ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 519.6

Б.Ф. МЕЛЬНИКОВ

ОПИСАНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОДМОНОИДОВ ГЛОБАЛЬНОГО НАДМОНОИДА СВОБОДНОГО МОНОИДА

1. Введение

Алгебраические проблемы, рассматриваемые в данной статье, возникли при решении некоторых задач теории формальных языков (см. предыдущие работы автора [1]–[3]). В этих работах были описаны подклассы класса контекстно-свободных языков с разрешимой проблемой эквивалентности. Однако не только для описания специальных подклассов класса КС-языков могут быть применены результаты данной статьи. Связанные с этой тематикой вопросы рассматривались, например, в [4]–[6] — эти статьи можно объединить общим названием “Алгебраические вопросы теории недетерминированных конечных автоматов”. Здесь обобщаются предыдущие работы автора, посвященные этой теме.

В данной статье рассматривается супермоноид (глобальный надмоноид) свободного моноида, имеющего, вообще говоря, бесконечное число образующих, т. е. множество языков над заданным алфавитом Σ, вообще говоря, бесконечным. Это допущение (о бесконечности рассматриваемого алфавита) отличает материал этой статьи от большинства работ по теории формальных языков, где предполагается, что все используемые алфавиты конечны. Необходимость рассмотрения бесконечного алфавита при описании подклассов класса КС-языков (языков над “обычным” конечным алфавитом) с разрешимой проблемой эквивалентности была обоснована в [2]. Кратко эту необходимость можно сформулировать так: мы должны специальным образом описать многие КС-языки как морфизмы скобочных языков над бесконечным алфавитом (в [2], [3] были рассмотрены и другие возможности).

В данной статье используются обозначения, стандартные в теории формальных языков, а также некоторые обозначения из работ [1], [2].

А именно, множество префиксов слова $v \in \Sigma^*$ обозначим $\mathrm{pref}(v)$, а собственных префиксов — $\mathrm{opref}(v)$. Префиксы ω-слов будем обозначать так же. Если язык $A \in \Sigma^*$ обладает свойством префикса (т. е. ни одно слово этого языка не является собственным префиксом какого-либо другого слова этого языка), то будем писать $\mathrm{Pr}(A)$.

2. Кратко о супермоноидах

Автору не встречались работы, где бы подробно исследовались свойства супермоноидов свободных моноидов.[1] В данной статье дается описание некоторых из таких свойств.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-15-99253).

[1]На это предложение можно было бы привести следующее возражение: любой элемент супермоноида есть язык, поэтому любое исследование множеств (*классов*) языков и есть исследование свойств супермоноидов. Однако в данном случае имеются в виду *алгебраические* свойства супермоноидов свободных моноидов.

Далее для простоты исключим из рассмотрения нуль супермоноида (т. е. язык $\emptyset$).[1] Очевидно, полученный таким образом объект — *далее будем именно его называть супермоноидом* — также является моноидом.

Утверждение 2.1. *Супермоноид не является свободным моноидом.*[2]

Доказательство. Согласно, например, ([8], § 6.6 или [9], гл. IV, § 2), достаточно привести пример двух элементов супермоноида (т. е. языков) A и B таких, что

$$A \neq B, \quad \text{но} \quad A^2 = B^2. \tag{1}$$

Для произвольного алфавита Σ такими языками являются, например,

$$A = \bigcup_{0 \le i \le 4} \Sigma^i \quad \text{и} \quad B = \bigcup_{0 \le i \le 4} \Sigma^i. \tag{2}$$

Равенства

$$A^2 = B^2 = \bigcup_{0 \le i \le 8} \Sigma^i$$

при этом проверяются непосредственно. □

Этим доказана и неоднозначность операции извлечения корня в супермоноидах свободных моноидов.[3] Примеры, подобные (2), несложно построить и для корней произвольных степеней.

Автор не занимался поисками "более простых" примеров выполнения условия (1). Было бы интересно построить пример двух языков, содержащих вместе менее 9 слов (9 слов получаются согласно (2) в случае однобуквенного алфавита), для которых выполнялось бы условие (1). Может быть, при $|\Sigma| \geq 2$ подобные примеры существуют. Отметим также, что возможны и другие методы доказательства несвободности супермоноида, отличные от построения примеров к (1).

Утверждение 2.2. *Если у исходного свободного моноида конечное число образующих, то мощность множества элементов супермоноида есть континуум.*

Это утверждение очевидно. Отметим, что оно верно и в случае однобуквенного алфавита, т. е. когда у свободного моноида ровно один образующий элемент. Заметим также, что у любого бесконечного моноида (каковым всегда является супермоноид свободного моноида, а также большинство моноидов, рассмотренных далее) множество всех элементов равномощно множеству атомов, своему собственному подмножеству, поскольку можно полагать, что множество элементов есть множество *конечных последовательностей*, все элементы которых суть атомы. Особенно важен данный факт для тех из описанных далее собственных подмоноидов супермоноида, которые в отличие от глобального надмоноида сами являются свободными моноидами, например, в связи со сформулированными в следующем абзаце алгоритмическими проблемами.

Для супермоноида, а также *для каждого* из рассматриваемых ниже его подмоноидов[4] возникают задачи определения, является ли атомом некоторый (заданный) его элемент.[5]

[1] Слова "для простоты" были употреблены здесь в соответствии с пожеланиями ([7], с. 31): при рассмотрении супермоноида с нулем усложняются только формулировки некоторых фактов, но не их доказательства.

[2] При супермоноиде с нулевым элементом утверждение очевидно. Далее исключение нуля специально не оговаривается.

[3] Об использовании таких корней в задачах теории формальных языков см. в ([10], с. 58).

[4] В сносках этого раздела будем употреблять некоторые термины, которые строго определим далее.

[5] В некоторых подмоноидах супермоноида могут быть интересны и задачи *описания* множества его атомов, если это возможно сделать каким-либо нетривиальным способом, т. е. отличным от $\{A \in \mathcal{M} \mid (\forall B, C \in (\mathcal{M} \setminus \{e\}))\ (A \neq BC)\}$; здесь $\mathcal{M}$ – множество элементов рассматриваемого моноида. Несложно, например, доказать, что в случае однобуквенного алфавита множество атомов супермоноида в точности совпадает с множеством языков, содержащих однобуквенное слово.

По-видимому, эффективные алгоритмы, дающие ответы на эти вопросы, были бы интересны для теории формальных языков.[1] Задачи построения таких алгоритмов автором пока не рассматривались, связанные проблемы см. в [12], [13].

3. Некоторые надмоноиды свободного моноида как подмоноиды супермоноида

Сформулируем 4 вида ограничений на элементы супермоноида (определения 3.1–3.3). Эти ограничения уже были ранее применены автором в различных задачах теории формальных языков (см. подробнее раздел 7).

Определение 3.1. Если язык L обладает свойством

$$(\exists k \in \mathbb{N})\ (\forall u \in L)\ (|u| < k),$$

то он называется *ограниченным.*

Любой конечный язык является ограниченным. А в случае конечного алфавита Σ верно и обратное утверждение: любой ограниченный язык является конечным.

Утверждение 3.1. *Если A и B — ограниченные языки, то AB — также ограниченный язык.*

Утверждение 3.2. *Если A и B — префиксные языки, то AB — также префиксный язык.*

Определение 3.2. Если язык L обладает свойством

$$(\forall \alpha \in \Sigma^\omega)\ (\exists u \in L)\ (u \in \mathrm{pref}(\alpha)),$$

то он называется *полным.*[2]

Отметим, что если $|\Sigma| = 1$ (пусть $\Sigma = \{a\}$), то существует только одно ω-слово a^ω и любой непустой язык является полным.

Утверждение 3.3. *Если A и B — полные языки, то AB — также полный язык.*

Доказательство. Выберем произвольное ω-слово $\alpha \in \Sigma^\omega$. Так как A — полный язык, по определению 3.2 выбираем некоторое слово $u \in A$ такое, что $u \in \mathrm{pref}(\alpha)$. Обозначим $\beta = \alpha|^u$ (т. е. $\alpha = u\beta$). Теперь аналогично рассмотрим полученное ω-слово β и полный язык B. Выберем некоторое слово $v \in B$ такое, что $v \in \mathrm{pref}(\beta)$. Из последнего

$$uv \in \mathrm{pref}(u\beta) \quad (\text{т. е. } \ uv \in \mathrm{pref}(\alpha)).$$

По построению $uv \in AB$. Таким образом, для произвольно выбранного $\alpha \in \Sigma^\omega$ указано некоторое слово языка AB, принадлежащее языку $\mathrm{pref}(\alpha)$. Отсюда по определению 3.2 получаем, что AB — полный язык. $\square$

Далее для некоторого заданного языка $L \subseteq \Sigma^*$ будем рассматривать ω-языки $\lim(L)$ и $\mathrm{adh}(L)$. Приведем их определения согласно [14] (см. также [15]):

$$\lim(L) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid (\forall k \in \mathbb{N})\ (\exists u \in L)\ (|u| > k,\ u \in \mathrm{pref}(\alpha))\},$$
$$\mathrm{adh}(L) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid (\forall w \in \mathrm{pref}(\alpha))\ (\exists x \in \Sigma^*)\ (wx \in L)\}.$$

[1] Рассуждения о близких по тематике задачах для префиксных подмоноидов приведены в ([11], гл. 8). Возможно, удастся найти связь подобных вопросов с материалом из ([10], § 4.5). А для каждого из непрефиксных подмоноидов, как будет показано ниже, любой из них не является свободным. Возникают задачи описания множеств определяющих соотношений, в том числе, поиска минимально возможных описаний.

[2] Другими словами $(\forall \alpha \in \Sigma^\omega)\ (L \cap \mathrm{pref}(\alpha) \neq \emptyset)$.

Несложно показывается, что $\lim(L) \subseteq \operatorname{adh}(L)$, но, вообще говоря, $\lim(L) \neq \operatorname{adh}(L)$. Простейшим примером к последнему неравенству является язык L, задаваемый регулярным выражением a^*b, для него $\lim(L) = \emptyset$, а $\operatorname{adh}(L) = \{a^\omega\}$. Отметим также, что для ω-языков $\lim(L)$ и $\operatorname{adh}(L)$ имеются альтернативные обозначения. Например, $\lim(L)$ можно обозначать $\overline{L}$ согласно [16] и L^δ — согласно [17].

Определение 3.3. Если язык L обладает свойством

$$(\forall\, \alpha \in \Sigma^\omega)\ \big((L \cap \operatorname{pref}(\alpha) \neq \emptyset) \ \text{ или } \ (\alpha \in \operatorname{adh}(L))\big), \tag{3}$$

то он называется *предполным*.

Как и для полных языков, при $|\Sigma| = 1$ любой непустой язык является предполным. Непосредственно из определений 3.2 и 3.3 следует, что множество полных языков является подмножеством множества предполных. При этом (в случае более чем однобуквенного исходного алфавита) данное подмножество собственное; простейшим подтверждающим этот факт примером, т. е. примером предполного, но не полного языка, является уже рассмотренный нами язык над алфавитом $\{a, b\}$, задаваемый регулярным выражением a^*b. Отметим также, что для ограниченных языков понятия "полный" и "предполный" совпадают — этот факт также следует из определений 3.2 и 3.3.

Утверждение 3.4. *Если A и B — предполные языки, то AB — также предполный язык.*

Доказательство. Выберем произвольное ω-слово $\alpha \in \Sigma^\omega$. Если для этого α выполнено первое из условий (3), то обозначим $\beta = \alpha|^u$, т. е. $\alpha = u\beta$. Из условия предполноты B получаем, что для построенного β

- либо $(\exists v \in B)$ $(v \in \operatorname{pref}(\beta))$, тогда $uv \in \operatorname{pref}(u\beta)$, т. е. некоторое слово uv из AB входит в $\operatorname{pref}(\alpha)$;
- либо $\beta \in \operatorname{adh}(B)$, тогда по определению adh получаем $\alpha = u\beta \in \operatorname{adh}(uB) \subseteq \operatorname{adh}(AB)$.

Если для выбранного α выполнено второе из условий (3), т. е. $\alpha \in \operatorname{adh}(A)$, то выполняется также $\alpha \in \operatorname{adh}(AB)$, т. к. $\operatorname{adh}(A) \subseteq \operatorname{adh}(AB)$.

Итак, во всех случаях определение 3.3 для ω-слова α и языка AB выполняется. □

Теорема 3.1. *Любой из двенадцати вариантов, получающихся при выполнении (невыполнении) каждого из следующих четырех ограничений:*

- *рассматриваются только ограниченные языки;*
- *рассматриваются только префиксные языки;*
- *рассматриваются только полные (предполные) языки,*

описывает множество элементов супермоноида (множество языков), которое образует моноид с операцией конкатенации и единицей $\{e\}$.

Доказательство непосредственно следует из утверждений 3.1–3.4.

Опишем связанную с данными моноидами принятую далее терминологию. Будем называть определенные подмоноиды супермоноида тоже *надмоноидами свободного моноида*, обязательно добавляя при этом названия их множеств языков,[1] например, *предполный надмоноид*, *ограниченный префиксный полный надмоноид* и т. п. Заметим, что ограниченный полный надмоноид является подмоноидом предполного надмоноида и т. п.

Префиксными надмоноидами будем называть определенные таким образом префиксный надмоноид и его подмоноиды: *префиксный предполный*, *ограниченный префиксный* и др.; аналогично, *ограниченные надмоноиды*, *префиксные предполные надмоноиды* и т. п.

[1] То есть заменяя название "глобальный", поскольку, как следует из вышеизложенного, ни глобальный надмоноид, ни какой-либо из вновь введенных объектов, надмоноидом свободного моноида не является.

Ниже будем называть *подмоноидами* только описанные *нами* подмоноиды супермоноида свободного моноида — это облегчит формулировки некоторых утверждений. Как и ранее, нуль супермоноида и его подмоноидов — язык $\emptyset$ — не рассматривается, элементом подмоноидов не считается.

Определим еще одну группу терминов. *"Непрефиксными"* будем называть те подмоноиды, в которых не наложено ограничение префиксности. Такое название условно, т. к. отсутствие ограничения префиксности не означает, что элементами надмоноида не могут быть префиксные языки, поэтому будем всегда в подобных случаях ставить кавычки. Аналогично вышеизложенному можно определить *"неограниченные неполные" надмоноиды* и т. п.

4. Описание несовпадающих подмоноидов

Опишем определенные нами подмоноиды супермоноида (как было отмечено выше, не все из двенадцати вариантов ограничений определяют *различные* моноиды). Сначала рассмотрим простейший случай, когда алфавит Σ содержит ровно одну букву, т. е. у исходного свободного моноида только один атом.

Утверждение 4.1. *Пусть $|\Sigma| = 1$. Тогда у супермоноида имеется два различных собственных подмоноида: префиксный и ограниченный.*

Доказательство. В случае $|\Sigma| = 1$ имеется только одно ω-слово, поэтому определения полных и предполных надмоноидов не имеют смысла — любой непустой язык является полным. Кроме того, любой язык — элемент префиксного надмоноида — содержит ровно одно слово, поэтому последний надмоноид совпадает с ограниченным префиксным. $\square$

Рассмотрим более сложный случай. Пусть исходный свободный моноид содержит по крайней мере два атома: a и b. Перед формулировками теорем о количестве различных подмоноидов в случае конечного и бесконечного алфавитов Σ опишем все определенные нами подмоноиды. Для этого, рассматривая каждый подмоноид (пусть $\mathcal{M}$),

- либо докажем утверждение об *отсутствии* в $\mathcal{M}$ элементов, не входящих в какой-то конкретный подмоноид рассматриваемого $\mathcal{M}$ (пусть $\mathcal{M}_1$), т. е. о совпадении $\mathcal{M}$ с $\mathcal{M}_1$;
- либо укажем один элемент $\mathcal{M}$, не входящий ни в один из его подмоноидов (при этом доказательства "невхождения", как правило, будут опускаться, т. к. будут непосредственно следовать из определений).[1]

Утверждение 4.2. *Любой ограниченный предполный язык является полным.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый ограниченный предполный язык L. Для некоторого $\alpha \in \Sigma^\omega$ условие $\alpha \in \mathrm{adh}(L)$ по определению множества adh влечет существование в языке L сколь угодно длинного префикса этого α. Поэтому в определении предполного языка 3.3 для любого ω-слова α возможно только условие

$$(\exists u \in L)\ (u \in \mathrm{pref}(\alpha)),$$

отсюда по определению 3.2 заключаем, что язык L является полным. $\square$

Доказанное утверждение можно сформулировать также следующим образом: оба ограниченных предполных надмоноида совпадают с *соответствующими им* ограниченными полными. Таким образом, не имеет смысла говорить об ограниченном предполном и ограниченном префиксном предполном надмоноидах.

---

[1]Отметим следующие факты. Во-первых, подмоноидами предполных надмоноидов считаются и соответствующие полные (т. е. полные, имеющие такие же оставшиеся ограничения). Во-вторых, некоторые из приведенных ниже примеров подходят как для двухбуквенного алфавита, так и для произвольных алфавитов, содержащих по крайней мере две буквы. Оставшиеся примеры (в которых используется буква b) легко обобщаются на этот случай, например, путем замены в языках обобщенных регулярных выражений буквы b на множества, содержащие все буквы (все однобуквенные слова), кроме a.

Утверждение 4.3. *Любой префиксный полный язык над конечным алфавитом является ограниченным.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существует некоторый префиксный полный язык L, не являющийся ограниченным. В [14] (цитируется по [15]) доказано следующее утверждение: “у любого неограниченного языка L множество $\mathrm{adh}(L)$ непусто” (при этом в обеих работах рассматривались только конечные алфавиты, и неограниченными являются все бесконечные языки и только они). Таким образом, можем рассмотреть некоторое ω-слово $\alpha \in \mathrm{adh}(L)$. Ввиду $\mathrm{Pr}(L)$ и определения adh язык L не содержит ни одного слова из множества $\mathrm{pref}(\alpha)$. Отсюда по определению 3.2 полного языка заключаем, что L полным не является, и полученное противоречие доказывает данное утверждение. □

По-другому утверждение 4.3 можно сформулировать следующим образом: если алфавит конечен, то префиксный полный надмоноид совпадает с ограниченным префиксным полным. Отметим заранее, что в утверждениях 4.2 и 4.3 были рассмотрены уже все случаи подобного “совпадения”, т. е. все остальные подмоноиды, кроме упомянутых в этих утверждениях, отличны от любого из своих подмоноидов.

Утверждение 4.4. *Над бесконечным алфавитом существует префиксный полный язык, не являющийся ограниченным.*

Доказательство. Пусть задан алфавит $\Sigma = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} a_i$ (над алфавитом более чем счетной мощности пример языка строится аналогично). Для каждого $i \in \mathbb{N}$ определим вспомогательные слова и языки $u_i = (a_i)^i$, $L_i = \mathrm{opref}(u_i) \setminus \{e\}$, т. е.

$$L_i = \Big\{a_i,\ a_i a_i,\ a_i a_i a_i,\ \ldots\ ,\ \underbrace{a_i \ldots a_i}_{i-1 \text{ раз}}\Big\}.$$

Далее, пусть $L' = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \{u_i\} \cdot \Sigma$, $L'' = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} L_i \cdot (\Sigma \setminus \{a_i\})$. Искомым является язык $L = L' \cup L''$.

Префиксность и неограниченность L очевидны; покажем, что L является полным. Для этого рассмотрим произвольное ω-слово $\beta = b_1 b_2 \ldots \in \Sigma^\omega$. Возможны два варианта.

1) Пусть все буквы ω-слова β одинаковы, т. е. пусть $\beta = (a_n)^\omega$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $u_n = (a_n)^n$, значит, по построению $(a_n)^{n+1} \in L_n \subseteq L' \subseteq L$. Таким образом, $(a_n)^{n+1}$ — требуемое слово языка L, являющееся префиксом рассматриваемого ω-слова β.
2) Пусть в ω-слове β найдутся хотя бы две различные буквы. Тогда выберем $n \in \mathbb{N}_0$ так, чтобы $b_1 = \cdots = b_n$, но $b_n \neq b_{n+1}$, $b_1 \in \Sigma$. Пусть $b_1 = \cdots = b_n = a_k$. Возможны три случая:
   - если $n < k$, то слово $(a_k)^n b_{n+1}$ из множества $\mathrm{pref}(\beta)$ по построению принадлежит языку L'' и, следовательно, L;
   - если $n = k$, то такое же слово $(a_k)^n b_{n+1}$ по построению принадлежит $L' \subseteq L$;
   - если же $n > k$, то языку $L' \subseteq L$ принадлежит слово $(a_k)^{k+1}$.

Итак, во всех случаях показали, что язык $L \cap \mathrm{pref}(\beta)$ непуст, т. е. L полный. □

Приведем примеры к последним трем случаям доказанного утверждения. Пусть всюду $k = 4$, $b_{n+1} = a_9$ и $b_{n+2} b_{n+3} \ldots = \gamma \in \Sigma^\omega$. Рассмотрим различные возможности для n:

1) пусть $n = 3 < k$, тогда $\beta = a_4 a_4 a_4 a_9 \gamma$; искомым является слово $a_4 a_4 a_4 a_9 \in L''$;
2) пусть $n = 4 = k$, тогда $\beta = (a_4)^4 a_9 \gamma$; искомое слово — $(a_4)^4 a_9 \in L'$;
3) пусть $n = 5 > k$, тогда $\beta = (a_4)^5 a_9 \gamma$; искомое слово — $(a_4)^5 \in L'$.

Доказанные утверждения 4.3 и 4.4 описывали нетривиальные случаи совпадения (несовпадения) моноида со своим подмоноидом. Исследование остальных моноидов значительно проще, и, как было сказано выше, не представляют сложности доказательства того, что приведенные далее примеры языков удовлетворяют поставленным условиям. Итак, после доказательства утверждений 4.2–4.4 можем описать все существующие подмоноиды.

Подмоноиды будут упорядочены по общему количеству наложенных ограничений (от 0 до 3). Определение обобщенных регулярных выражений согласовано с ([18], § 6). Всюду будут опускаться слова "не входит ни в один подмоноид рассматриваемого моноида", относящиеся к приводимым примерам языков.

Подмоноид без ограничений

1. *Собственно глобальный надмоноид.* Язык задается регулярным выражением a^*.

Подмоноиды с одним ограничением

2. *Ограниченный надмоноид.* Язык $\{a, aa\}$.
3. *Префиксный надмоноид.* Язык задается обобщенным регулярным выражением $\underline{a^+b}$.
4. *Предполный надмоноид.* Язык задается обобщенным регулярным выражением $\overline{b^*}$.
5. *Полный надмоноид.* Полный язык Σ^*.

Подмоноиды с двумя ограничениями

6. *Ограниченный префиксный надмоноид.* Язык $\{a, ba\}$.
7. *Ограниченный полный надмоноид.* Язык $\{e, a\}$.
8. *Префиксный предполный надмоноид.* Язык задается регулярным выражением a^*b.
9. *Префиксный полный надмоноид* (*не совпадает с ограниченным префиксным полным только в случае бесконечного числа атомов исходного свободного моноида*). См. пример языка (L), приведенный в доказательстве утверждения 4.4.

Подмоноид с тремя ограничениями

10. *Ограниченный префиксный полный надмоноид.* У этого моноида нет подмоноидов, определенных выше, и пример языка $(\{a, b\})$ нужен для того, чтобы показать, что множество его атомов непусто.

5. Свободные подмоноиды

Утверждение 5.1. *Среди описанных подмоноидов супермоноида свободными моноидами являются все префиксные надмоноиды, причем только они.*

Доказательство. Рассмотрим любой из префиксных надмоноидов. Пусть $\mathcal{M}$ — множество его элементов. Воспользуемся теоремой 6.1 из ([8], § 6.6) и покажем выполнение условий (i), (ii) и (iii) этой теоремы: (i) очевидно; (ii) доказываем, выбирая в качестве X множество атомов префиксного надмоноида $\{A \in \mathcal{M} \mid (\forall B, C \subseteq \mathcal{M})\ (A \neq BC)\}$; (iii) следует из утверждения 3.2 данной статьи.

Теперь рассмотрим какой-нибудь из "непрефиксных" надмоноидов. Для любого из них возможно доказательство, совпадающее с доказательством утверждения 2.1, поскольку, как несложно убедиться, элементы супермоноида (языки) A и B, приведенные в указанном доказательстве (см. (2)), являются элементами *каждого* из ранее определенных "непрефиксных" надмоноидов. □

6. О мощности множеств элементов подмоноидов

В данном разделе с помощью несложных утверждений 6.1 и 6.2 определим мощности множеств элементов надмоноидов в случае, когда число атомов исходного свободного моноида конечно. Отметим, что у каждого бесконечного моноида множество всех элементов и множество атомов равномощны, поэтому в утверждениях о мощности можем рассматривать любое из этих множеств.

Утверждение 6.1. *Пусть* $|\Sigma| = 1$. *Тогда мощность множества атомов подмоноидов супермоноида*

– *у префиксного равна* 1;

– *у ограниченного счетная;*
– *у супермоноида имеет мощность континуума.*

В случае однобуквенного алфавита несложно также *описать* множества атомов — это можно считать одним из возможных доказательств утверждения 6.1. Итак, пусть $\Sigma = \{a\}$. Тогда

– единственный атом префиксного надмоноида — $\{a\}$;
– атомами ограниченного надмоноида являются все конечные подмножества языка $\{a\}^*$, содержащие a;
– атомами супермоноида являются все подмножества этого же языка $\{a\}^*$, также содержащие слово a

(по определению атомом не является $\{e\}$ — единица супермоноида как моноида).

Утверждение 6.2. *Пусть* $1 < |\Sigma| < \omega$ *(т. е. у исходного свободного моноида конечное число атомов, большее* 1*). Тогда мощность множества элементов подмоноидов супермоноида*

– *у всех ограниченных счетная;*
– *у всех неограниченных имеет мощность континуума.*

Доказательство. Для каждого из ограниченных надмоноидов утверждение очевидно, поскольку, с одной стороны, все эти надмоноиды бесконечны (напр., ограниченный префиксный полный надмоноид содержит все языки вида Σ^i), с другой стороны, $|\Sigma^*| = \omega$, а в данном случае рассматриваем только конечные подмножества (конечность рассматриваемых подмножеств следует из их ограниченности, поскольку $|\Sigma| < \omega$). Очевидно также, что мощность множества элементов каждого из неограниченных надмоноидов не превосходит мощности континуума. Покажем, что она и не меньше.

Для этого у множеств элементов каждого из перечисленных в разделе 4 неограниченных надмоноидов приведем примеры подмножеств нужной нам мощности — специальные множества языков. Будем использовать нумерацию подмоноидов из раздела 4.

Пусть заданный алфавит Σ содержит буквы a и b. Представим возможные множества языков:

1) все языки, т. е. все подмножества Σ^*;
4, 5) множество языков, содержащих все однобуквенные слова;
3, 8) все бесконечные подмножества языка, заданного регулярным выражением a^*b.

Доказательства того, что указанные множества языков удовлетворяют требуемым условиям, несложны. □

7. Подмоноиды супермоноида в задачах теории формальных языков

В разделе 2 уже были приведены некоторые ссылки на возможные примеры применения свойств супермоноида свободного моноида в задачах теории формальных языков. А подмоноиды супермоноида, определенные выше, применяются в подобных задачах в тех случаях, когда на используемые множества слов накладываются специальные ограничения, например, отражающие свойства реальных языков программирования. Приведем ссылки на использование конкретных подмоноидов.

Самое важное (с точки зрения автора) использование: отношение эквивалентности в бесконечности ([1], [2], [12], [13]) — это бинарое отношение, заданное на элементах различных надмоноидов.[1] Теория, изложенная в [2], фактически дает возможность сведе́ния многих задач в *префиксных надмоноидах* к аналогичным задачам в *префиксных полных надмоноидах*. Частный случай последнего: задачи в *ограниченных префиксных надмоноидах* сводятся к аналогичным в *ограниченных префиксных полных надмоноидах*. Как было показано выше, это делается путем построения специальных инверсных морфизмов.

[1]Например, *ограниченных надмоноидов* — в случае конечного алфавита Σ и т.п.

Однако в отдельных утверждениях статьи [2] требуется возможность применения некоторых из доказанных свойств и в случае бесконечного алфавита Σ, хотя при этом достаточно было рассматривать подмоноиды ограниченных надмоноидов – *ограниченные префиксные*.

Для дальнейшего приведем некоторые обозначения из работ [1], [2]. Для произвольного (возможно, бесконечного) алфавита Δ рассмотрим следующее рекуррентное определение множества максимальных префиксных кодов над Δ (применение такого названия для случая конечных алфавитов согласовано с терминологией теории кодирования см. [10], гл. 4 и др.). Будем обозначать определяемое множество языков через $\mathrm{mp}(\Delta)$.

Считаем, что $\Delta \in \mathrm{mp}(\Delta)$. Для произвольных $C \in \mathrm{mp}(\Delta)$ и $B \subseteq C$ полагаем $(C \setminus B) \cup B\Delta \in \mathrm{mp}(\Delta)$. Заметим, что если алфавит Δ конечен, то

– приведенное определение действительно задает коды, являющиеся максимальными и префиксными; это легко доказывается индукцией по длине максимального слова в языке, поскольку согласно определению для произвольного $A \in \mathrm{mp}(\Delta)$ выполнены условия $\mathrm{Pr}(A)$ и $\mathrm{ci}(A) = 1$;[1]
– в определении достаточно допускать только случай $|B| = 1$.

Если множество D таково, что для некоторого $C \in \mathrm{mp}(\Delta)$ выполнено включение $C \subseteq D$, то будем писать $D \in \mathrm{mp}^{\,+}(\Delta)$. Если для некоторого языка $A \in \Sigma$ выполнено условие $C \in \mathrm{mp}(\Delta_A)$ или $D \in \mathrm{mp}^{\,+}(\Delta_A)$ для языков $C' = h_A(C)$ или $D' = h_A(D)$ соответственно, то будем писать $C' \in \mathrm{mp}(A)$ или $D' \in \mathrm{mp}^{\,+}(A)$ соответственно. Важно отметить, что в случае $A = \Sigma$ (при этом можно считать, что $\Sigma = \Delta_A$) недоразумений не возникает: два разных определения, имеющиеся в этом случае для множества языков $\mathrm{mp}(\Delta)$, в действительности равносильны, т. е. определяют одни и те же множества; то же самое для $\mathrm{mp}^{\,+}(\Delta)$.

Необходимые условия коммутирования в *глобальном* надмоноиде, а также необходимые и достаточные в его *префиксном* подмоноиде, были рассмотрены в [1]. Показано, например, что для обоих указанных объектов задачи проверки условий коммутирования также сводятся к аналогичным задачам в их *полных* подмоноидах. Алгоритм проверки существования общего корня двух языков и его построения легко описывается на основе несколько более общего алгоритма из [12] (см. там замечание к теореме 1), поскольку для любого натурального n равенство $A = B^n$ — частный случай условия $A \in \mathrm{mp}(B)$.

Практически во всех цитировавшихся работах, связанных с применением в различных задачах теории формальных языков алгебраических свойств подмоноидов супермоноида, в той или иной степени используются *ограниченные префиксные полные* подмоноиды. Это — моноиды, множество элементов которых является пересечением множеств элементов всех определенных выше подмоноидов супермоноида свободного моноида. Принятое в упомянутых работах обозначение множества элементов такого моноида (если исходным алфавитом является Σ) совпадает с определенным выше множеством языков $\mathrm{mp}(\Sigma)$; если алфавит Σ конечен, то это множество есть множество максимальных префиксных кодов над Σ.

В некоторых из цитировавшихся выше работ префиксность не требовалась, при этом подмоноиды супермоноида — *ограниченные полные*, множество их элементов есть $\mathrm{mp}^{\,+}(\Sigma)$. Некоторые свойства этих подмоноидов были рассмотрены в [12].

Почти все свойства полных надмоноидов (по терминологии [2], [12] свойства языков множества $\mathrm{mp}(\Sigma)$) верны и для соответствующих им *предполных* надмоноидов; большинство доказательств, приведенных в этих работах, остаются верными и для множеств элементов последних надмоноидов, т. е. для более широких классов языков. Может быть, эти свойства различных *предполных* моноидов также окажутся полезными для каких-либо задач теории формальных языков.

Менее очевидна связь *глобальных* надмоноидов с так называемыми *последовательностны-*

[1] Обозначение ci общепринято в теории кодирования.

ми языками.[1] Описанный в [19] очередной способ задания класса регулярных языков как $\pi(1)$-подкласса класса последовательностных языков можно считать еще одним приложением алгебры полугрупп к задачам теории формальных языков, не рассматривавшимся в [9], а именно, специальным определением множества регулярных языков с помощью *глобальных* надмоноидов свободных моноидов. И при $i > 1$ в $\pi(i)$-подклассах (некоторые свойства этих подклассов также были рассмотрены в [19]) имеется очевидная связь с *глобальными* надмоноидами.

8. Заключение

Практически все факты, изложенные в данной работе, выполняются не только для свободных моноидов, их глобальных надмоноидов и описанных нами подмоноидов последних, но и для более общих объектов — произвольных моноидов с левым законом сокращения и определяемых аналогичным образом их супермоноидов и соответствующих подмоноидов последних. Большинство доказательств, приведенных в данной работе, можно перенести и на этот случай.

В данной статье и других процитированных выше работах была выбрана, однако, именно такая форма изложения про *свободные* моноиды ввиду следующих обстоятельств.

- Во-первых, при этом можно пользоваться терминологией и некоторыми известными фактами теории формальных языков. (В противном случае и для произвольных моноидов с левым законом сокращения необходимо было бы строго определять понятия, соответствующие понятиям длины, префиксности и т. п., а также доказать некоторые свойства этих понятий.)
- Во-вторых, обратный аргумент: известные автору приложения доказанных фактов, только задачи теории формальных языков (напр., подробно описанные в разделе 7). А в этой теории произвольные моноиды с левым законом сокращения вряд ли могут быть интерпретированы каким-либо нестандартным образом.

В заключение назовем две не до конца решенные проблемы, связанные с применением свойств рассмотренных подмоноидов супермоноида в задачах теории формальных языков.

- Каковы необходимые *и достаточные* условия коммутирования в "непрефиксных" подмоноидах супермоноида?
- Каковы необходимые и достаточные условия того, что заданный элемент некоторого рассматриваемого подмоноида является его атомом? (Наибольший интерес эта задача представляет для ограниченного префиксного полного надмоноида.)

В обеих проблемах имеются в виду необходимые и достаточные условия, удобные для использования в прикладных задачах. Критерии, являющиеся переформулировкой определений, для этого малопригодны. Решение упомянутых проблем, по-видимому, может представлять интерес для некоторых прикладных задач теории формальных языков (см., напр., [2] [3]).

Литература

1. Melnikov B. *Some equivalence problems for free monoids and for subclasses of the CF-grammars class* // Number Theor. and Algebr. Methods in Comput. Sci. – World Sci. Publ. – 1995. – P. 125–137.
2. Дубасова О.А., Мельников Б.Ф. *Об одном расширении класса контекстно-свободных языков* // Программирование. – М.: РАН. – 1995. – № 6. – С. 46–58.
3. Melnikov B., Kashlakova E. *Some grammatical structures of programming languages as simple bracketed languages* // Informatika. Lietuva. – 2000. – V. 11. – № 4. – P. 441–454.
4. Melnikov B. *A new algorithm of the state-minimization for the nondeterministic finite automata* // The Korean J. of Comput. and Appl. Math. – 1999. – V. 6. – № 2. – P. 277–290.

[1] Все определения и обозначения, связанные с последовательностными языками и грамматиками, а также ссылки на наиболее известные, связанные с ними работы, см. в [19].

5. Melnikov B. *2ω-finite automata and sets of obstructions of their languages* // The Korean J. of Comput. and Appl. Math. – 1999. – V. 6. – № 3. – P. 565–574.
6. Melnikov B. *Once more about the state-minimization of the nondeterministic finite automata* // The Korean J. of Comput. and Appl. Math. . – 2000. – V.7. – № 3. – P. 655–662.
7. Литлвуд Дж. *Математическая смесь.* – М.: Наука, 1990. – 140 с.
8. Кон П. *Свободные кольца и их связи.* – М.: Мир, 1975. – 512 с.
9. *Общая алгебра.* Т. 2. – М.: Наука, 1991. – 480 с.
10. Саломаа А. *Жемчужины теории формальных языков.* – М.: Мир, 1986. – 166 с.
11. Лаллеман Ж. *Полугруппы и комбинаторные приложения.* – М.: Мир, 1985. – 484 с.
12. Melnikov B. *The equality condition for infinite catenations of two sets of finite words* // Int. J. Foundat. of Comput. Sci. – 1993. – V. 4. – № 3. – P. 267–274.
13. Мельников Б.Ф. *Алгоритм проверки равенства бесконечных итераций конечных языков* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и кибернет. – 1996. – № 4. – С. 49–54.
14. Eilenberg S. *Automata, languages and machines.* – New York: Academ. Press, 1974. – V. A. – 614 p.
15. Čulik K. II, Salomaa A. *On infinite words obtained by iterating morphisms* // Theor. Comput. Sci. – 1982. – V. 19. – P. 29–38.
16. Thomas W. *Automata on infinite objects* // Handbook of Theor. Comput. Sci. – Elsevier Sci. Publ., 1990. – V. B. – P. 301–348.
17. Staiger L. *ω-Languages* // Handbook of Formal Languages. – Berlin: Springer, 1997. – V. 3. – P. 339–387.
18. Perrin D. *Finite automata* // Handbook of Theor. Comput. Sci. – Elsevier Sci. Publ., 1990. – V. A. – P. 1–58.
19. Мельников Б.Ф. *Об одной классификации последовательностных контекстно-свободных языков и грамматик* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и кибернет. – 1993. – № 3. – С. 64–69.

Тольяттинский государственный университет

Поступила
19.03.2001