ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 9 (520)

УДК 517.518

А.Д. НАХМАН

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ СУММ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

1. Обозначим $G = G^N = [-\pi, \pi]^N$, $N = 1, 2, \dots$; $L^p = L^p(G)$, $p \geq 1$, $L(\ln^+ L)^N = L(\ln^+ L)^N(G)$ — соответственно классы функций, измеримых по Лебегу на G, 2π-периодических по каждой переменной x_j и таких, что

$$\|f\|_p = \left(\int_{G^N} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} < \infty, \quad \int_{G^N} |f(\mathbf{x})| (\ln^+ |f(\mathbf{x})|)^N d\mathbf{x} < \infty;$$

$L(G^N) = L^1(G^N)$. Пусть $\mathbf{Z}^N$ — целочисленная решетка в R^N и $\mathbf{Z}^N_+$ — множество всех ее элементов $\mathbf{m}$ с неотрицательными компонентами m_j,

$$\Pi_{\mathbf{m}} = \{\mathbf{l} \in \mathbf{Z}^N_+ : 0 \leq l_j \leq m_j;\ j = 1, \dots, N\},$$
$$\Pi_{\mathbf{m},\mathbf{k}} = \{\mathbf{l} \in \mathbf{Z}^N_+ : k_j \leq l_j \leq m_j;\ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^N_+;\ j = 1, \dots, N\}.$$

Каждой $f \in L(G^N)$ сопоставим последовательность прямоугольных частичных сумм ее ряда Фурье, сопряженного по r (для определенности первым r) переменным

$$\widetilde{S}^r_{\mathbf{m}}(f) = \widetilde{S}^r_{\mathbf{m}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Pi_{\mathbf{m}}} c_{\mathbf{k}}(f) \left(\prod_{\nu=1}^{r} (-i \operatorname{sgn} k_\nu) \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

где

$$c_{\mathbf{k}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{G^N} f(\mathbf{t}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}) d\mathbf{t};$$

при $r = 0$ имеем (по определению) частичные суммы $S_{\mathbf{m}}(f)$ обыкновенного (кратного) ряда Фурье; символом $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ обозначается скалярное произведение в R^N.

Суммы Фурье функций $f \in L(\ln^+ L)^{N-1}$ и их различные средние достаточно хорошо изучены (см., напр., [1], гл. 17, пп. 2, 3; [3], [4]); в меньшей степени известно (см., напр. [5], гл. 4, п. 5) поведение сопряженных сумм и их средних; в обоих случаях, однако, остается ряд интересных вопросов. Так, например, супремум последовательности, мажорантной для средних Чезаро, оценивается сверху максимальной функцией Харди–Литтлвуда (см., напр., [3]); справедлива ли такая оценка и снизу? Можно ли, переходя от “sup” к “lim sup”, улучшить оценку сверху до $|f(\mathbf{x})|$ в случае средних достаточно общего вида? Последний вопрос, любопытный сам по себе, связан также с некоторыми приложениями (см. [6] и пп. 10, 11 ниже). Из результатов данной работы (пп. 7, 8, 12) вытекают, в частности, положительные ответы на поставленные вопросы.

В п. 2 вводятся обобщенное ядро Валле-Пуссена и соответствующее сопряженное ядро и устанавливаются их оценки. В п. 3 доказана оценка (через $|f(x)|$) верхнего предела последовательности, мажорантной для обобщенных (одномерных) сумм Валле-Пуссена, а N-мерный вариант установлен в п. 7; при этом выясняется характер точек, в которых указанные утверждения имеют место. Аналог этих результатов для сопряженных кратных сумм рассмотрен в п. 8. В пп. 9 и 10 изучены кубические и прямоугольные суммы Фурье, а в п. 11 — так называемая $(V,0)$-суммируемость. Наконец, частный случай средних Чезаро исследован в п. 12.

2. *Обобщенные ядра Валле-Пуссена и их мажоранты.* Пусть $D_\nu(t)$ и $\widetilde{D}_\nu(t)$ — ядро Дирихле и сопряженное ядро Дирихле соответственно ([2], с. 86), A_ν^α — биномиальные коэффициенты, определения и свойства которых см. в ([2], с. 130–131),

$$v_{m,k}^\alpha(t) = \frac{1}{A_{m-k}^\alpha}\sum_{\nu=k}^{m} A_{m-\nu}^{\alpha-1} D_\nu(t), \quad \widetilde{v}_{m,k}^\alpha(t) = \frac{1}{A_{m-k}^\alpha}\sum_{\nu=k}^{m} A_{m-\nu}^{\alpha-1} \widetilde{D}_\nu(t) \tag{2.1}$$

— обобщенное и сопряженное обобщенное ядра Валле-Пуссена [4], $k = 0,\dots,m$; при $\alpha = 1$ получаем "обычное" ядро (сопряженное ядро) Валле-Пуссена. При $k = 0$, $0 < \alpha \le 1$ имеем ядро Чезаро (сопряженное ядро Чезаро) ([2], с. 157). Обозначим

$$\widetilde{\widetilde{v}}_{m,k}^\alpha(t) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \widetilde{v}_{m,k}^\alpha(t). \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Для всех $k = 0,\dots,m$, $0 < \alpha \le 1$ имеют место оценки*

$$|v_{m,k}^\alpha(t)| + |\widetilde{v}_{m,k}^\alpha(t)| \le C_\alpha (m+1), \quad 0 \le t \le \pi; \tag{2.3}$$

$$|v_{m,k}^\alpha(t)| + |\widetilde{v}_{m,k}^\alpha(t)| + |\widetilde{\widetilde{v}}_{m,k}^\alpha(t)| \le C_\alpha \frac{1}{t}, \quad 0 < t \le \pi; \tag{2.4}$$

$$|v_{m,k}^\alpha(t)| + |\widetilde{\widetilde{v}}_{m,k}^\alpha(t)| \le C_\alpha \frac{1}{t^{\alpha+1}(m-k+1)^\alpha}, \quad 0 < t \le \pi; \tag{2.5}$$

постоянные $C > 0$ здесь и в дальнейшем различны и зависят лишь от явно указанных индексов.

Неравенства (2.3), (2.4) вытекают из известных ([2], с. 89) оценок сверху (соответствующими правыми частями (2.3) и (2.4)) ядер $D_\nu(t)$ и $\widetilde{D}_\nu(t)$, а оценка (2.5) получается по методу ([2], с. 88–89; а также вытекает из оценки (8) работы [4]).

Положим

$$w_{m,k}^\alpha(t) = \begin{cases} |\widetilde{v}_{m,k}^\alpha(t)|, & 0 \le t \le \frac{1}{m+1}; \\ |\widetilde{\widetilde{v}}_{m,k}^\alpha(t)|, & \frac{1}{m+1} < t \le \pi, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$w_{m,k}^{\alpha,*}(t) = \begin{cases} m+1, & 0 \le t \le \frac{1}{m+1}; \\ \frac{1}{t}, & \frac{1}{m+1} < t \le \frac{1}{m-k+1}; \\ \frac{1}{t^{\alpha+1}(m-k+1)^\alpha}, & \frac{1}{m-k+1} < t \le \pi, \end{cases} \tag{2.7}$$

и из соображений четности $|v_{m,k}^\alpha(t)|$, $|\widetilde{v}_{m,k}^\alpha(t)|$, $|\widetilde{\widetilde{v}}_{m,k}^\alpha(t)|$ доопределяем $w_{m,k}^{\alpha,*}(t)$ четным и 2π-периодическим образом.

Лемма 2.2. *Для всех $k = 0,\dots,m$, $0 < \alpha \le 1$, $0 \le t \le \pi$, $0 < \delta < \pi$ имеют место оценки*

$$|v_{m,k}^\alpha(t)| + w_{m,k}^\alpha(t) \le C_\alpha w_{m,k}^{\alpha,*}(t), \tag{2.8}$$

$$\delta w_{m,k}^{\alpha,*}(\delta) \le 1, \tag{2.9}$$

$$\int_0^\pi w_{m,k}^{\alpha,*}(t)dt \le C_\alpha \ln\frac{3(m+1)}{m-k+1}. \tag{2.10}$$

Оценки (2.8), (2.10) очевидным образом вытекают из леммы 2.1 и определения (2.7); далее, (2.9) имеет место, т. к. $\delta(m+1) \le 1$, если $\delta \le \frac{1}{m+1}$; $\delta\cdot\frac{1}{\delta}=1$, если $\frac{1}{m+1} < \delta \le \frac{1}{m-k+1}$ и $\frac{\delta}{(m-k+1)^\alpha\delta^{\alpha+1}} \le 1$, если $\frac{1}{m-k+1} \le \delta$, так что утверждение леммы 2.2 установлено.

3. *Одномерные обобщенные суммы Валле-Пуссена.* Пусть $S_m(f) = S_m(f,x)$ и $\widetilde{S}_m(f) = \widetilde{S}_m(f,x)$ — частичные суммы m-го порядка ряда Фурье и сопряженного ряда Фурье соответственно, а

$$V_{m,k}^{\alpha}(f) = V_{m,k}^{\alpha}(f,x) = \frac{1}{A_{m-k}^{\alpha}} \sum_{\nu=k}^{m} A_{m-\nu}^{\alpha-1} S_\nu(f,x), \quad \alpha \in (0,1], \tag{3.1}$$

$$\widetilde{V}_{m,k}^{\alpha}(f) = \widetilde{V}_{m,k}^{\alpha}(f,x) = \frac{1}{A_{m-k}^{\alpha}} \sum_{\nu=k}^{m} A_{m-\nu}^{\alpha-1} \widetilde{S}_\nu(f,x), \quad \alpha \in (0,1], \tag{3.2}$$

— соответствующие обобщенные суммы Валле-Пуссена,

$$\widetilde{f}_\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mu \le |t| \le \pi} f(x-t) \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt.$$

Обозначим

$$V^{*,\alpha}(f,x) = \limsup_{m\to\infty} \left(\sup_{0\le k\le m} \left(\ln \frac{3m}{m-k+1} \right)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\, |v_{m,k}^{\alpha}(t)| dt \right),$$
$$\Delta_{m,k}^{\alpha}(f,x) = \widetilde{V}_{m,k}^{\alpha}(f,x) - \widetilde{f}_{\frac{1}{m+1}}(x),$$
$$\Delta_{*}^{\alpha}(f,x) = \limsup_{m\to\infty} \left(\sup_{0\le k\le m} \left(\ln \frac{3m}{m-k+1} \right)^{-1} |\Delta_{m,k}^{\alpha}(f,x)| \right).$$

Теорема 3.1. *В каждой точке Лебега функции f имеют место оценки*

$$V^{*,\alpha}(f,x) \le C_\alpha |f(x)|, \quad \alpha \in (0,1], \tag{3.3}$$
$$\Delta_{*}^{\alpha}(f,x) \le C_\alpha |f(x)|, \quad \alpha \in (0,1]. \tag{3.4}$$

Доказательство проводится развитием идей ([2], с. 151–152), при этом будем пользоваться тем, что каждая точка Лебега ([2], с. 111) функции f служит таковой и для функции $|f|$ в силу неравенства $||f(x+t)| - |f(x)|| \le |f(x+t) - f(x)|$.

Рассмотрим случай (3.4), доказательство (3.3) аналогично. Записав (3.2) в интегральном виде, получим

$$\Delta_{m,k}^{\alpha}(f,x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \le \frac{1}{m+1}} f(x-t) \widetilde{v}_{m,k}^{\alpha}(t) dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{m+1} \le |t| \le \pi} f(x-t) \widetilde{\widetilde{v}}_{m,k}^{\alpha}(t) dt.$$

Согласно (2.6)

$$\pi |\Delta_{m,k}^{\alpha}(f,x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} (|f(x-t)| - |f(x)|) w_{m,k}^{\alpha}(t) dt + |f(x)| \int_{-\pi}^{\pi} w_{m,k}^{\alpha}(t) dt.$$

Положим $\phi_x(t) = |f(x-t)| + |f(x+t)| - 2|f(x)|$, тогда в силу четности $w_{m,k}^{\alpha}(t)$ имеем

$$\pi |\Delta_{m,k}^{\alpha}(f,x)| \le \int_{0}^{\pi} |\phi_x(t)| w_{m,k}^{\alpha}(t) dt + 2|f(x)| \int_{0}^{\pi} w_{m,k}^{\alpha,*}(t) dt. \tag{3.5}$$

По определению точки Лебега функции $|f|$ ([2], с. 111) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует некоторое $\delta = \delta_x$ такое, что

$$\psi(x,t) = \int_{0}^{t} |\phi_x(\tau)| d\tau \le \varepsilon t \tag{3.6}$$

при всех $0 \le t \le \delta$. Интегрируя дважды по частям, используя (3.6) и невозрастание мажоранты (2.7), имеем

$$\int_0^\delta |\phi_x(t)| w_{m,k}^{\alpha,*}(t)dt = w_{m,k}^{\alpha,*}(\delta)\psi(x,\delta) + \int_0^\delta \psi(x,t)d[-w_{m,k}^{\alpha,*}(t)] \le$$

$$\le \varepsilon(\delta w_{m,k}^{\alpha,*}(\delta)) + \int_0^\delta td[-w_{m,k}^{\alpha,*}(t)] = \varepsilon \int_0^\delta w_{m,k}^{\alpha,*}(t)dt. \quad (3.7)$$

Далее,

$$\int_\delta^\pi |\phi_x(t)| w_{m,k}^{\alpha}(t)dt \le C_\alpha \frac{1}{\delta^{\alpha+1}(m-k+1)^\alpha} \int_\delta^\pi |\phi_x(t)|dt. \quad (3.8)$$

Эта оценка верна в силу (2.6) и (2.5), если $\frac{1}{m+1} \le \delta$; если же $\delta < \frac{1}{m+1}$, то в интеграле по $[\delta, \frac{1}{m+1})$ имеем

$$w_{m,k}^{\alpha}(t) = |\widetilde{V}_{m,k}^{\alpha}(t)| \le C_\alpha \frac{1}{\delta^{\alpha+1}(m+1)^\alpha} \le C_\alpha \frac{1}{\delta^{\alpha+1}(m-k+1)^\alpha}.$$

Тогда как для $[\frac{1}{m+1}, \pi]$ сохраняется оценка вида (3.8). Поэтому (3.8) остается верной и для $\delta < \frac{1}{m+1}$.

Согласно (3.5), (3.7), (3.8) получаем

$$\pi|\Delta_{m,k}^{\alpha}(f,x)| \le (\varepsilon + 2|f(x)|) \int_0^\pi w_{m,k}^{\alpha,*}(t)dt + \frac{C_\alpha}{\delta^{\alpha+1}(m-k+1)^\alpha} \int_\delta^\pi |\phi_x(t)|dt. \quad (3.9)$$

Поделим обе части (3.9) на $\ln \frac{3(m+1)}{m-k+1}$ и заметим, что $(m-k+1)^\alpha \ln \frac{3(m+1)}{m-k+1} \ge \ln 3(m+1)$ при $k \in \{0, \dots, m\}$; в этом можно убедиться, находя наименьшее (по k) значение левой части последнего неравенства. В силу (2.10) получаем

$$\left(\ln \frac{3(m+1)}{m-k+1}\right)^{-1} |\Delta_{m,k}^{\alpha}(f,x)| \le C_\alpha \left(\varepsilon + |f(x)| + \frac{1}{\delta^{\alpha+1} \ln 3(m+1)} \int_0^\pi |\phi_x(t)|dt\right).$$

Поскольку

$$\int_0^\pi |\phi_x(t)|dt \le 2\left(\int_{-\pi}^\pi |f(t)|dt + \pi|f(x)|\right),$$

то для достаточно больших m имеем

$$\sup_{0 \le k \le m} \left(\ln \frac{3m}{m-k+1}\right)^{-1} |\Delta_{m,k}^{\alpha}(f,x)| \le C_\alpha \left(\varepsilon + |f(x)| + \frac{|f(x)| + \|f\|_1}{\delta^{\alpha+1} \ln 3(m+1)}\right),$$

откуда в силу произвольности ε и вытекает оценка (3.3). $\square$

4. *Обозначения.* Кратные обобщенные суммы Валле-Пуссена определяются в виде

$$\widetilde{V}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha},r}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l} \in \Pi_{\mathbf{m},\mathbf{k}}} \left(\prod_{j=1}^N \frac{A_{m_j-l_j}^{\alpha_j-1}}{A_{m_j-k_j}^{\alpha_j}}\right) \widetilde{S}_{\mathbf{l}}^r(f,\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

$r \in \{0, \dots, N\}$, $k_j = 0, 1, \dots, m_j$, $m_j = 1, 2, \dots$; $j \in \{1, \dots, N\}$.

Положим $V_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha}}(f,\mathbf{x}) = \widetilde{V}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha},0}(f,\mathbf{x})$, $G_0 = \{\mathbf{t} : 0 \le t_j \le \pi,\ j = 1, \dots, N\}$,

$$G(\mathbf{h}) = \{\mathbf{t} : 0 < |t_j| \le h_j;\ 0 < h_j \le \pi;\ j = 1, \dots, N\}, \quad G_0(\mathbf{h}) = G(\mathbf{h}) \bigcap G_0;$$

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \int_{G_0(\mathbf{h})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{t})d\mathbf{t}$$

для всякой функции $\phi \ge 0$ переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{t}$, которая суммируема на G как функция от $\mathbf{t}$ при почти всех (п. в.) $\mathbf{x}$.

Пусть

$$f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\operatorname{mes} G(\mathbf{h})} \int_{G(\mathbf{h})} |f(\mathbf{x}-\mathbf{t})| d\mathbf{t} \tag{4.2}$$

и $f_*(\mathbf{x}) = \sup\limits_{\mathbf{h}} f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ — максимальная функция Харди–Литтлвуда. Множества $\mathcal{M}^*$ точек из G, в которых существует $f_*(\mathbf{x})$, и $\mathcal{M}_*$ точек Лебега функции f, в которых

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} G(\mathbf{h})} \int_{G(\mathbf{h})} |f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{t} = 0 \quad (\eta = \max_{j\in\{1,\dots,N\}} h_j),$$

расположены почти всюду в G (это вытекает из результатов [1], гл. 17, п. 2) для всякой $f \in L(\ln^+ L)^{N-1}$; заметим, как и выше, что любая точка Лебега функции f служит таковой и для $|f|$. Положим $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \bigcap \mathcal{M}_*$. Для последовательности $T_{\mathbf{m}}$ обозначим $\mu = \min\limits_{j\in\{1,\dots,N\}} m_j$ и

$$\limsup_{\mu\to\infty} T_{\mathbf{m}} = \lim_{\mu\to\infty} \sup_{m_1'\ge m_1,\dots,m_N'\ge m_N} T_{m_1'\dots m_N'},$$

$$\mathcal{L}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{m},\mathbf{k}} = \frac{1}{\pi^N} \int_G \biggl(\prod_{j=1}^N |v^{\alpha_j}_{m_j,k_j}(t_j)|\biggr) d\mathbf{t}; \quad \Lambda_{\mathbf{m},\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^N \ln\frac{3m_j}{m_j-k_j+1},$$

$$V^{\boldsymbol{\alpha},+}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}(f,\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^N} \int_G |f(\mathbf{x}-\mathbf{t})| \biggl(\prod_{j=1}^N |v^{\alpha_j}_{m_j,k_j}(t_j)|\biggr) d\mathbf{t}, \tag{4.3}$$

$$V^{\boldsymbol{\alpha},*}(f,\mathbf{x}) = \limsup_{\mu\to\infty} (\sup_{\mathbf{k}} \{\Lambda^{-1}_{\mathbf{m},\mathbf{k}} V^{\boldsymbol{\alpha},+}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}(f,\mathbf{x})\}),$$

$$V^{\boldsymbol{\alpha},**}(f,\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{m}} \sup_{\mathbf{k}} \{\Lambda^{-1}_{\mathbf{m},\mathbf{k}} V^{\boldsymbol{\alpha},+}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}(f,\mathbf{x})\};$$

соответствующие супремумы берутся по всем $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$ из множеств значений, указанных выше. Пусть также $\mathcal{P}_r = \{1,\dots,r\}$, $r \in \{1,\dots,N\}$, $\mathcal{P}_{s,r}$ — любой возрастающий кортеж длины s, составленный из элементов множества $\mathcal{P}_r = \{1,\dots,r\}$, $\overline{\mathcal{P}}_{s,r} = \mathcal{P}_r \setminus \mathcal{P}_{s,r}$, $\overline{G}(\mathbf{Q}_{r,s}) = \{\mathbf{t}_{r,s} : \theta_j \le |t_j| \le \pi\}$, где $j \in \mathcal{P}_{s,r}$,

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{Q}_{r,s}) = \frac{1}{\pi^s} \int_{G(\mathbf{Q}_{r,s})} f(\mathbf{x}-\mathbf{t}_{r,s}) \prod_{j\in\mathcal{P}_{s,r}} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t_j}{2} dt_j;$$

векторы $\mathbf{Q}_{r,s}$ и $\mathbf{t}_{r,s}$ имеют компоненты $\theta_j > 0$ и t_j соответственно для всех $j \in \mathcal{P}_{s,r}$ и нулевые — остальные $N-s$ компонент; в случае $\theta_j = \frac{1}{m_j+1}$, $j \in \mathcal{P}_{s,r}$, пишем $\frac{1}{\mathbf{m}_{r,s}+1}$ вместо $\mathbf{Q}_{r,s}$. Известно ([7]; [5], гл. 4, п. 6), что для каждой $f \in L(\ln^+ L)^{N-1}$ почти всюду существует каждая из сопряженных функций

$$\widetilde{f}_{r,s}(\mathbf{x}) = \lim_{\mu\to\infty} \widetilde{f}\biggl(\mathbf{x}, \frac{1}{\mathbf{m}_{r,s}+1}\biggr)$$

и соответствующих максимальных функций

$$\widetilde{f}^*_{r,s}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{m}} \biggl|\widetilde{f}\biggl(\mathbf{x}, \frac{1}{\mathbf{m}_{r,s}+1}\biggr)\biggr|. \tag{4.4}$$

5. Установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть для заданной $\phi(\mathbf{x},\mathbf{t})$ существует функция $\Phi(\mathbf{x})$ такая, что при п. в. $\mathbf{x}$, некотором $\delta > 0$ и каждом h_j, $0 < h_j \le \delta$, выполнено соотношение*

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{h}) \le \biggl(\prod_{j=1}^N h_j\biggr) \Phi(\mathbf{x}); \tag{5.1}$$

при этом указанное δ может зависеть от выбранных $\mathbf{x}$ *и* $\Phi(\mathbf{x})$. *Тогда имеет место оценка*

$$\int\limits_{G_0(\{\delta,\dots,\delta\})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{t})\Big(\prod_{j=1}^{N} w_{m_j,k_j}^{\alpha_j,*}(t_j)\Big)d\mathbf{t} \le C_{\boldsymbol{\alpha},N}\Lambda_{\mathbf{m},\mathbf{k}}\Phi(\mathbf{x}). \tag{5.2}$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям в левой части (5.2) последовательно по N-й, ..., первой переменной (см. (3.7)). Левая часть (5.2) обратится в 2^N слагаемых; достаточно рассмотреть слагаемое вида

$$\Big(\prod_{j=1}^{L-1} w_j(\delta)\Big)\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \Psi(\mathbf{x},\delta,\dots,\delta,t_L,\dots,t_N)\prod_{j=L}^{N} d[-w_j]; \tag{5.3}$$

здесь $L = 1,\dots,N+1$; произведения вида $\prod\limits_{j=A}^{B} T_j$ при $B < A$ равны (по определению) единице; $w_j = w_j(t_j)$ — краткая форма записи $w_{m_j,k_j}^{\alpha_j,*}(t_j)$.

Учитывая оценку (5.1), (5.3) не превосходит

$$\Phi(\mathbf{x})\Big(\prod_{j=1}^{L-1} \delta w_j(\delta)\Big)\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \prod_{j=L}^{N} t_j d[-w_j]. \tag{5.4}$$

Снова интегрируя по частям в (5.4), получим 2^{N-L+1} слагаемых; в свою очередь, достаточно рассмотреть

$$\Phi(\mathbf{x})\Big(\prod_{j=1}^{\mathcal{P}-1} \delta w_j(\delta)\Big)\prod_{j=\mathcal{P}}^{N}\int_0^\delta w_j(t_j)dt_j \quad (\mathcal{P} = 1,\dots,N). \tag{5.5}$$

Используя теперь (2.9) и (2.10), имеем (5.5), не превосходящим правой части (5.2). $\square$

6. Теорема 6.1. *Пусть* $f \in L(\ln^+ L)^{N-1}$. *Тогда для всех* $\boldsymbol{\alpha} \in (0,1]^N$ *и всех* $\mathbf{x} \in G$ *имеем*

$$V^{\boldsymbol{\alpha},**}(f,\mathbf{x}) \le C_{\boldsymbol{\alpha},N} f_*(\mathbf{x}). \tag{6.1}$$

Доказательство. Перейдем в кратном интеграле (4.3) к области интегрирования G_0, заменяя t_j в каждом из "одномерных" интегралов по $[-\pi,0]$ на $(-t_j)$ и пользуясь при этом четностью всех $w_{m_j,k_j}^{\alpha_j,*}(t_j)$. В итоге получаем выражение вида левой части (5.2) с $\delta = \pi$ и

$$\phi(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \sum_{\sigma} |f(\mathbf{x}-\mathbf{t}_\sigma)|;$$

суммирование производится по всевозможным $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_N)$ с $\sigma_j = \pm 1$; $\mathbf{t}_\sigma = (\sigma_1 t_1,\dots,\sigma_N t_N)$. Поскольку теперь

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{h}) = \int_{G_0(\mathbf{h})}\Big(\sum_{\sigma}|f(\mathbf{x}-\mathbf{t}_\sigma)|\Big)d\mathbf{t} \le \Big(\prod_{j=1}^{N} h_j\Big)2^N f_*(\mathbf{x}),$$

то выполнено условие (5.1). Значит, из соотношения (5.2) следует, что при введенных $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$

$$V_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha},+}(f,\mathbf{x}) \le C_{\boldsymbol{\alpha},N}\Lambda_{\mathbf{m},\mathbf{k}} f_*(\mathbf{x}),$$

и (6.1) установлено. $\square$

7. Теорема 7.1. *Пусть* $f \in L(\ln^+ L)^{N-1}$. *Тогда для всех* $\boldsymbol{\alpha} \in (0,1]^N$ *и п. в.* $\mathbf{x} \in G$ *(а именно,* $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$*) имеет место оценка*

$$V^{\boldsymbol{\alpha},*}(f,\mathbf{x}) \le C_{\boldsymbol{\alpha},N}|f(\mathbf{x})|. \tag{7.1}$$

Доказательство. Запишем (4.3) в виде

$$V_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha},+}(f,\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^N}\int_G (|f(\mathbf{x}-\mathbf{t})| - |f(\mathbf{x})|)\Big(\prod_{j=1}^N |v_{m_j,k_j}^{\alpha_j}(t_j)|\Big)d\mathbf{t} + \mathcal{L}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha}}|f(\mathbf{x})| \qquad (7.2)$$

и перейдем в (7.2) к интегрированию по G_0. Выберем и зафиксируем по произвольному $\varepsilon > 0$ такое $\delta > 0$, что выполнено условие (5.1) с

$$\phi(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \Big|\sum_\sigma |f(\mathbf{x}-\mathbf{t}_\sigma)| - 2^N|f(\mathbf{x})|\Big|$$

и $\Phi(\mathbf{x}) = \varepsilon$; указанный выбор возможен в каждой точке Лебега $\mathbf{x}$ функции $|f|$. Тогда интеграл в (7.2) есть сумма, которая состоит из

а) интеграла по $G_0(\{\delta,\dots,\delta\})$, который не превосходит $\varepsilon\mathcal{L}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ согласно лемме 5.1;

б) 2^{N-1} интегралов по всевозможным N-мерным прямоугольникам вида $\overline{G}(\mathbf{Q}_{N,N})$, где хотя бы одно $\theta_j = \delta$, а остальные $\theta_i = 0$. Ясно, что, например,

$$\int_\delta^\pi dt_1 \int_0^\pi dt_2 \ \cdots \int_0^\pi \phi(\mathbf{x},\mathbf{t})\Big(\prod_{j=1}^N |v_{m_j,k_j}^{\alpha_j}(t_j)|\Big)dt_N \le$$

$$\le \frac{C_{\boldsymbol{\alpha}}}{\delta^{\alpha_1+1}(m_1-k_1+1)^{\alpha_1}}\int_{G_0}\phi(\mathbf{x},\mathbf{t})\Big(\prod_{j=2}^N w_{m_j,k_j}^{\alpha_j}(t_j)\Big)d\mathbf{t} \le$$

$$\le \frac{C_{\boldsymbol{\alpha},N}}{\delta^{\alpha_1+1}(m_1-k_1+1)^{\alpha_1}}\Big(\prod_{j=2}^N \ln\frac{3(m_j+1)}{m_j-k_j+1}\Big)f_*(\mathbf{x}), \qquad (7.3)$$

если применить лемму 5.1 и рассуждения п. 6. После деления на $\Lambda_{\mathbf{m},\mathbf{k}}$ левая часть (7.3) не превосходит $\frac{C_{\boldsymbol{\alpha},N}}{\delta^{\alpha_1+1}\ln 3(m_1+1)}f_*(\mathbf{x})$ и стремится к нулю с ростом m_1. Следовательно, указанное разбиение интегралов на слагаемые в (7.2) приводит к оценке

$$V^{\boldsymbol{\alpha},*}(f,\mathbf{x}) \le \varepsilon + C_{\boldsymbol{\alpha},N}|f_*(\mathbf{x})|,$$

откуда ввиду произвольности ε и вытекает (7.1). □

8. Теорема 8.1. *Пусть $f \in L(\ln^+ L)^{N-1}$. Тогда для всех $\boldsymbol{\alpha} \in (0,1]^N$, $r = 1,\dots,N$ и п. в. $\mathbf{x} \in G$ имеет место оценка*

$$\limsup_{\mu\to\infty}\Lambda_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{-1}\Big|\widetilde{V}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha},r}(f,\mathbf{x}) - \widetilde{f}\Big(\mathbf{x},\frac{1}{\mathbf{m}_{r,r}+1}\Big)\Big| \le$$

$$\le C_{\boldsymbol{\alpha},N}\Big\{|f(\mathbf{x})| + \sum_{\mathcal{P}_{r,s}\in\mathcal{P}_r}\lim_{\mu\to\infty}\Big(\prod_{j\in\mathcal{P}_{r,s}}\ln^{-1}\frac{3m_j}{m_j-k_j+1}\Big)\widetilde{f}_{r,s}^*(\mathbf{x})\Big\}. \qquad (8.1)$$

Суммирование в правой части (8.1) *происходит по всем кортежам $\mathcal{P}_{r,s}$, когда s пробегает значения $s = 1,\dots,r-1$; значения же каждого из $k_j \in \{0,\dots,m_j\}$ остаются либо фиксированными, либо зависят от соответствующего m_j.*

Доказательство. Запишем (4.1) в интегральном виде

$$\widetilde{V}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha},r}(f,\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^N}\int_G f(\mathbf{x}-\mathbf{t})\Big(\prod_{j=1}^r \widetilde{v}_{m_j,k_j}^{\alpha_j}(t_j)\Big)\Big(\prod_{j=r+1}^N v_{m_j,k_j}^{\alpha_j}(t_j)\Big)d\mathbf{t},$$

и каждый из интегралов по $[-\pi,\pi]$ разобъем на два: по t_j таким, что $|t_j| \le \frac{1}{m_j+1}$ и $\frac{1}{m_j+1} \le |t_j| \le \pi$; в последнем случае представим

$$\widetilde{v}_{m_j,k_j}^{\alpha_j}(t_j) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t_j}{2} - \widetilde{\widetilde{v}}_{m_j,k_j}^{\alpha_j}(t_j), \quad j = 1,\dots,r,$$

и получим соответствующие разности интегралов. Без ограничения общности оцениваемое уклонение (см. левую часть (8.1)) можно заменить на

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt_{s+1} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sup_{m_1,\dots,m_s} \Big| \int_{\overline{G}(\frac{1}{\mathbf{m}_{r,s}+1})} f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) \prod_{j\in\mathcal{P}_{r,s}} \operatorname{ctg}\frac{t_j}{2} dt_j \Big| \Big) \Big(\prod_{j=s+1}^{N} w_{m_j,k_j}^{\alpha_j}(t_j) \Big) dt_N; \qquad (8.2)$$

для определенности выбран кортеж $\mathcal{P}_{r,s} = \{1,\dots,s\}$, $s = 1,\dots,r-1$. Любая из максимальных функций вида (4.4) суммируема на G, если $f \in L(\ln^+ L)^{N-1}$ (обоснование этого факта, приведенное в [7] для $N = 2$ проходит и при любом $N \geq 2$); значит, в дальнейших рассуждениях можно повторить доказательство теоремы 7.1. Особенностью служит лишь момент деления на $\Lambda_{\mathbf{m},\mathbf{k}}$; так, например, оценка для (8.2) приводит к слагаемому

$$C_{\boldsymbol{\alpha},N} \frac{1}{\Lambda_{\mathbf{m},\mathbf{k}}} \Big(\prod_{j\in\overline{\mathcal{P}}_{r,s}} \ln\frac{3(m_j+1)}{m_j-k_j+1} \Big) \widetilde{f}^*_{r,s}(\mathbf{x}) \leq C_{\boldsymbol{\alpha},N} \Big(\prod_{j\in\mathcal{P}_{r,s}} \ln^{-1}\frac{3m_j}{m_j-k_j+1} \Big) \widetilde{f}^*_{r,s}(\mathbf{x}); \qquad (8.3)$$

выражения вида правой части (8.3), соответствующие всевозможным кортежам длины $s \leq r-1$ и порождают, таким образом, правую часть (8.1). $\square$

9. *Кубические сопряженные частные суммы.* Рассмотрим $\widetilde{S}^r_{\mathbf{m}}(f,\mathbf{x})$ в случае $m_1 = m_2 = \cdots = m_N = \mu$ и положим

$$\widetilde{S}^r_{**}(f,\mathbf{x}) = \sup_{\mu} |\widetilde{S}^r_{\mathbf{m}}(f,\mathbf{x})|.$$

Теорема 9.1. *При всех $r = 0,1,\dots,N$ имеют место оценки*

$$\int_G (\widetilde{S}^r_{**}(f,\mathbf{x}))^p d\mathbf{x} \leq C_{N,r,p} \int_G |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}, \quad p > 1;$$
$$\int_G \widetilde{S}^r_{**}(f,\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq C_{N,r} \Big(1 + \int_G |f(\mathbf{x})| (\ln^+ |f(\mathbf{x})|)^{N+1} d\mathbf{x} \Big). \qquad (9.1)$$

Доказательство. Этот результат при $r = 0$ установлен в [8] (см. также [9]). Его доказательство проходит и при $r \in \{1,\dots,N\}$ поскольку основано только на ограниченности норм оператора [8] $(s_* g)(\mathbf{x}) = \sup_{\eta} |(s_\eta g)(\mathbf{x})|$, где

$$(s_\eta g)(\mathbf{x}) = \int_{R^\nu} g(t_1 \dots t_\nu, x_{\nu+1} \dots x_N) \Big(\prod_{j=1}^{\nu} \frac{e^{-i\eta t_j}}{x_j - t_j} dt_j \Big), \qquad (9.2)$$

действующего из L^p в L^p, $p > 1$; $R = (-\infty,\infty)$ или из $L(\ln^+ L)^{\nu+1}$ в L, причем в роли g может выступать как сама функция f, так и сопряженная по набору переменых $x_{\nu+1},\dots,x_N$ функция $\widetilde{f}(\mathbf{x})$; для определенности выбраны последние $N-\nu$ переменных.

Действительно, рассмотрение $\widetilde{S}^r_{\mathbf{m}}(f,\mathbf{x})$ сводится к интегралам вида (значения ν определяются заданным r)

$$F_\mu(\mathbf{x}) = \int_{G^\nu} \Big(\prod_{j=1}^{\nu} \widetilde{\widetilde{D}}_\mu(t_j) dt_j \Big) \int_{G^{N-\nu}} f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) \Big(\prod_{j=\nu+1}^{N} \operatorname{ctg}\frac{t_j}{2} dt_j \Big) \qquad (9.3)$$

и в силу упомянутых [8] оценок для (9.2) имеем

$$\int_{G^\nu} \sup_{\mu} |F_\mu(\mathbf{x})| dt_1 \dots dt_\nu \leq C_{N,\nu} \Big(1 + \int_{G^\nu} |\widetilde{f}_{r,N-\nu}(\mathbf{x})| \ln^+ |\widetilde{f}_{r,N-\nu}(\mathbf{x})| \Big)^{\nu+1} dx_1 \dots dx_\nu. \qquad (9.4)$$

Дальнейшее интегрирование правой части (9.4) приводит к неравенству

$$\int_{G^{N-\nu}} |\widetilde{f}_{r,N-\nu}(\mathbf{x})|(\ln^+|\widetilde{f}_{r,N-\nu}(\mathbf{x})|)^{\nu+1} dx_{\nu+1}\dots dx_N \le$$

$$\le C_{N,\nu}\Big(1+\int_{G^\nu} |f(\mathbf{x})|(\ln^+|f(\mathbf{x})|)^{\nu+1}(\ln^+|f(\mathbf{x})|)^{N-\nu} dx_{\nu+1}\dots dx_N\Big), \quad (9.5)$$

справедливому в силу оценки (45) работы [7], примененной $N-\nu$ раз. Из (9.4) и (9.5) вытекает оценка

$$\int_G \sup_\mu |F_\mu(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \le C_{N,\nu}\Big(1+\int_G |f(\mathbf{x})|(\ln^+|f(\mathbf{x})|)^{N+1} d\mathbf{x}\Big). \quad \square$$

10. *Прямоугольные суммы Фурье.* Они соответствуют случаю $\alpha_1=\dots=\alpha_N=1$ и $k_1=m_1,\dots,k_N=m_N$ в (4.1). Тогда для п. в. $\mathbf{x}$ правая часть (8.1) обращается в $C_N|f(\mathbf{x})|$, а левая — в

$$S^{*,r}(f,\mathbf{x}) = \limsup_{\mu\to\infty}\Big(\prod_{j=1}^N \ln^{-1} m_j\Big)|\widetilde{S}^r_{\mathbf{m}}(f,\mathbf{x})|.$$

Отсюда будет следовать утверждение а) следующей теоремы.

Теорема 10.1. а) *Пусть* $f\in L(\ln^+ L)^{N-1}$, $r=0,1,\dots,N$. *Тогла оценка*

$$S^{*,r}(f,\mathbf{x}) \le C_N|f(\mathbf{x})| \quad (10.1)$$

имеет место почти всюду в G.

б) *Если* $f\in L(\ln^+ L)^2\bigcap L(\ln^+ L)^{N-1}$, $N=2,3,\dots$, *то почти всюду в* G

$$\lim_{m_i\to\infty}\Big(\lim_{\min\limits_{j\ne i} m_j\to\infty}\Big(\prod_{j\ne i}\ln^{-1} m_j\Big)S_{\mathbf{m}}(f,\mathbf{x})\Big)=0, \quad i=1,\dots,N. \quad (10.2)$$

Доказательство. Утверждение б) при $N=2$ вытекает из результатов [8], докажем его при $N=3,4,\dots$, $f\in L(\ln^+ L)^{N-1}$, выбрав для определенности $i=1$. Положим $\mathbf{x}''=(x_2,\dots,x_N)$, так что теперь $\mathbf{x}=(x_1,\mathbf{x}'')$,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{m_1}(f,x_1,\mathbf{x}'') &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1,-t_1,\mathbf{x}'')D_{m_1}(t_1)dt_1,\\ \mathcal{S}_{**,1}(f,x_1,\mathbf{x}'') &= \sup_{m_1}|\mathcal{S}_{m_1}(f,x_1,\mathbf{x}'')|;\end{aligned} \quad (10.3)$$

тогда

$$|S_{\mathbf{m}}(f,\mathbf{x})| \le \frac{1}{\pi^N}\int_{G^{N-1}} |\mathcal{S}_{m_1}(f;x_1,\mathbf{x}''-\mathbf{t}'')|\prod_{j=2}^N |D_{m_j}(t_j)|dt_j. \quad (10.4)$$

Установим сперва, что при любом значении m_1 и п. в. x_1 $\mathcal{S}_{m_1}(f,x_1,\mathbf{x}'')\in L(\ln^+ L)^{N-2}$ как функция от $\mathbf{x}''$. Для этого заметим, что (идеи [2], с. 423),

$$D_m(t)=\sin\Big[\Big(m+\frac12\Big)(t-x)+\Big(m+\frac12\Big)x\Big]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+\frac12\operatorname{tg}\frac{t}{4}\sin\Big(m+\frac12\Big)t, \quad m=m_1, \quad t=t_1; \quad (10.5)$$

преобразуем первый из синусов суммы в (10.5), затем умножим полученное в правой части (10.5) выражение из трех слагаемых на функцию f и запишем $\mathcal{S}_{m_1}(f;x_1,\mathbf{x}'')$ в виде соответствующей суммы интегралов. Если обозначить

$$f_{m_1}(x_1-t_1,\mathbf{x}'')=f(x_1-t_1,\mathbf{x}'')\sin\Big(m_1+\frac12\Big)(x_1-t_1),$$

то достаточно проверить принадлежность классу $L(\ln^+ L)^{N-2}$ каждой из следующих функций (как функций от $\mathbf{x}''$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{m_1}(x_1-t_1,\mathbf{x}'')\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}dt_1, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_{m_1}(x_1-t_1,\mathbf{x}'')|dt_1.$$

Первая из них — это сопряженная функция $\widetilde{f}_{m_1}(x_1,\mathbf{x}'')$, а вторая не превосходит "одномерной" максимальной функции Харди–Литтлвуда $f_{*,1}(x_1,\mathbf{x}'')$, рассматриваемой для f_{m_1} как функции от x_1. Далее, как и в п. 9, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\widetilde{f}_{m_1}(x_1,\mathbf{x}'')|(\ln^+|\widetilde{f}_{m_1}(x_1,\mathbf{x}'')|)^{N-2}dx_1 \le$$
$$\le C_N\Big(1+\int_{-\pi}^{\pi}|f_{m_1}(x_1,\mathbf{x}'')|(\ln^+|f_{m_1}(x_1,\mathbf{x}'')|)^{N-1}dx_1\Big). \quad (10.6)$$

Поскольку $|f_{m_1}(x_1,\mathbf{x}'')| \le |f(x_1,\mathbf{x}'')|$, то, интегрируя по G^{N-1} обе части неравенства (10.6), получаем

$$\int_G|\widetilde{f}_{m_1}(\mathbf{x})|(\ln^+|\widetilde{f}_{m_1}(\mathbf{x})|)^{N-2}d\mathbf{x} \le C_N\Big(1+\int_G|f(\mathbf{x})|(\ln^+|f(\mathbf{x})|)^{N-1}d\mathbf{x}\Big), \quad (10.7)$$

и точно такая же оценка верна для интеграла, содержащего $f_{1,*}(x_1,\mathbf{x}'')$ вместо сопряженной функции. Из (10.7) вытекает, что для п. в. x_1 и всех m_1 конечен интеграл

$$\int_{G^{N-1}}|\mathcal{S}_{m_1}(f;x_1,\mathbf{x}'')|(\ln^+|\mathcal{S}_{m_1}(f;x_1,\mathbf{x}'')|)^{N-2}d\mathbf{x}'',$$

что и утверждалось.

Теперь в силу (10.4) и (7.1) при $\mu''=\min(m_2,\dots,m_N)$

$$\limsup_{\mu''\to\infty}\Big(\prod_{j=2}^{N}\ln^{-1}m_j\Big)|S_{\mathbf{m}}(f,\mathbf{x})| \le C_N|\mathcal{S}_{m_1}(f;x_1,\mathbf{x}'')|$$

и тогда

$$\mathcal{S}^*(f;x_1,\mathbf{x}'')=\limsup_{m_1\to\infty}\Big(\limsup_{\mu''\to\infty}\Big(\prod_{j=2}^{N}\ln^{-1}(m_j+1)\Big)|S_{\mathbf{m}}(f,\mathbf{x})|\Big) \le C_N\mathcal{S}_{**,1}(f;x_1,\mathbf{x}''). \quad (10.8)$$

Применяя результат [8], имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{S}_{**,1}(f;x_1,\mathbf{x}'')dx_1 \le C\Big(1+\int_{-\pi}^{\pi}|f(x_1,\mathbf{x}'')|(\ln^+|f(x_1,\mathbf{x}'')|)^2dx_1\Big)$$

и, после интегрирования обеих частей этого неравенства по G^{N-1}, в силу (10.8) получаем

$$\int_G\mathcal{S}^*(f;x_1,\mathbf{x}'')dx_1d\mathbf{x}'' \le C_N\Big(1+\int_G|f(\mathbf{x})|(\ln^+|f(\mathbf{x})|)^2d\mathbf{x}\Big), \quad (10.9)$$

причем правая часть (10.9) конечна в силу условия п. б) теоремы. Отсюда вытекает, что $\mathcal{S}^*(f;x_1,\mathbf{x}'')=O_{\mathbf{x}}(1)$ почти всюду в G и, далее, согласно стандартным рассуждениям (напр., [2]) можно перейти от $O_{\mathbf{x}}(1)$ к $o_{\mathbf{x}}(1)$. Соотношение (10.2) установлено. □

Замечание 1. В случае $f\in L^p$, $p>1$, двукратный предел в (10.2) можно заменить на верхний предел при $\mu\to\infty$, т. е. почти всюду в G

$$S_{\mathbf{m}}(f,\mathbf{x})=o\Big(\frac{1}{\ln(\max_j m_j)}\prod_{j=1}^{N}\ln m_j\Big), \quad \mu\to\infty. \quad (10.10)$$

Для доказательства этого утверждения сначала устанавливаем (пользуясь результатом [8]), что при п. в. x_1 $\mathcal{S}_{**,1}(f;x_1,\mathbf{x}'') \in L^p$ как функция от $\mathbf{x}''$. Затем записываем аналог (10.4) с функцией (10.3) на месте $\mathcal{S}_{m_1}$ и используем результат (7.1), взяв (вместо двукратного предела) верхний предел при $\mu \to \infty$ в соотношении-аналоге (10.8). Остается взамен (10.9) использовать L^p-оценку.

Замечание 2. Доказательство теоремы не изменится (см. п. 9), если в (10.3) заменить $D_{m_1}(t_1)$ на $\widetilde{D}_{m_1}(t_1)$.

Замечание 3. Для $f \in L^p, N = 3,4,\dots$ оценка (10.10) лучше ранее известной ([3], п. 5).

11. $(V,0)$-*средние.* Так называем (по аналогии с [6]) последовательность вида

$$\overline{V}^{\boldsymbol{\alpha}',r}_{\mathbf{m},\mathbf{k}'}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\nu_1=k_1}^{m_1} \cdots \sum_{\nu_l=k_l}^{m_l} \left(\prod_{j=1}^{l} \frac{A^{\alpha_j-1}_{m_j-l_j}}{A^{\alpha_j}_{m_j-k_j}} \right) \widetilde{S}^r_{\nu_1\dots\nu_l m\dots m}(f,\mathbf{x}), \quad r \in \{1,\dots,N-l\},$$

где “сопряжение” имеет место по любому набору (кортежу длины r), выбранному из последних $N-l$ переменных, $l = 1,\dots,N-1$; $\mathbf{k}' = (k_1 \dots k_l)$, $k_j = 0,\dots,m_j$; $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1 \dots \alpha_l)$, $\alpha_j > 0$; $j = 1,\dots,l$. Пусть $\mu' = \max\{m_1,\dots,m_l\}$,

$$W^{\boldsymbol{\alpha}',r}_{*}(f,\mathbf{x}) = \limsup_{\mu\to\infty} \left(\sup_{\mathbf{k}'} |\overline{V}^{\boldsymbol{\alpha}',r}_{\mathbf{m},\mathbf{k}'}(f,\mathbf{x})| \left(\prod_{j=1}^{l} \ln^{-1} \frac{3m_j}{m_j-k_j+1} \right) \right),$$

$$\widehat{W}^{\boldsymbol{\alpha}',r}_{*}(f,\mathbf{x}) = \limsup_{m\to\infty} \left[\limsup_{\mu'\to\infty} \left(\sup_{\mathbf{k}'} |\overline{V}^{\boldsymbol{\alpha}',r}_{\mathbf{m},\mathbf{k}'}(f,\mathbf{x})| \left(\prod_{j=1}^{l} \ln^{-1} \frac{3m_j}{m_j-k_j+1} \right) \right) \right].$$

Теорема 11.1. 1) *При всех* $\boldsymbol{\alpha}' \in (0,1]^l$ *имеет место оценка*

$$\int_G (W^{\boldsymbol{\alpha}',r}_{*}(f,\mathbf{x}))^p d\mathbf{x} \le C_{\boldsymbol{\alpha}',N,r,l,p} \int_G |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}, \quad p > 1. \tag{11.1}$$

2) *Если* $\boldsymbol{\alpha}' \in (0,1]^l$, $f \in L(\ln^+ L)^l \bigcap L(\ln^+ L)^{N-l+1}$, *то*

$$\int_G \widehat{W}^{\boldsymbol{\alpha}',r}_{*}(f,\mathbf{x}) d\mathbf{x} \le C_{\boldsymbol{\alpha}',N,r,l} \Big(1 + \int_G |f(\mathbf{x})| (\ln^+ |f(\mathbf{x})|)^{N-l+1} d\mathbf{x} \Big). \tag{11.2}$$

Доказательство утверждения (11.1) повторяет рассуждения, примененные в обосновании замечания 1; утверждение (11.2) доказывается аналогично п. б) теоремы 10.1.

Результат теоремы 11.1 может быть уточнен в следующем частном случае.

Теорема 11.2. *При* $l = 1$, $\alpha_1 \in (0,1]$ *имеет место оценка*

$$\int_G W^{\alpha_1,r}_{*}(f,\mathbf{x}) d\mathbf{x} \le C_{\alpha_1,N,r} \Big(1 + \int_G |f(\mathbf{x})| (\ln^+ |f(\mathbf{x})|)^N d\mathbf{x} \Big). \tag{11.3}$$

Доказательство. Это утверждение известно [6] при $N = 2$, $k_1 = 0$, $r = 0$; докажем его в общем случае. Можно считать конечным значение интеграла в правой части (11.3). По аналогии с (10.3) обозначим

$$\mathcal{S}_{**,N-1}(f;\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{**,N-1}(f;x_1,\mathbf{x}'') = \sup_m \Big| \int_{G^{N-1}} f(x_1,\mathbf{x}''-\mathbf{t}'') \prod_{j=2}^{N} D_m(t_j) dt_j \Big|. \tag{11.4}$$

В силу неравенства (9.1) при п. в. x_1 имеем

$$\int_{G^{N-1}} S_{**,N-1}(f;x_1,\mathbf{x}'') d\mathbf{x}'' \le C_{N,r} \Big(1 + \int_{G^{N-1}} |f(x_1,\mathbf{x}'')| (\ln^+ |f(x_1,\mathbf{x}'')|)^N d\mathbf{x}'' \Big) \tag{11.5}$$

и, следовательно, (11.4) принадлежит классу $L(G^{N-1})$ как функция от $\mathbf{x}''$. Теперь можно проинтегрировать обе части (11.5) по x_1 и затем переменить порядок интегрирования. Тогда при п. в. $\mathbf{x}''$ (11.4) оказывается принадлежащей и классу $L(G^1)$ как функция от x_1. Значит, к правой части неравенства

$$W_*^{\alpha_1,r}(f,\mathbf{x}) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}_{**,N-1}(f;x_1,\mathbf{x}'')w_{m_1,k_1}^{\alpha_1,*}(t_1)dt_1$$

применима оценка (3.3): для п. в. $\mathbf{x}$

$$W_*^{\alpha_1,r}(f,\mathbf{x}) \le C_{\alpha_1,N,r}\mathcal{S}_{**,N-1}(f;\mathbf{x}). \tag{11.6}$$

Поскольку для интеграла функции $\mathcal{S}_{**,N-1}(f;\mathbf{x})$ уже получена оценка сверху в виде правой части (11.3), то результат теоремы вытекает из соотношения (11.6). $\square$

12. *Средние Чезаро* $\sigma_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\alpha},r}(f,\mathbf{x})$. Они соответствуют случаю $k_1 = \dots = k_N = 0$ в (4.1). Из (8.1) стандартным образом вытекает известное ([5], гл. 4., пп. 5, 6) утверждение о сходимости $\sigma_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\alpha},r}(f,\mathbf{x})$ к $\widetilde{f}_{r,r}(\mathbf{x})$ почти всюду в G, если $f \in L(\ln^+ L)^{N-1}$. Для $r=0$ имеем сходимость к $f(\mathbf{x})$. Изучим этот случай подробнее. Обозначим (см. (4.3)) $\sigma_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\alpha},+}(f,\mathbf{x}) = V_{\mathbf{m},\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\alpha},+}(f,\mathbf{x}), \sigma^{\boldsymbol{\alpha},**}(f,\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{m}} \sigma_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\alpha},+}(f,\mathbf{x})$.

Теорема 12.1. *В каждой точке* $\mathbf{x} \in \mathcal{M}^*$ *имеет место соотношение*

$$\sigma^{\boldsymbol{\alpha},**}(f,\mathbf{x}) \asymp f_*(\mathbf{x}). \tag{12.1}$$

Постоянные в оценках снизу и сверху в (12.1) *зависят лишь от* N *и* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha} \in (0,1]^N$.

Доказательство. Согласно (6.1) достаточно установить лишь оценку снизу. Она будет вытекать из следующего вспомогательного утверждения, имеющего и самостоятельный интерес.

Лемма 12.1. *Для каждого* $\mathbf{h}$ (*см.* (4.2)) *существует такое* $\mathbf{m}$, *что при любых рассматриваемых* $\mathbf{k}$ *и* $\boldsymbol{\alpha}$ *имеет место оценка*

$$V_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha},+}(f,\mathbf{x}) \ge C_{\boldsymbol{\alpha},N} f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}). \tag{12.2}$$

Доказательство леммы. Фиксируем $j \in \{1,\dots,N\}$ и выбираем $m = m_j = 0$ (тогда и $k = k_j = 0$) в случае $h = h_j \ge \frac{\pi}{4}$; теперь при каждом $\alpha = \alpha_j$

$$|v_{m,k}^{\alpha}(t)| = 1 \ge \frac{\pi}{4}\frac{1}{h}. \tag{12.3}$$

В случае же $0 < h < \frac{\pi}{4}$ положим

$$\frac{\pi}{2h} - 2 < m \le \frac{\pi}{2h} - 1. \tag{12.4}$$

Тогда для $|t| \le h$ имеем

$$\begin{aligned} v_{m,k}^{\alpha}(t) &= \sum_{\nu=k}^{m} \frac{A_{m-\nu}^{\alpha-1}}{A_{m-k}^{\alpha}} \frac{\sin(\nu+\frac12)t}{\sin\frac12 t} \ge \sum_{\nu=k}^{m} \frac{A_{m-\nu}^{\alpha-1}}{A_{m-k}^{\alpha}} \frac{\frac{2}{\pi}(\nu+\frac12)|t|}{\frac12|t|} \ge \frac{2}{\pi A_{m-k}^{\alpha}} \sum_{\nu=k}^{m} A_{m-\nu}^{\alpha-1}(\nu+1) = \\ &= \frac{2}{\pi A_{m-k}^{\alpha}} \sum_{\nu=k}^{m} (A_{m-\nu}^{\alpha} - A_{m-\nu-1}^{\alpha})(\nu+1) = \frac{2}{\pi A_{m-k}^{\alpha}} \left(A_{m-k}^{\alpha}(k+1) + \sum_{\nu=k+1}^{m} A_{m-\nu}^{\alpha} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(k+1+\frac{A_{m-k-1}^{\alpha+1}}{A_{m-k}^{\alpha}}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{(\alpha+1)(k+1)+m-k}{(\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{12.5}$$

При получении (12.5) использованы известные ([2], с. 130–131) свойства биномиальных коэффициентов и преобразование Абеля.

Согласно (12.5) и (12.4) при $|t| \le h$ справедливо соотношение

$$v_{m,k}^{\alpha}(t) \ge \frac{2}{\pi(\alpha+1)}(m+1) \ge \frac{2}{\pi(\alpha+1)}\frac{\pi-2h}{2h} \ge \frac{1}{2(\alpha+1)h}. \tag{12.6}$$

Следовательно, из (12.3) и (12.6) вытекает оценка

$$|v_{m,k}^{\alpha}(t)| \ge C_{\alpha}\frac{1}{h}, \quad |t| \le h, \tag{12.7}$$

с постоянной $C_{\alpha} = \min(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2(\alpha+1)})$. Теперь согласно (4.3) и (12.7) для каждого выбранного $\mathbf{h}$ найдено такое $\mathbf{m}$, что

$$V_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha},+}(f,\mathbf{x}) \ge \frac{1}{\pi^N}\int_{G_{\mathbf{h}}}|f(\mathbf{x}-\mathbf{t})|\Big(\prod_{j=1}^{N}|v_{m_j,k_j}^{\alpha_j}(t_j)|\Big)d\mathbf{t} \ge C_{\boldsymbol{\alpha},N}f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$$

при всех $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\alpha}$. $\square$

Из соотношения (12.2) при каждом $\mathbf{k}$ следует оценка

$$C_{\boldsymbol{\alpha},N}f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \le \sup_{\mathbf{m}} V_{\mathbf{m},\mathbf{k}}^{\boldsymbol{\alpha},+}(f,\mathbf{x}), \tag{12.8}$$

так что, в частности, $C_{\boldsymbol{\alpha},N}f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \le \sigma^{\boldsymbol{\alpha},**}(f,\mathbf{x})$. Теорема 12.1 доказана.

13. В заключение отметим следующее различие в поведении $V^{\boldsymbol{\alpha},*}(f,\mathbf{x})$ и $V^{\boldsymbol{\alpha},**}(f,\mathbf{x})$: соотношение

$$\int_{G^N}(V^{\boldsymbol{\alpha},*}(f,\mathbf{x}))^p\omega(\mathbf{x})d\mathbf{x} \le C_{\boldsymbol{\alpha},N,p}\int_{G^N}|f(\mathbf{x})|^p\omega(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad p>1,$$

имеет место (как это следует из теоремы 6.1) для всякой суммируемой на G^N функции (веса) $\omega(\mathbf{x}) \ge 0$. Замена же $V^{\boldsymbol{\alpha},*}(f,\mathbf{x})$ на $V^{\boldsymbol{\alpha},**}(f,\mathbf{x})$ в силу (12.8) и известных результатов [10] необходимо повлекла бы (напр., при $N=1$) за собою выполнимость A_p-условия [10] на весовую функцию.

Отметим также, что основные результаты работы получены развитием некоторых (использованных в [3] и [11]) идей Б.П. Осиленкера, которому автор выражает глубокую благодарность.

Литература

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 537 с.
2. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 1. – М.: Мир, 1965. – 615 с.
3. Нахман А.Д., Осиленкер Б.П. *О некоторых линейных сходящихся процессах, порожденных периодическими функциями n переменных.* – Моск. инж.-строит. ин-т. – М., 1978. – 46 с. – Деп. в ВИНИТИ 06.05.78, № 1542-78.
4. Нахман А.Д. *Обобщенные средние Валле-Пуссена кратных рядов Фурье* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 1. – С. 61–69.
5. Жижиашвили Л.В. *Сопряженные функции и тригонометрические ряды.* – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1969. – 271 с.
6. Ash J.M., Welland G. *Convergence, uniquences, and summability of multiple trigonometric series* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 163. – P. 401–436.
7. Zygmund A. *On the boundary values of function of several complex variables.* I // Fund. Math. – 1949. – V. 36. – P. 207–235.
8. Sjo'lin P. *On the convergence everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series* // Arc. Mat. – 1971. – V. 9. – № 1. – P. 65–90.
9. Fefferman C. *On the convergence of multiple Fourier series* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 77. – № 5. – P. 744–745.

10. Muckenhoupt B. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 165. – P. 207–226.
11. Нахман А.Д., Осиленкер Б.П. *О некоторых линейных сходящихся процессах, порожденных периодическими функциями двух переменных* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 10. – С. 105–108.

Тамбовский государственный технический университет

Поступила
30.06.2003