0$). Из всех этих функций рассмотрим одну:

$$F(z) = \int_0^{z_l}\frac{\partial f}{\partial z_l}(z_1, \dots, z_{l-1}, s, z_{l+1}, \dots, z_m)\, ds.$$

Для нее имеет место следующий многомерный аналог теоремы регулярности из [3], дополняющий теорему А.

Теорема 1. *Если* $f \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$ *и* θ *— н. м. р. функции* f*, то существуют пределы*

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\Big[\int_0^{r_l}\Big|\frac{\partial f}{\partial z_l}(r_1e^{i\theta_1},\dots,r_{l-1}e^{i\theta_{l-1}},\rho e^{i\theta_l},r_{l+1}e^{i\theta_{l+1}},\dots)\Big|\,d\rho\cdot 2\alpha\prod_{k=1}^m(\frac{1-r_k}{1+r_k})^\alpha\Big]=$$

$$=\lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\Big[\int_0^{r_l}\max_{\phi\in\mathbb{R}^m}\Big|\frac{\partial f}{\partial z_l}(r_1e^{i\phi_1},\dots,r_{l-1}e^{i\phi_{l-1}},\rho e^{i\phi_l},r_{l+1}e^{i\phi_{l+1}},\dots,r_me^{i\phi_m})\Big|\,d\rho\prod_{k=1}^m\Big(\frac{1-r_k}{1+r_k}\Big)^\alpha\Big]=$$

$$=\lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\Big[\max_{\phi\in\mathbb{R}^m}|F(\mathbf{r}e^{i\phi})|2\alpha\prod_{k=1}^m\Big(\frac{1-r_k}{1+r_k}\Big)^\alpha\Big]=\lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\Big[|F(\mathbf{r}e^{i\theta})|2\alpha\prod_{k=1}^m\Big(\frac{1-r_k}{1+r_k}\Big)^\alpha\Big].$$

Заметим, что теорема 1 не будет верна, если вместо функции F писать произвольную функцию Ψ из (1), т. к. функция Q может расти как угодно быстро при приближении z к $\mathbb{T}^m$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$, $\delta_0>0$, *и пусть* $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$ *— одно из н. и. р. функции* f*, которому соответствует число Хеймана* $\delta\in(0,\delta_0]$*. Обозначим* $\Phi(\zeta)=\arg\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})$*, где* $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_m)$, $\rho_k=\rho_k(\zeta_k)=\sqrt{\dfrac{(1-r_0^2)^2}{4r_0^4c_k^2}-\dfrac{1}{r_0^2}}-\dfrac{1}{2c_k}\Big(1-\dfrac{1}{r_0^2}\Big)$, $c_k=\mathrm{Re}\,\{\zeta_ke^{-i\gamma_k}\}-\mathrm{tg}\,\eta|\mathrm{Im}\,\{\zeta_ke^{-i\gamma_k}\}|$, $k=1,\dots,m$, $r_0=\sin\eta$*. Тогда для любого* $n=0,1,2,\dots$*, любых натуральных* $k_1,\dots,k_n\in[1,m]$ *и любого фиксированного* $\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\Big(\frac{\partial^{n+1}f(\zeta)}{\partial z_l\partial z_{k_1}\cdots\partial z_{k_n}}\Big/\frac{\partial^{n+1}f_\gamma(\zeta)}{\partial z_l\partial z_{k_1}\cdots\partial z_{k_n}}\Big)e^{-i\Phi(\zeta)}\to\delta$$

равномерно в угловой области $\Delta^m(R,\eta)=\{\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_m)\in\Delta^m: |\arg(1-\zeta_ke^{-i\gamma_k})|<\eta$*, для всех* k*,* $R<\|\zeta\|<1\}$ *при* $R\to1^-$.

С помощью теоремы 2 можно получить следующее утверждение о радиальных пределах функции $f\in\mathcal{U}_\alpha^l$ по ее направлениям интенсивного роста.

Теорема 3. *Пусть* $f\in\mathcal{U}_\alpha^l$*,* γ *— н. и. р.* f *и* δ_γ *— соответствующее число Хеймана. Тогда для любых целых неотрицательных* $q_1,\dots,q_m$ *при* $n=q_1+\dots+q_m$ *существует*

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\Big[\Big|\frac{\partial^{n+1}f(\mathbf{r}e^{i\gamma})}{\partial z_l\partial z_1^{q_1}\cdots\partial z_m^{q_m}}\Big|(1-r_l)\prod_{k=1}^m(1-r_k)^{\alpha+q_k}\Big]=$$

$$=\delta\lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\Big[\frac{\partial^{n+1}g(\mathbf{r})}{\partial r_l\partial r_1^{q_1}\dots\partial r_m^{q_m}}(1-r_l)\prod_{k=1}^m(1-r_k)^{\alpha+q_k}\Big]=$$

$$=\delta2^{\alpha m-1}\Big(1+\frac{q_l}{\alpha}\Big)\prod_{k=1}^m[\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+q_k-1)],$$

где $g(\mathbf{r})=\dfrac{1}{2\alpha}\displaystyle\prod_{k=1}^m\Big(\frac{1+r_k}{1-r_k}\Big)^\alpha$*. Если* $q_j=0$ *при некотором* j*, то соответствующая квадратная скобка в последнем произведении считается равной* 1.

Естественно поставить вопрос: *как велико может быть множество н. и. р. для данной функции* $f\in\mathcal{U}_\alpha^l$? Из теоремы единственности Привалова следует, что мера этого множества на $\mathbb{T}^m$ равна нулю. Это множество может быть пустым (напр., для ограниченных функций из $\mathcal{U}_\alpha^l$). Для функции f_θ из теоремы А существует единственное н. и. р.

В случае $m=1$ в [6] для любого натурального $n\ge2$ приведены примеры функций $g_{n,\alpha}\in\mathcal{U}_\alpha$, $\alpha\ge\alpha_n$ и $g_{\infty,\alpha}\in\mathcal{U}_\alpha$, $\alpha\ge1+\dfrac{2}{e-1}$; здесь $\alpha_2=1.241\dots$, $\alpha_n=\dfrac{\sqrt{n^2e^2-(e+1)^2}+n}{\sqrt{n^2e^2-(e+1)^2}-n}$ при

$n \geq 3$. Причем у $g_{n,\alpha}$ существует ровно n н. и. р., у $g_{\infty,\alpha}$ — счетное множество н. и. р. То есть в случае $m = 1$ при $\alpha \geq \alpha_0$ существуют примеры функций из $\mathcal{U}_\alpha$ с любым не более чем счетным множеством н. и. р. Используя эти функции $g_{n,\alpha}$ и $g_{\infty,\alpha}$, легко построить в случае $m \geq 2$ примеры функций из $\mathcal{U}_\alpha^l$, имеющих любое не более чем счетное множество н. и. р.

Обозначим

$$G_*(z) = \prod_{k \neq l} \left(\frac{1 + z_k}{1 - z_k} \right)^\alpha (g_{*,\alpha}(z_l) + 1) - 1, \quad z \in \Delta^m,$$

где $*$ означает ∞ или любое натуральное $n \geq 2$. Покажем, что $G_* \in \mathcal{U}_\alpha^l$ при $\alpha \geq \alpha_*$ (используем прежние обозначения). Так как $G_*(\mathcal{O}) = 0$, $\dfrac{\partial G_*}{\partial z_l}(\mathcal{O}) = 1$, $\dfrac{\partial G_*}{\partial z_l}(z) \neq 0$ в Δ^m, то достаточно проверить, что $\operatorname{ord} G_* = \alpha$. Как показано в ([4], теорема 1.1)

$$\operatorname{ord} G_* = \max_{1 \leq k \leq m} \sup_{z \in \Delta^m} \left| \frac{\dfrac{\partial^2 G_*}{\partial z_l \partial z_k}(z)}{\dfrac{\partial G_*}{\partial z_l}(z)} \frac{1 - |z_k|^2}{2} - \overline{z_k} \delta_k^l \right|.$$

Для $k \neq l$

$$\sup_{z \in \Delta^m} \left| \frac{\dfrac{\partial^2 G_*}{\partial z_l \partial z_k}(z)}{\dfrac{\partial G_*}{\partial z_l}(z)} \frac{1 - |z_k|^2}{2} \right| = \sup_{z_k \in \Delta} \left| \alpha \frac{1 - |z_k|^2}{1 - z_k^2} \right| = \alpha;$$

$$\sup_{z \in \Delta^m} \left| \frac{\dfrac{\partial^2 G_*}{\partial z_l^2}(z)}{\dfrac{\partial G_*}{\partial z_l}(z)} \frac{1 - |z_l|^2}{2} - \overline{z_l} \right| = \sup_{z_l \in \Delta} \left| \frac{g''_{*,\alpha}(z_l)}{g'_{*,\alpha}(z_l)} - \overline{z_l} \right| = \alpha$$

при $\alpha \geq \alpha_*$ (см. [6]). Следовательно, $\operatorname{ord} G_* = \alpha$. Остается заметить, что если $\widetilde{\gamma}$ — н. и. р. функции $g_{*,\alpha}$, то вектор $(0, \ldots, \widetilde{\gamma}, \ldots, 0)$ (здесь $\widetilde{\gamma}$ — l-я координата) — н. и. р. функции G_*. То есть G_* имеет столько же н. и. р., сколько и $g_{*,\alpha}$.

В заключение приведем теорему, устанавливающую связь между классами $\mathcal{U}_\alpha^l(\delta)$ при различных δ.

Теорема 4. *Для любой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$, $\delta_0 \in [0, 1]$, и произвольной функции $\delta^\star(\lambda)$ $(\lambda \in (0, 1))$ со значениями в $[0, \delta_0]$ существует такое семейство функций $\psi_\lambda \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta^\star(\lambda))$, $\lambda \in (0, 1)$, что $\dfrac{\partial \psi_\lambda}{\partial z_l}(z) \to \dfrac{\partial f}{\partial z_l}(z)$ равномерно внутри Δ^m при $\lambda \to +0$.*

При $\delta^\star(\lambda) \equiv \delta \in [0, \delta_0]$ из теоремы 4 получим

Следствие. Для любой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$, $\delta_0 \in [0, 1]$, и любого $\delta \in [0, \delta_0]$ существует такое семейство функций $\psi_\lambda \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta)$, $\lambda \in (0, 1)$, что $\dfrac{\partial \psi_\lambda}{\partial z_l}(z) \to \dfrac{\partial f}{\partial z_l}(z)$ при $\lambda \to 0$ равномерно внутри Δ^m.

Можно доказать, что указанного в теореме 4 семейства ψ_λ не существует, если $\delta > \delta_0$.

Литература

1. Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.* I // Math. Ann. – 1964. – Bd. 155. – S. 108–154.
2. Campbell D.M. *Applications and proof of a uniqueness theorem for linear invariant families of finite order* // Rocky Mountain J. Math. – 1974. – V. 4.4. – P. 621–634.

3. Старков В.В. *Теоремы регулярности для универсальных линейно-инвариантных семейств функций* // Болг. матем. журн. СЕРДИКА. – 1985. – Т. 11. – С. 299–318.
4. Godula J., Starkov V.V. *Möbius invariant families of functions holomorphic in the unit polydisc* // Banach Center Publ. – 1996. – V. 40. – P. 117–130.
5. Годуля Я., Старков В.В. *Теорема регулярности для линейно-инвариантных семейств функций в поликруге* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 8. – С. 21–33.
6. Starkov V.V. *Directions of intensive growth of locally univalent functions* // Complex anal. and appl. Sofia. – 1987. – C. 517–522.

Люблинский университет (*Польша*)
Петрозаводский государственный университет

Поступили
полный текст 26.06.1997
краткое сообщение 28.11.1997