ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 9 (520)

УДК 517.537

Ю.Ф. КОРОБЕЙНИК

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ И АБСОЛЮТНО-ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

1. Основные определения. Постановка задачи

1. Пусть H — полное отделимое локально выпуклое пространство (ПОЛВП) с топологией, определяемой набором преднорм $P = \{p\}$. Пусть, далее, $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ненулевых элементов из H такая, что система элементов $(x_k)_{k=1}^{n}$ линейно независима в H при $n = 1, 2, \dots$ Образуем пространство числовых последовательностей

$$A_1 = A_1(X, H) := \Big\{c = (c_k)_{k=1}^{\infty},\ c_k \in \mathbb{C}:\ \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k \text{ сходится в } H\Big\}.$$

Положим $\forall p \in P$, $\forall c \in A_1$ $\ q_p(c) := \sup\limits_{n \geqslant 1} p\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k\Big)$ и введем в A_1 топологию набором преднорм $Q_P = \{q_p\}_{p \in P}$. Тогда A_1 — ПОЛВП (см., напр., [1], с. 194). При этом оператор $L : \forall c \in A_1 \longrightarrow Lc := \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k \in H$ является линейным непрерывным оператором из A_1 в H (обычно он называется *оператором представления*).

Последовательность X называется *представляющей системой* (ПС) в H, если любой элемент $x \in H$ можно представить в виде сходящегося в H ряда по системе X: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k \geqslant 1$. Очевидно, X — ПС в H тогда и только тогда, когда L — эпиморфизм A_1 на H (см., напр., [1], [2]).

В связи с тем, что разложение по X любого элемента из H не обязательно единственно, имеют смысл следующие определения.

1. ПС X называется *эффективной* (ЭПС), если для любого элемента x из H имеется способ конструктивного определения коэффициентов какого-либо его разложения в сходящийся в H ряд по системе X.

2. ПС X называется *правильной* (ППС), если соответствующий оператор представления L имеет линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО).

3. ПС X называется *эффективно правильной* (ЭППС), если оператор L обладает эффективно определяемым ЛНПО.

Заметим, что если оператор L имеет ЛНПО T, то $\forall x \in H$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (Tx)_k x_k$ сходится в H и его сумма равна x. Так как топология в A_1 мажорирует топологию покоординатной сходимости, то $\forall k \geqslant 1$ $\ \varphi_k(x) := (Tx)_k \in H'$, и коэффициенты данного разложения x зависят от x линейно и непрерывно. Очевидно также, что любая ЭППС является также и ЭПС.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00372).

2. Напомним определение одного важного подкласса ПС. Последовательность $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ ненулевых элементов H называется *абсолютно представляющей системой* (АПС) в ПОЛВП H, если любой элемент x из H представляется рядом

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

абсолютно сходящимся в H. Положим

$$A_2 = A_2(X, H) := \Big\{ c = (c_k)_{k=1}^{\infty} : q_p^o(c) := \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| p(x_k) < \infty \ \forall p \in P \Big\}.$$

Тогда A_2 — также ПОЛВП с набором преднорм $\{q_p^o\}_{p\in P}$, а оператор $L_0 c := \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ линеен и непрерывен (из A_2 в H). При этом X – АПС в H тогда и только тогда, когда L_0 — эпиморфизм A_2 на H (по поводу этих утверждений относительно A_2 и L_0 см., напр., [1], с. 196–197).

Так как здесь разложение в ряд (1) в общей ситуации не обладает свойством единственности, то и в этом случае можно дать (точно так же, как для ПС, с заменой L на L_0 и ПС на АПС) определения эффективной, правильной и эффективно правильной АПС (соответственно ЭАПС, ПАПС, ЭПАПС).

3. В данной работе исследуется задача, частично решенная в [3]:
пусть H_j, $j = 1, 2,$ — ПОЛВП и M — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2. Пусть, далее, X принадлежит одному из шести вышеперечисленных классов ПС в H_1. При каких условиях последовательность $MX := \{Mx_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит тому же классу ПС в H_2?

2. Общие результаты

1. Пусть H_j , $j = 1, 2,$ — ПОЛВП с набором преднорм $P_j = \{p_\alpha^j\}$, $\alpha \in \Omega_j$; $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность некоторых элементов из H_1, любая конечная часть которой линейно независима в H_1 (в результатах, относящихся к АПС, это предположение заменяется более слабым $x_k \neq 0 \quad \forall k \geq 1$). Всюду далее M — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2. Образуем пространство последовательностей $A_1(MX, H_2)$, где

$$MX := (Mx_k)_{k=1}^{\infty}.$$

Предложение 1. *$A_1(X, H_1) \hookrightarrow A_1(MX, H_2)$.*

Доказательство. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k x_k$ сходится в H_1, то в силу непрерывности и линейности оператора M ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k M x_k$ сходится в H_2. Поэтому $A_1(X, H_1) \subseteq A_1(MX, H_2)$. Возьмем теперь любую преднорму $p^{(2)} \in P_2$ в H_2 и найдем число $b < +\infty$ и преднорму $p^{(1)} \in P_1$ в H_1 такие, что $p^{(2)}(Mv) \leq b p^{(1)}(v) \quad \forall v \in H_1$. Тогда $\forall d \in A_1(X, H_1)$

$$q^1_{p^{(2)}}(d) := \sup_{n\geq 1} p^{(2)}\Big(\sum_{k=1}^{n} d_k M x_k\Big) \leq b \sup_{n\geq 1} p^{(1)}\Big(\sum_{k=1}^{n} d_k x_k\Big) = b q_{p^{(1)}}(d). \quad \square$$

Следствие. Если $A_1(MX, H_2) \subseteq A_1(X, H_1)$, то $A_1(MX, H_2) = A_1(X, H_1)$.

Аналогично доказывается

Предложение 2. *$A_2(X, H_1) \hookrightarrow A_2(MX, H_2)$.*

Будем говорить, что последовательность X *M-инвариантна относительно пары H_1, H_2*, если $A_1(MX, H_2) = A_1(X, H_1)$, и *$M$-абсолютно инвариантна относительно той же пары*, если $A_2(MX, H_2) = A_2(X, H_1)$.

Предложение 3. *Пусть последовательность X M-инвариантна (или M-абсолютно инвариантна) относительно (H_1, H_2). Пусть, далее, MX — ПС (соответственно АПС) в H_2. Тогда M — эпиморфизм H_1 на H_2.*

Доказательство. Предположим, что MX — АПС в H_2 и X M-абсолютно инвариантна относительно пары (H_1, H_2). Пусть еще y — произвольный элемент из H_2. Тогда $\exists (d_k)_{k=1}^{\infty} \in A_2(MX, H_2) : y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k M x_k$. Так как $A_2(MX, H_2) = A_2(X, H_1)$, то $(d_k)_{k=1}^{\infty} \in A_2(X, H_1)$ и поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k x_k$ абсолютно сходится в H_1. Если v — его сумма, то $v \in H_1$ и

$$Mv = M\left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k M x_k = y.$$

Точно так же рассматривается случай, когда MX — ПС в H_2 и X M-инвариантна относительно (H_1, H_2). $\square$

Аналогично доказывается

Предложение 4. *Пусть последовательность X M-инвариантна (или M-абсолютно инвариантна) относительно (H_1, H_2) и пусть MX — ЭПС (соответственно ЭАПС) в H_2. Тогда M — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий эффективно определяемый правый обратный.*

Как отмечалось в [3], если X — ПС или ЭПС в H_1, а M — эпиморфизм H_1 на H_2, то MX — ПС (соответственно ЭПС) в H_2. Точно так же, если X — АПС или ЭАПС в H_1, а M — эпиморфизм H_1 на H_2, то MX — АПС (соответственно ЭАПС) в H_2. Учитывая еще предложения 3 и 4, получаем

Следствие 1. Пусть последовательность X M-инвариантна относительно пары (H_1, H_2) и пусть X — ПС (или ЭПС) в H_1. Тогда равносильны такие утверждения: 1) MX — ПС (соответственно ЭПС) в H_2; 2) M — эпиморфизм H_1 на H_2 (соответственно эпиморфизм H_1 на H_2 с эффективно определяемым правым обратным оператором).

Следствие 2. Пусть последовательность X M-абсолютно инвариантна относительно (H_1, H_2) и пусть X — АПС (или ЭАПС) в H_1. Тогда утверждение 2) следствия 1 равносильно тому, что MX — АПС (или ЭАПС) в H_2.

Назовем пару ПОЛВП H_1, H_2 *парой Майкла*, если любой эпиморфизм H_1 на H_2 обладает непрерывным (но не обязательно линейным) правым обратным оператором (ПОО). Как известно, если оба пространства H_j являются пространствами Фреше или оба они — LN^*-пространства (определение последних см., напр., в [4], гл. XI или в [5]), то согласно [6] и [5] H_1, H_2 — пара Майкла. Это определение позволяет дополнить предложение 3 и следствия 1, 2.

Предложение 3′. *Пусть выполнены исходные предположения предложения* 3 *и пусть H_1 и H_2 — пара Майкла. Тогда M — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий непрерывный ПОО.*

Следствие 1′. Пусть последовательность X M-инвариантна относительно пары H_1, H_2 и пусть X — ПС в H_1. Пусть, далее, H_1, H_2 — пара Майкла. Тогда MX — ПС в H_2 в том и только том случае, если выполнено условие 3′) M — эпиморфизм H_1 на H_2 с непрерывным ПОО.

Следствие 2′. Пусть выполнены предположения следствия 2 предложения 4 и пусть H_1, H_2 — пара Майкла. Тогда условие 3′) следствия 1′ равносильно тому, что MX — АПС в H_2.

2. Обратимся теперь к правильным и эффективно правильным системам. В [3] доказано, что если X — ППС (или ЭППС) в H_1, а M — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий (конструктивно определяемый) линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО), то MX — ППС (соответственно ЭППС) в H_2. Установим теперь утверждение в известном смысле обратного характера.

Предложение 5. *Пусть последовательность X M-инвариантна относительно (H_1, H_2) и $A_1(MX, H_2)$ топологически изоморфно $A_1(X, H_1)$. Пусть, далее, MX — ППС в H_2. Тогда M — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий ЛНПО.*

Доказательство. Так как MX — ППС в H_2, то существует ЛНПО $(L_1^M)_R^{-1}$ для оператора представления $L_1^M : A_1(MX, H_2) \to H_2 \mid \forall d \in A_1(MX, H_2) \longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k M x_k \in H_2$. При этом $\forall y \in H_2 \;\; y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ((L_1^M y)_R^{-1})_k M x_k$ и этот ряд сходится в H_2. Но тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ((L_1^M y)_R^{-1})_k x_k$ в силу совпадения пространств $A_1(MX, H_2)$ и $A_1(X, H_1)$ сходится в H_1. Если v — его сумма, то $Mv = y$. При этом $v = By$, где B — линейный оператор из H_2 в H_1.

Покажем, что он непрерывен. Имеем

$$\forall y \in H_2 \;\; y = \sum_{k=1}^{\infty} ((L_1^M y)_R^{-1})_k M x_k, \quad By = \sum_{k=1}^{\infty} ((L_1^M y)_R^{-1})_k x_k, \quad v \in H_1.$$

Далее $\forall p^{(1)} \in P_1 \quad \exists b < \infty, \exists p^{(2)} \in P_2 \;\; \forall d = (d_k)_{k=1}^{\infty} \in A_1(MX, H_2)$

$$\sup_{n \geq 1} p^{(1)}\biggl(\sum_{k=1}^{n} d_k x_k\biggr) \leq b \sup_{n \geq 1} p^{(2)}\biggl(\sum_{k=1}^{n} d_k M x_k\biggr)$$

(в силу топологического изоморфизма $A_1(MX, H_2)$ и $A_1(X, H_1)$). Отсюда

$$p^{(1)}(v) = p^{(1)}\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} ((L_1^M y)_R^{-1})_k x_k\biggr) \leq$$
$$\leq \sup_{n \geq 1} p^{(1)}\biggl(\sum_{k=1}^{n} ((L_1^M y)_R^{-1})_k x_k\biggr) \leq b \sup_{n \geq 1} p^{(2)}\biggl(\sum_{k=1}^{n} ((L_1^M y)_R^{-1})_k M x_k\biggr).$$

Так как $(L_1^M)_R^{-1}$ — линейный непрерывный оператор из H_2 в $A_1(MX, H_2)$, то $\forall p^{(2)} \in P_2 \quad \exists p^{(3)} \in P_2, \exists b_1 < +\infty : \forall d = (d_k)_k^{\infty} \in A_1(MX, H_2)$

$$q^1_{p^{(2)}}(d) = \sup_{n \geq 1} p^{(2)}\biggl(\sum_{k=1}^{n} d_k M x_k\biggr) \leq b_1 p^{(3)}\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} d_k M x_k\biggr).$$

Поэтому

$$p^{(1)}(By) \leq b b_1 p^{(3)}\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} ((L_1^M y)_R^{-1})_k M x_k\biggr) = b b_1 p^{(3)}(y),$$

что и доказывает непрерывность оператора B. $\square$

Следствие. Пусть последовательность X M-инвариантна относительно пары (H_1, H_2), а пространства $A_1(MX_1, H_2)$ и $A_1(X, H_1)$ изоморфны (топологически). Для того чтобы последовательность MX была ППС в H_2, необходимо, а в случае, когда X — ППС в H_1, и достаточно, чтобы M был эпиморфизмом H_1 на H_2, имеющим ЛНПО.

Анализируя доказательство предложения 5, нетрудно убедиться в том, что если MX — ЭППС в H_1, то оператор $B = M_R^{-1}$ можно определить конструктивно. Поэтому справедливо

Предложение 6. *Пусть имеют место исходные предположения предложения 5 с той лишь разницей, что MX — не только ППС, но и ЭППС в H_2. Тогда M — эпиморфизм H_1 на H_2 с конструктивно определяемым ЛНПО.*

Следствие. Пусть последовательность X M-инвариантна относительно пары (H_1, H_2) и пространства $A_1(MX, H_2)$, $A_1(X, H_1)$ топологически изоморфны. Для того чтобы MX была ЭППС в H_2, необходимо, а в случае, когда X — ЭППС в H_1, и достаточно, чтобы M был эпиморфизмом H_1 на H_2 с конструктивно определяемым ЛНПО.

Аналогичные результаты справедливы и для правильных АПС.

Предложение 7. *Пусть последовательность X M-абсолютно инвариантна относительно (H_1, H_2) и $A_2(MX, H_2)$ топологически изоморфно $A_2(X, H_1)$. Пусть, далее, MX — ПАПС в H_2. Тогда M — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий ЛНПО.*

Это предложение доказывается по тому же плану, что и предложение 5. Именно, т. к. MX — ПАПС в H_2, то существует ЛНПО $(L_0^M)_R^{-1}$ для оператора представления

$$L_0^M : A_2(MX, H_2) \to H_2 \mid \forall d \in A_2(MX, H_2) \to L_0^M(d) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k M x_k \in H_2.$$

При этом $\forall y \in H_2 \quad y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ((L_0^M y)_R^{-1})_k M x_k$ и ряд абсолютно сходится в H_2. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ((L_0^M y)_R^{-1})_k x_k$ сходится абсолютно в H_1 и если v — его сумма, то $Mv = y$. При этом $v = By$, где B — линейный оператор из H_2 в $H_1 : \forall y \in H_2 \;\; By = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ((L_0^M y)_R^{-1})_k x_k$. Для любой преднормы $p^{(1)} \in P_1$ найдутся $b < \infty$ и $p^{(2)} \in P_2$ такие, что $\forall d = (d_k)_{k=1}^{\infty} \in A_2(MX, H_2) \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} |d_k| p^{(1)}(x_k) \leq b \sum\limits_{k=1}^{\infty} |d_k| p^{(2)}(M x_k)$. Отсюда

$$p^{(1)}(v) = p^{(1)}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} ((L_0^M y)_R^{-1})_k x_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |((L_0^M y)_R^{-1})_k| p^{(1)}(x_k) \leq b \sum_{k=1}^{\infty} |((L_0^M y)_R^{-1})_k| p^{(2)}(M x_k).$$

В силу непрерывности оператора $(L_0^M)_R^{-1} \quad \forall p^{(2)} \in P_2 \quad \exists p^{(3)} \in P_2$, $\exists b_1 < \infty : \forall h = (h_k)_{k=1}^{\infty} \in A_2(MX, H_2) \;\; q^2_{p^{(2)}}(h) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |h_k| p^{(2)}(M x_k) \leq b_1 p^{(3)}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k M x_k\Big)$. Поэтому

$$p^{(1)}(By) \leq b b_1 p^{(3)}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} ((L_0^M y)_R^{-1})_k M x_k\Big) = b b_1 p^{(3)}(y),$$

и непрерывность оператора B доказана.

Следствие. Пусть последовательность X M-абсолютно иварианта относительно пары (H_1, H_2), а пространства $A_2(MX, H_2)$ и $A_2(X, H_1)$ топологически изоморфны.

Для того чтобы последовательность MX была ПАПС в H_2, необходимо, а в случае X — ПАПС в H_1, и достаточно, чтобы M был эпиморфизмом H_1 на H_2, имеющим ЛНПО.

Справедлив и аналог предложения 6.

Предложение 8. *Пусть имеют место исходные предположения предложения 7, но MX — не только ПАПС, но и ЭПАПС в H_2. Тогда M — эпиморфизм H_1 на H_2 с конструктивно определяемым ЛНПО.*

Следствие. Пусть последовательность X M-абсолютно инвариантна относительно пары (H_1, H_2), а пространства $A_2(MX, H_2)$ и $A_2(X, H_1)$ топологически изоморфны. Для того чтобы MX была ЭАПС в H_2, необходимо, а в случае, когда X — ЭПАПС в H_1, и достаточно, чтобы M был эпиморфизмом H_1 на H_2 с конструктивно определяемым ЛНПО.

3. Изложенные в этом параграфе результаты показывают, что исходные предположения в предложениях 1–3 из ([3], § 2) в известной степени существенны для справедливости их заключений. Отметим еще, что понятие M-инвариантности и M-абсолютной инвариантности является естественным обобщением понятий П-инвариантности и П-абсолютной инвариантности, введенных в ([3], § 4) в частной ситуации, когда M является оператором сужения П функций, определенных на множестве $Q_1 \subset R^p$, $p \geq 1$, и принадлежащих некоторому пространству H_1, на

множество $Q_2 \subset Q_1$; при этом предполагается, что сужение Π действует непрерывно из H_1 в некоторое пространство H_2 функций, определенных на множестве Q_2.

3. Представляющие системы экспонент с мнимыми показателями в пространствах бесконечно дифференцируемых функций

1. Пусть H_j — ПОЛВП ($j = 1, 2$), $x_k \in H_1 \cap H_2$ $\forall k \geq 1$, и X — ПС (или АПС) в H_1. Если X будет ПС (соответственно АПС) в H_2, то будем говорить, что ПС (соответственно АПС) X-продолжима из H_1 в H_2.

Это определение обобщает понятие продолжимой ПС или АПС, введенное в ([2], гл. II, § 2) в более частной ситуации, когда $H_1 \subset H_2$, а также понятия внутрь-продолжимой ПС и АПС (см. там же, а также [7]).

Пусть G — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^p$ и $BC^\infty(G)$ — пространство всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых в G функций, равномерно ограниченных и равномерно непрерывных в G вместе с любой своей частной производной. Топология в $BC^\infty(G)$ задается счетным набором норм

$$\|y\|_n = \sup\{|y^{(\alpha)}(X)| : X \in G, \ |\alpha|_p \leq n\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in N_0^p$, $N_0 = \{0, 1, \dots\}$, $|\alpha|_p = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p$.

В этой топологии $BC^\infty(G)$ — пространство Фреше.

2. Сформулируем относительно сходимости ряда по общей системе экспонент с мнимыми показателями

$$\sum_{|k|_p=0}^{\infty} c_k \exp\left(i \sum_{j=1}^{p} \mu_{k,j} x_j\right), \quad \mu_{k,j} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq p, \quad k = (k_1, \dots, k_p) \in Z^p, \tag{2}$$

где $Z := (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $|k|_p = |k_1| + \dots + |k_p|$, следующие уивер ждения:

1) ряд (2) сходится абсолютно в $BC^\infty(G)$ для любого открытого множества G в $\mathbb{R}^p$;

2) ряд (2) сходится абсолютно в $BC^\infty(G_1)$ для некоторого открытого множества G_1 в $\mathbb{R}^p$;

3) ряд (2) сходится абсолютно в $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$;

4) $\forall m \geq 0$ $\sum\limits_{|k|_p=0}^{\infty} |c_k| \cdot |\mu_k|^m < \infty$, где $\mu_k = (\mu_{k,1}, \dots, \mu_{k,p})$, $|\mu_k|^m = |\mu_{k,1}|^m \cdot \ldots \cdot |\mu_{k,p}|^m$.

Предложение 9. *Утверждения* 1)–4) *равносильны.*

Это предложение доказывается так же, как лемма 2.1 из [8], и основную роль в доказательстве играет равенство $|\exp i\langle \mu_k, X\rangle| = 1 \quad \forall X \in \mathbb{R}^p, \forall \mu_k \in \mathbb{R}^p$ (здесь $\langle \mu_k, X\rangle = \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_{k,j} x_j$).

Пусть теперь $T_{a,b}$ — какой-либо прямоугольный открытый параллелепипед $T_{a,b} = \{X = (x_1, \dots, x_p) : a_k < x_k < b_k, \ k = 1, \dots, p\}$, $-\infty < a_k < b_k < +\infty$, $k = 1, \dots, p$.

Рассмотрим специальную систему экспонент с мнимыми показателями

$$E_p^T = \left\{ \exp 2\pi i \sum_{j=1}^{p} \frac{k_j x_j}{b_j - a_j}, \ k_s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \ s = 1, 2, \dots, p \right\} =: \left\{ \exp\left\langle 2\pi i k, \ \tfrac{X}{b-a} \right\rangle \right\}_{|k|_p=0}^{\infty}.$$

Из предложения 9 следует, что система E_p^T Π-абсолютно инвариантна относительно пары $BC^\infty(T_{a,b})$, $BC^\infty(G)$, где Π — оператор сужения функции из $BC^\infty(T_{a,b})$ на G, если $G \subseteq T_{a,b}$. Нетрудно также показать, пользуясь леммой 2.1 из [8], что E_p^T Π-инвариантна относительно той же пары.

Обозначим символом B_T множество всех пар (X, Y) различных точек $X(x_1, \dots, x_p)$, $Y(y_1, \dots, y_p)$ из $\overline{T}_{a,b}$ таких, что $y_k - x_k = 0, \pm(b_k - a_k)$ при $k \leq p$. Положим еще

$$H_0^T := \{y(X) \in BC^\infty(T_{a,b}) : y^{(\alpha)}(X) = y^{(\alpha)}(Y) \ \forall \alpha \in N_0^p, \ \forall (X, Y) \in B_T\}.$$

В индуцированной из $BC^\infty(T_{a,b})$ топологии H_0^T — его замкнутое пространство и, следовательно, тоже пространство Фреше.

Как нетрудно проверить, для каждой функции $y(X)$ из H_0^T найдется единственное сходящееся в $BC^\infty(T_{a,b})$ разложение по системе E_p^T:

$$y(X) = \sum_{|k|_p=0}^{\infty} y_k \exp\langle 2\pi ik,\ \tfrac{X}{b-a}\rangle. \tag{3}$$

При этом (3) — это ряд Фурье функции $y(X)$ по системе E_p^T. Он сходится абсолютно в $BC^\infty(T_{a,b})$, а его коэффициенты y_k определяются эффективно по известным формулам. Все эти факты легко установить, применив, как в ([9], с. 506), обычный прием интегрирования по частям интегрального представления для y_k и использовав обращение в нуль всех получающихся при этом внеинтегральных членов для любой функции из H_0^T. Таким образом, E_p^T — эффективный абсолютный базис Шаудера в H_0^T. Возникает вопрос о том, будет ли E_p^T представляющей системой в $BC^\infty(G)$ и какого типа (ЭПС, ППС, ЭППС, АПС и т. д.). Здесь и далее G — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^p$.

3. Укажем вначале одно необходимое условие продолжимости E_p^T из H_0^T в $BC^\infty(G)$. Пусть $C(\overline{G})$ — банахово пространство непрерывных на компакте $\overline{G}$ функций с нормой $\|y\|_0 = \max\{|y(X)| : X \in \overline{G}\}$.

Теорема 1. *Если система E_p^T полна в $C(\overline{G})$, то $(\overline{G}\times\overline{G})\bigcap B_T = \emptyset$.*

Доказательство. Допустим, что $(X_0, Y_0) \in (\overline{G}\times\overline{G})\bigcap B_T$. Так как $X_0 = (x_{1,0},\dots,x_{p,0}) \neq Y_0 = (y_{1,0},\dots,y_{p,0})$, то $\exists k_0 \le p : y_{k_0,0} - x_{k_0,0} = \pm(b_{k_0} - a_{k_0})$. Пусть для определенности $y_{k_0,0} - x_{k_0,0} = b_{k_0} - a_{k_0}$. Рассмотрим функцию $y_1(X) = x_{k_0}$ из $BC^\infty(G)$. Ясно, что $y_1(X_0) \neq y_1(Y_0)$. В то же время в силу полноты E_p^T в $C(\overline{G})$ найдется последовательность функций $\{g_n(X)\}_{n=1}^\infty$:

$$g_n(X) = \sum_{k_j=-m_n}^{+m_n} a_{k,n}\exp\langle 2\pi ki,\ \tfrac{X}{b-a}\rangle,\quad n=1,2,\dots\ ;\quad m_n \in N_0,\quad k=(k_1,\dots,k_p),$$

сходящаяся к $y_1(X)$ равномерно на $\overline{G}$. Отсюда

$$y_1(X_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(X_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(Y_0) = y_1(Y_0),$$

что невозможно. $\square$

Так как $y_1(X) \in BC^\infty(G)$ и $BC^\infty(G) \hookrightarrow C(\overline{G})$, то точно так же получаем

Теорема 2. *Если система E_p^T полна в $BC^\infty(G)$, то $(\overline{G}\times\overline{G})\bigcap B_T = \emptyset$.*

Следствие. Если $G \subseteq T$ и E_p^T — ПС в $BC^\infty(G)$, то $(\overline{G}\times\overline{G})\bigcap B_T = \emptyset$.

Теорема 3. *Если $G \subseteq T$ и $(\overline{G}\times\overline{G})\bigcap B_T = \emptyset$, то*

1) *E_p^T — ПС в $BC^\infty(G)$ тогда и только тогда, когда* a_1) *существует непрерывный оператор продолжения любой функции из $BC^\infty(G)$ до функции из H_0^T (т. е. непрерывный оператор продолжения $BC^\infty(G)$ в H_0^T);*
2) *E_p^T — ЭПС в $BC^\infty(G)$ тогда и только тогда, когда* a_2) *можно конструктивно определить оператор продолжения $BC^\infty(G)$ в H_0^T;*
3) *E_p^T — ППС в $BC^\infty(G)$ тогда и только тогда, когда* a_3) *существует линейный непрерывный оператор продолжения $BC^\infty(G)$ в H_0^T;*
4) *E_p^T — ЭППС в $BC^\infty(G)$ $\iff$* a_4) *можно определить конструктивно линейный непрерывный оператор продолжения $BC^\infty(G)$ в H_0^T;*
5) *E_p^T — АПС в $BC^\infty(G)$ $\iff$ выполнено* a_1)*;*
6) *E_p^T — ЭАПС в $BC^\infty(G)$ $\iff$ имеет место* a_2)*;*

7) E_p^T — *ПАПС в* $BC^\infty(G)$ $\iff$ *справедливо* a_3);
8) E_p^T — *ЭПАПС в* $BC^\infty(G)$ $\iff$ *выполнено* a_4).

Доказательство. Так как топология в H_0^T индуцируется из $BC^\infty(T_{a,b})$, то E_p^T П-инвариантна и П-абсолютно инвариантна относительно пары H_0^T, $BC^\infty(G)$. Кроме того, если оператор сужения П пространства H_0^T на $BC^\infty(G)$ является эпиморфизмом и если B — какой-либо его правый обратный оператор, то $\forall y \in BC^\infty(G)\quad \Pi By = By|_G = y$. Таким образом, любой такой оператор B является оператором продолжения $BC^\infty(G)$ в H_0^T. При этом, т. к. H_0^T, $BC^\infty(G)$ — пара Майкла, то П отображает H_0^T на $BC^\infty(G)$ тогда и только тогда, когда существует непрерывный оператор продолжения $BC^\infty(G)$ в H_0^T. Учитывая сказанное, заключаем, что утверждения 1)–2) непосредственно вытекают из следствия 1 предложения 4; утверждение 3) — из следствия предложения 5; утверждение 4) — из следствия предложения 6; утверждения 5)–6) — из следствия 2 предложения 4; утверждение 7) — из следствия предложения 7 и, наконец, утверждение 8) — из следствия предложения 8.

Для пространства $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$ введем подпространство

$$H_0^{\mathbb{R}^p} := \{f(X) \in BC^\infty(\mathbb{R}^p) : f^{(\alpha)}(X) = f^{(\alpha)}(Y)\ \forall \alpha \in N_0^P,\ \forall (X,Y) \in B_{\mathbb{R}^p}\},$$

где $B_{\mathbb{R}^p}$ — множество всех пар различных точек X, Y из $\mathbb{R}^p$ таких, что $y_k - x_k = l_k(b_k - a_k)$ при $k = 1, 2, \dots, p$, где $l_k \in Z = \{0, \pm1, \pm2, \dots\}$. Подпространство $H_0^{\mathbb{R}^p}$ в топологии, индуцированной из $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$, является пространством Фреше. Положим $H_1 = H_0^{\mathbb{R}^p}$, $H_2 = BC^\infty(G)$, где G — открытое множество в $\mathbb{R}^p$. Тогда H_1, H_2 — пара Майкла, а E_p^T П-инвариантна и П-абсолютно инвариантна относительно этой пары. Здесь П — оператор сужения значений любой функции из $H_0^{\mathbb{R}^p}$ на множество G.

Точно такими же рассуждениями, как в случае теоремы 3, и при тех же исходных предположениях устанавливаем полный ее аналог — теорему $3'$, для формулировки которой достаточно лишь заменить H_0^T на $H_0^{\mathbb{R}^p}$ в теореме 3.

4. Пусть G — открытое множество, лежащее внутри $T_{a,b}$, и пусть $d = \rho(\overline{G}, \partial T_{a,b})$. Допустим, что имеется оператор M_0 продолжения из $BC^\infty(G)$ в H_0^T. Как известно (см., напр., [10], гл. I, § 1, п. 1.4), можно (эффективно) построить функцию $b(t)$ из подпространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$ с компактным носителем такую, что $b|_{\overline{G}} = 1$ и носитель функции $b(X)$ находится в $(G)_{d/2} := \{X \in \mathbb{R}^p : \rho(X, \overline{G}) \le d/2\}$. Тогда оператор $B_0 : B_0 y = b(X) M_0 y$ отображает $BC^\infty(G)$ в $C_0^\infty(T_{a,b}) \subset H_0^T$. Нетрудно заметить, что если M_0 (как оператор из $BC^\infty(G)$ в H_0^T) непрерывен, линеен или конструктивно определен, то тем же свойством обладает и B_0 (как оператор из $BC^\infty(T_{a,b})$ и из $BC^\infty(G)$ в H_0^T). Кроме того, оператор B_0 отображает $BC^\infty(G)$ в $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$ (и в $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$) и линеен, непрерывен или конструктивно определен, если соответствующим свойством обладает оператор M_0: $BC^\infty(G) \to H_0^T$.

Пусть, обратно, имеется оператор M_1 продолжения из $BC^\infty(G)$ в $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$. Тогда $B_1 y := b(X) M_1 y$ — оператор продолжения из $BC^\infty(G)$ в H_0^T (и из $BC^\infty(G)$ в $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$), который обладает свойством непрерывности, линейности, конструктивной определимости, если соответствующее свойство имеется у M_1. Используя теорему 3 и ее аналог (теорему $3'$) для $H_0^{\mathbb{R}^p}$, а также П-инвариантность и П-абсолютную инвариантность системы E_p^T относительно всех пар $(BC^\infty(G), H_0^T)$, $(BC^\infty(G), H_0^{\mathbb{R}^p})$, $(BC^\infty(G),\ C_0^\infty(T_{a,b}))$, $(BC^\infty(G), BC^\infty(\mathbb{R}^p))$, приходим к такому результату.

Теорема 4. *Пусть G — открытое множество, лежащее внутри $T_{a,b}$. Тогда в каждой из приведенных ниже четырех групп утверждений все они равносильны друг другу.*

I.1) E_p^T — *ПС в* $BC^\infty(G)$;
I.2) E_p^T — *АПС в* $BC^\infty(G)$;
I.3) *существует оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* H_0^T;
I.4) *имеется оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $C_0^\infty(T_{a,b})$;
I.5) *существует оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$;

I.6) *существует оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $H_0^{\mathbb{R}^p}$;
I.7) *имеется оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $BC^\infty(\mathbb{R}^p)$.
II.1) E_p^T — *ЭПС в* $BC^\infty(G)$;
II.2) E_p^T — *ЭАПС в* $BC^\infty(G)$;
II.3)–II.7) *оператор из* I.3)–I.7) *можно определить конструктивно.*
III.1) E_p^T — *ППС в* $BC^\infty(G)$;
III.2) E_p^T — *ПАПС в* $BC^\infty(G)$;
III.3)–III.7) *оператор продолжения из* I.3)–I.7) *линеен и непрерывен.*
IV.1) E_p^T — *ЭППС в* $BC^\infty(G)$;
IV.2) E_p^T — *ЭПАПС в* $BC^\infty(G)$;
IV.3)–IV.7) *оператор из* I.3)–I.7) *линеен, непрерывен и может быть конструктивно определен.*

Замечание. Из теоремы 2.4 работы [8] следует, что любое из утверждений I.1)–I.7) равносильно такому: I.8) в $BC^\infty(G)$ имеется хотя бы одна АПС экспонент с чисто мнимыми показателями $E_\mu = \{\exp\langle i\mu_k, X\rangle\}_{|k|_p=0}^\infty$, $\mu_k \in \mathbb{R}^p$.

5. Пусть $X_0 \in \mathbb{R}^p$ и $C_{X_0}^\infty := \underset{\overrightarrow{m}}{\operatorname{ind}}\, C^\infty(Q_m)$, $Q_m = \{X \in \mathbb{R}^p : |X - X_0|_p \leqslant \frac{1}{m}\}$, $m = 1, 2, \ldots$ Пусть, далее, $E_\mu := \{\exp\langle i\mu_k, X\rangle\}_{|k|_p=0}^\infty$, где $\mu_k \in \mathbb{R}^p \quad \forall k \geq 1$.

Рассмотрим какое-либо полное отделимое бочечное пространство H бесконечно дифференцируемых функций такое, что

$$BC^\infty(\mathbb{R}^p) \hookrightarrow H \hookrightarrow C_{X_0}^\infty. \tag{4}$$

Из леммы 2.1 работы [8] следуют равенства

$$A_2(E_\mu, C_{X_0}^\infty) = A_2(E_\mu, BC^\infty(\mathbb{R}^p)) = \Big\{ d = (d_k)_{|k|_p=0}^\infty :$$
$$\max \Big[\sum_{|k|_p=0}^\infty |d_k|\, |(\mu_k)^\alpha| : |\alpha|_p \leq m,\ \alpha \in N_0^p \Big] =: [d]_m < \infty,\ m = 1, 2, \ldots \Big\}.$$

Отсюда $A_2(E_\mu, C_{X_0}^\infty) = A_2(E_\mu, H) = A_2(E_\mu, BC^\infty(\mathbb{R}^p))$. Топология в каждом из этих трех пространств, совпадающих по набору элементов, задается нормами $[d]_m$, и все они — пространства Фреше.

Предположим, что E_μ — АПС в H. Тогда оператор представления $L_0 : \forall \alpha \in A_2 \quad (E_\mu, H) \to \sum\limits_{\|k|_p=0}^\infty d_k \exp\langle i\mu_k, X\rangle \in H$ является эпиморфизмом $A_2(E_\mu, H)$ на H. Так как $A_2(E_\mu, H)$ совершенно полно, а H бочечно, то по теореме об открытом отображении (см. [11], с. 170, теорема 7) L_0 открыто. Но тогда по предложению 13 из ([11], с. 174) H — пространство Фреше. Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пусть* H — *полное отделимое ЛВП со свойством* (4) *и пусть в* H *имеется хотя бы одна АПС экспонент с чисто мнимыми показателями. Тогда* H — *пространство Фреше.*

Напомним еще, что теорема 5 не допускает прямого обращения. Действительно, если G — открытое множество в $\mathbb{R}^p$, $G = \bigcup\limits_{n=1}^\infty Q_n$, где $\forall n \geq 1 \quad Q_n$ — толстый компакт (определение толстого компакта можно найти, напр., в [8], [9], [12]) и $Q_n \subset Q_{n+1} \subset G$, то, как показано в [8], в пространстве Фреше $C^\infty(G) = \underset{\overleftarrow{n}}{\operatorname{proj}}\, C^\infty(Q_n)$ нет ни одной АПС экспонент с чисто мнимыми показателями. В связи с этим возникают задачи о характеризации пространства Фреше, имеющего хотя бы одну АПС экспонент вида E_μ, а также установления критерия того, что какая-либо фиксированная система E_μ является АПС в данном пространстве Фреше бесконечно-дифференцируемых функций. Возможно, что эти задачи можно решить с помощью методов и результатов статей [13], [14], но это уже выходит за рамки данной работы.

Литература

1. Коробейник Ю.Ф. *Об одной двойственной задаче.* I. *Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше* // Матем. сб. – 1975. – Т. 97. – № 2. – С. 193–226.
2. Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы* // УМН. – 1981. – Т. 36. – Вып. 2. – С. 73–126.
3. Коробейник Ю.Ф. *О некоторых классах представляющих систем и их преобразованиях.* I // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, Казанское матем. об-во. – 2002. – Т. 14. – С. 171–183.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
5. Епифанов О.В. *О существовании непрерывного правого обратного оператора в одном классе локально выпуклых пространств* // Изв. Северо-Кавказск. Научного центра высшей школы. Сер. естеств. наук. – 1991. – № 3. – С. 3–4.
6. Michael E. *Continuous selections.* I // Annals of Math. – 1956. – V. 63. – № 2. – P. 361–382.
7. Коробейник Ю.Ф., Леонтьев А.Ф. *О свойствах внутрь-продолжаемости систем экспонент* // Матем. заметки. – 1980. – Т. 28. – Вып. 2. – С. 243–254.
8. Korobeinik Yu.F. *On absolutely representing systems in spaces of infinitely differentiable functions* // Studia Math. – 2000. – V. 139. – № 2. – P. 175–188.
9. Korobeinik Yu.F. *Representing systems of exponentials in the spaces of infinitely-differentiable functions and extendability in the sense of Whitney* // Turkish Journ. of Math. – 2001. – V. 25. – № 4. – P. 503–517.
10. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Т. 1. *Теория распределений и анализ Фурье.* – М.: Мир, 1986. – 462 с.
11. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. *Топологические векторные пространства.* – М.: Мир, 1967. – 256 с.
12. Коробейник Ю.Ф. *О толстых компактах в* $\mathbb{R}^p$ // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. – 2002. – Юбилейный выпуск. – С. 93–94.
13. Коробейник Ю.Ф. *Абсолютно представляющие семейства* // Матем. заметки. – 1987. – Т. 42. – № 5. – С. 670–680.
14. Коробейник Ю.Ф. *Абсолютно представляющие семейства и реализация сопряженного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 68–76.

Ростовский государственный университет

Поступила 01.07.2003