ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 512.536

Н. КЕХАЙОПУЛУ, М. ЦИНГЕЛИС

ПРИСОЕДИНЕНИЕ НУЛЯ К УПОРЯДОЧЕННЫМ ГРУППОИДАМ-ПОЛУГРУППЕ

Пусть S — упорядоченный группоид без нуля. Обозначим через S^0 упорядоченный группоид, возникающий в результате присоединения к S нулевого элемента. Известно, что присоединение нуля к упорядоченному группоиду осуществляется единственным способом с точностью до изоморфизма. В данной статье будет установлено, что два упорядоченных группоида S и T изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны группоиды S^0 и T^0, получаемые из S и T присоединением нулевого элемента (символически $S \cong T$ тогда и только тогда, когда $S^0 \cong T^0$). Более того, получено описание 0-простых упорядоченных полугрупп S, для которых существует такая упорядоченная полугруппа T, что $S \cong T^0$. Это описание проводится на языке левых (соответственно правых) делителей нуля и нильпотентных элементов. Наконец, доказывается, что хотя присоединение нуля к группоиду может быть осуществлено с точностью до изоморфизма единственным образом, такая единственность нарушается при присоединении обобщенного нуля к упорядоченному группоиду.

1. Если $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченный группоид и 0 является элементом S, то $0x = x0 = 0$ и $0 \leq x$ для всех $x \in S$ [1]. Пусть $(S,\cdot,\leq)$, $(T,*,\preceq)$ — упорядоченные группоиды, а $f : S \to T$ — отображение S в T. f называется *изотонным*, если $x \leq y$ влечет $f(x) \preceq f(y)$; *обратно изотонным*, если для всех $x, y \in S$ $f(x) \preceq f(y)$ влечет $x \leq y$; *гомоморфизмом*, если оно изотонно и для всех $x, y \in S$ $f(xy) = f(x) * f(y)$; *изоморфизмом*, если оно является гомоморфизмом, отображением "на" и обратно изотонно. Группоиды S и T называются изоморфными ($S \cong T$), если между ними существует изоморфизм. Каждое обратно изотонное отображение является 1–1-отображением. Действительно, если $x, y \in S$ и $f(x) = f(y)$, то, поскольку $f(x) \preceq f(y)$, имеем $x \leq y$. Так как $f(y) \preceq f(x)$, имеем также $y \leq x$. Следовательно, $x = y$ [2].

Пусть $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченный группоид без нуля и $S^0 = S \cup \{0\}$, где $0 \notin S$. Определим операцию умножения "$*$" и порядок "$\leq_0$" на S^0 следующим образом:

$$a * b = \begin{cases} a \cdot b, & \text{если } a, b \in S; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\leq_0 = \leq \cup \{(0, x) : x \in S^0\}.$$

Тогда $(S^0, *, \leq)$ становится упорядоченным группоидом и 0 — нулевым элементом S^0. Множество S является подгруппоидом S^0. Очевидно, если $a, b \in S$, то $a * b = ab \in S$. Если $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченная полугруппа, то $(S^0, *, \leq)$ также является упорядоченной полугруппой.

Покажем, что присоединение нуля упорядоченному группоиду $(S,\cdot,\leq)$ возможно с точностью до изоморфизма единственным образом. Для этого рассмотрим новый группоид $(S^\theta, \bullet, \leq_\theta)$, где

$$a \bullet b = \begin{cases} ab, & \text{если } a, b \in S; \\ \theta & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке специального исследовательского гранта № 70/4/4205 Афинского университета.

и

$$\leq_\theta = \leq \cup \{(\theta, x) \mid x \in S^\theta\}.$$

Покажем, что $(S^\theta, \bullet, \leq_\theta) \cong (S^0, *, \leq_0)$. Для этого рассмотрим отображение $\varphi : (S^0, *, \leq_0) \to (S^\theta, \bullet, \leq_\theta)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in S; \\ \theta, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, φ — отображение на все множество S^θ.

1) Отображение φ всюду и корректно определено. Действительно, пусть $x \in S^0$. Если $x \in S$, то $\varphi(x) = x \in S \subseteq S^0$. Если же $x = 0$, то $\varphi(x) = \theta \in S^0$. Кроме того, если $x, y \in S^0$ и $x = y$, то $x \in S \to \varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y$, поэтому $\varphi(x) = \varphi(y)$. Если же $x \notin S$, то $x = 0$ и $\varphi(x) = \theta = \varphi(y)$.

2) φ — гомоморфизм. Действительно, пусть $x, y \in S^0$. Покажем, что $\varphi(x * y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$. Возможны следующие случаи.

A) Если $x, y \in S$, то $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y$, $x * y = xy \in S$, $\varphi(x * y) = xy$, $x \bullet y = xy$ и $\varphi(x * y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$.

B) Если $x \in S$, $y = 0$, то $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = \theta$, $x * y = 0$, $\varphi(x * y) = \theta$ и $\varphi(x) \bullet \varphi(y) = \theta = \varphi(x * y)$.

C) Если $x = 0$, то $\varphi(x) = \theta$, $x * y = 0$, $\varphi(x * y) = \theta$. Так как $y \in S^0$, имеем $\varphi(y) = S^\theta$. Теперь $\varphi(x) \bullet \varphi(y) = \theta = \varphi(x * y)$.

Пусть теперь $x \leq_0 y$. Покажем, что $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$.

A) Пусть $x \in S$. Так как $(x, y) \in \leq_0$, имеем $(x, y) \in \leq$ или $(x, y) = (0, t)$, где $t \in S^0$. Поскольку $x \in S$, то $x \neq 0$. Таким образом, имеем $(x, y) \in \leq \subseteq \leq_\theta$. Так как $x, y \in S$, имеем $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y$. Поэтому $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$.

B) Пусть $x = 0$. Тогда $\varphi(x) = \theta$. Так как $y \in S^0$, имеем $\varphi(y) \in S^\theta$. Тогда $\theta \leq_\theta \varphi(y)$. Поэтому $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$.

3) φ является обратно изотонным отображением. Действительно, пусть $x, y \in S^0$ и $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$. Покажем, что $x \leq_0 y$.

A) Пусть $x \in S$. Тогда $\varphi(x) = x$. Так как $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$ и $\varphi(x) \neq \theta$ (в противном случае $x \in S$ и $x = \theta$, что невозможно), имеем $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ и $\varphi(y) \in S$. Если $y \notin S$, то $y = 0$, $\varphi(y) = \theta$ и $\theta \in S$. Противоречие. Поэтому $y \in S$, $\varphi(y) = y$, $x \leq y$ и $x \leq_0 y$ (поскольку $\leq \subseteq \leq_0$).

B) Если $x = 0$, то $x = 0 \leq_\theta y$ по определению.

4) Остается показать, что φ является отображением "на". Действительно, пусть $y \in S^\theta$. Если $y \in S$, то $y \in S^0$ и $\varphi(y) = y$. Если же $y = \theta$, то $\varphi(0) = \theta$, где $0 \in S^0$.

Ниже для упорядоченных группоидов $(S, \cdot, \leq)$ и $(T, \circ, \preceq)$ через $(S^0, *, \leq_0)$ и $(T^\theta, \bullet, \leq_\theta)$ обозначим группоиды, которые получаются из S и T соответственно присоединением нулевых элементов. Если $(S, \cdot, \leq)$ изоморфно $(T, \circ, \preceq)$ под отображением f, то это записываем как $(S, \cdot, \leq) \underset{f}{\cong} (T^\theta, \bullet, \leq_\theta)$.

Предложение 1. *Пусть $(S, \cdot, \leq)$ и $(T, \circ, \preceq)$ — такие упорядоченные группоиды, что $(S, \cdot, \leq) \underset{f}{\cong} (T, \circ, \preceq)$. Тогда $(S^0, *, \leq_0) \cong (T^\theta, \bullet, \leq_\theta)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi : (S^0, *, \leq_0) \to (T^\theta, \bullet, \leq_\theta) \mid x \to \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in S; \\ \theta, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

1) Отображение φ определено корректно. Действительно, пусть $x \in S^0$. Тогда если $x \in S$, то $\varphi(x) = f(x) \in T \subseteq T^\theta$. Если же $x = 0$, то $\varphi(x) = \theta \in T^\theta$. Пусть теперь $x, y \in S^0$ и $x = y$. Если $x \in S$, то $\varphi(x) = f(x)$, $\varphi(y) = f(y)$, $f(x) = f(y)$. Поэтому $\varphi(x) = \varphi(y)$. Если $x = 0$, то $\varphi(x) = \theta = \varphi(y)$.

2) Покажем, что φ является гомоморфизмом. Действительно, пусть $x, y \in S^0$. Рассмотрим несколько случаев.

A) Если $x, y \in S$, то $x*y = xy$, $\varphi(x*y) = \varphi(xy)$, $xy \in S$ и $\varphi(xy) = f(xy) = f(x) \circ f(y)$, поскольку f является гомоморфизмом. Так как $f(x), f(y) \in T$, то $f(x) \bullet f(y) = f(x) \circ f(y)$. Так как $x, y \in S$, имеем $\varphi(x) = f(x)$, $\varphi(y) = f(y)$. Поэтому $\varphi(x*y) = \varphi(xy) = f(x) \circ f(y) = f(x) \bullet f(y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$.

B) Если $x = 0$ и $y \in S^0$, то $x * y = 0$, $\varphi(x * y) = \theta$. Так как $x = 0$, имеем $\varphi(x) = \theta$ и, поскольку $y \in S^0$, имеем $\varphi(y) \in T^\theta$. Поэтому $\varphi(x) \bullet \varphi(y) = \theta$ и $\varphi(x * y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$.

C) Пусть $x \in S^0$, $y = 0$. В этом случае доказательство аналогично случаю B).

Остается показать, что если $x \leq_0 y$, то $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$.

A) Если $x = 0$, то $\varphi(x) = \theta$. Так как $y \in S^0$, имеем $\varphi(y) \in T^\theta$. Поэтому $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$.

B) Пусть $x \neq 0$. Тогда $x \leq y$, поскольку $(x, y) \in \leq_0$. Поэтому $f(x) \preceq f(y)$. Но $\preceq \subseteq \leq_\theta$, поэтому $f(x) \leq_\theta f(y)$. Так как $x, y \in S$, имеем $\varphi(x) = f(x)$, $\varphi(y) = f(y)$. Следовательно, $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$.

3) φ является обратно изотонным отображением. Действительно, пусть для $x, y \in S^0$ справедливо $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$.

A) Если $x = 0$, то $x \leq_0 y$, т. к. $y \in S^0$.

B) Пусть $x \neq 0$. Тогда $\varphi(x) = f(x) \in T$, поскольку $x \in S$. Так как $\theta \in T$, имеем $\varphi(x) \neq \theta$. В силу $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$ и $\varphi(x) \neq \theta$ имеем $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$, поэтому $\varphi(y) \in T$. Если $y = 0$, то $\varphi(y) = \theta$ и $\theta \in T$, что невозможно. Поэтому $y \neq 0$ и $\varphi(y) = f(y)$. Но тогда $f(x) = \varphi(x) \preceq \varphi(y) = f(y)$. Отсюда, поскольку f является гомоморфизмом, $x \leq y$. Так как $\leq \subseteq \leq_0$, имеем $x \leq_0 y$.

4) Покажем, что φ отображает S^0 на все множество T^θ. Пусть $y \in T^\theta$. Если $y \in T$, то существует $x \in S$ такой, что $f(x) = y$. Так как $x \in S$, имеем $\varphi(x) = f(x)$. Для $x \in S^0$ имеем $\varphi(x) = y$. Пусть $y = \theta$. Тогда $0 \in S^0$ и $\varphi(0) = \theta$. $\square$

Предложение 2. *Пусть $(S, \cdot, \leq)$ и $(T, \circ\ \preceq)$ — такие упорядоченные группоиды, что $(S^0, *, \leq_0) \underset{\varphi}{\cong} (T^\theta, \bullet, \leq_\theta)$. Тогда $(S, \cdot, \leq) \cong (T, \circ, \preceq)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $f : (S, \cdot, \leq) \to (T, \circ, \preceq)$, где $x \to \varphi(x)$. Имеем $\varphi(0) = \theta$. Действительно, т. к. $\theta \in T^\theta$, то $\varphi(y) = \theta$ для некоторого $y \in S^0$. Имеем $0 * y = 0$, поэтому

$$\varphi(0) = \varphi(0 * y) = \varphi(0) \bullet \varphi(y) = \varphi(0) \bullet \theta = \theta.$$

Если $x \in S^0$ и $\varphi(x) = \theta$, то $x = 0$. Действительно, по доказанному ранее имеем $\varphi(x) = \varphi(0)$, отсюда $x = 0$, т. к. φ является 1–1-отображением.

Покажем, что отображение f определено корректно. Пусть $x \in S$. Тогда $f(x) = \varphi(x) \in T^\theta = T \cup \{\theta\}$. Если $\varphi(x) = \theta$, то по предыдущему $x = 0$ и $0 \in S$, что невозможно. Поэтому $\varphi(x) \in T$. Пусть теперь $x, y \in S$ и $x = y$. Так как $x, y \in S$, имеем $f(x) = \varphi(x)$, $f(y) = \varphi(y)$. Но $x \in S^0$, поэтому $\varphi(x) = \varphi(y)$, откуда $f(x) = f(y)$.

Если $x, y \in S$, то $f(xy) = f(x) \circ f(y)$. Действительно, $f(x) = \varphi(x) \in T$, $f(y) = \varphi(y) \in T$. Так как $xy \in S$, то $f(x, y) = \varphi(x, y)$. Кроме того, $x * y = xy \in S$, $\varphi(x * y) = \varphi(xy)$. С другой стороны, $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$. Действительно, поскольку $\varphi(x), \varphi(y) \in T$, то $\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y) = \varphi(x * y)$. Поэтому

$$f(xy) = \varphi(xy) = \varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y) = f(x) \circ f(y).$$

Пусть теперь $x \leq y$. Так как $\leq \subseteq \leq_0$, то $x \leq_0 y$. Так как $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$ и $\varphi(x) \in T$, то $\varphi(x) \neq \theta$. Отсюда $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$. Кроме того, $f(x) = \varphi(x)$ и $f(y) = \varphi(y)$. Поэтому $f(x) \preceq f(y)$.

Чтобы показать, что f обратно изотонно, предположим, что $f(x) \preceq f(y)$ для $x, y \in S$. Имеем $f(x) = \varphi(x)$, $f(y) = \varphi(y)$, поэтому $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$. Отсюда снова $\varphi(x) \leq_\theta \varphi(y)$. Из обратной изотонности φ вытекает $x \leq_\theta y$. Так как $x \in S$ и $0 \notin S$, то $x \neq 0$. Отсюда $x \leq y$.

Остается показать, что f является отображением "на". Пусть $y \in T$. Тогда $\varphi(x) = y$ для некоторого $x \in S^0$. Если $x = 0$, то $\varphi(x) = \varphi(0) = \theta$ по ранее установленному. Отсюда $y = \theta$ и $y \notin T$, что невозможно. Поэтому $x \neq 0$ и, следовательно, $x \in S$. Тогда $f(x) = \varphi(x) = y$. $\square$

2. В этом пункте получим описание упорядоченных группоидов без нуля, для которых существует такой упорядоченный группоид T, что $S \cong T^0$. (Всюду через T^0 обозначается упорядоченный группоид, построенный в п. 1 по группоиду T.)

Замечание 1. Пусть $(S, \cdot)$ и $(T, *)$ — группоиды с нулями 0_S и 0_T соответственно. Поэтому $f(0_S) = 0_T$ тогда и только тогда, когда $0_T \in f(S)$. В частности, если f является изоморфизмом, то $f(0_S) = 0_T$.

Действительно, пусть $f(x) = 0_T$ для $x \in S$. Тогда

$$f(0_S) = f(x \cdot 0_S) = f(x) * f(0_S) = 0_T * f(0_S) = 0_T.$$

Предложение 3. *Пусть $(S, \cdot, \leq)$ — упорядоченный группоид с нулем 0_S. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *существует такой упорядоченный группоид $(T, \circ, \leq_T)$, что $S \equiv_f T^0$;*

2) *множество $S \setminus \{0_S\}$ является подгруппоидом S.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $S \cong_f T^0$, где T^0 получается из группоида $(T, \circ, \leq_T)$ присоединением нуля. Тогда $T^0 = T \cup \{0\}$, $0 \notin T$, операция $*$ и порядок $\leq_0$ на T^0 определены следующщм образом:

$$a * b = \begin{cases} a \circ b, & \text{если } a, b \in T; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\leq_0 = \leq_T \cup \{(0, x) \mid x \in T^0\}.$$

Покажем сначала, что $S \setminus \{0_S\} \neq \varnothing$. Пусть $b \in T$. Так как $b \in T^0$ и f — отображение "на", то существует такой элемент $a \in S$, что $f(a) = b$. Если $a = 0_S$, то согласно замечанию 1 имеем $f(a) = f(0_S) = 0$ и $b = 0 \in T$, что невозможно. Значит, $a \neq 0_S$ и $a \in S \setminus \{0_S\}$.

Пусть теперь $x, y \in S \setminus \{0_S\}$. Тогда $x \cdot y \in S$. Если $x \cdot y = 0_S$, то согласно замечанию 1 $f(xy) = f(0_S) = 0$. Тогда $f(xy) = f(x) * f(y) = 0$. Если $f(x) \neq 0$ и $f(y) \neq 0$, то $f(x), f(y) \in T$ и $0 = f(x) * f(y) = f(x) \circ f(y) \in T$, что невозможно. Следовательно, либо $f(x) = 0$, либо $f(y) = 0$. Но тогда согласно замечанию 1 $f(x) = f(0_S)$ или $f(y) = f(0_S)$, откуда $x = 0_S$, или $y = 0_S$. Противоречие.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть теперь $T = S \setminus \{0\}$ является подгруппоидом S с операциями "$\cdot$" и порядка $\leq_T = \leq \cap \{T \times T)$. Рассмотрим множество $T^0 = T \cup \{0\}$, $0 \notin T$, и на нем определим умножение "$*$" и порядок "$\leq_0$":

$$a * b = \begin{cases} ab, & \text{если } a, b \in T; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\leq_0 = \leq_T \cup \{(0, x) \mid x \in T^0\} = (\leq \cap (T \times T)) \cup \{(0, x) \mid x \in T^0\}.$$

Легко проверить, что отображение $f : (S, \cdot, \leq) \to (T^0, *, \leq_0)$, где $f(x) = x$, если $x \in S \setminus \{0_S\}$, и $f(x) = 0$, если $x = 0_S$, является изоморфизмом между S и T^0. $\square$

Замечание 2. Если при доказательстве 2) $\Rightarrow$ 1) в предложении 3 предположить, что $0 = 0_S$ (это возможно, поскольку $0_S \notin T$), то $T^{0_S} = S$, $* = \bullet$ и $\leq_{0_S} = \leq$, т. е. операции умножения и порядка на T^{0_S} и S совпадают.

Действительно, имеем $T^{0_S} = T \cup \{0_S\} = (S \setminus \{0_S\}) \cup \{0_S\} = S$. Пусть $a, b \in T^0$. Если $a, b \in T$, то $a * b = ab$. Если $a = 0$ или $b = 0$, то $a * b = 0$ и $ab = a * b$, т. к. $ab = 0$. Более того,

$$\leq_{0_S} = \leq_T \cup \{(0_S, x) \mid x \in S\} \subseteq \leq_t \cup \leq = (\leq \cap (T \times T)) \cup \leq = \leq .$$

Обратно, $\leq \subseteq \leq_{0_S}$. Действительно, пусть $(a, b) \in \leq$. Если $a, b \in T$, то

$$(a, b) \in \leq \cap (T \times T) \subseteq (\leq \cap (T \times T)) \cup \{(0_S, x) \mid x \in S\} = \leq_{0_S} .$$

Пусть $a \notin T = S \setminus \{0_S\}$. Так как $a \in S$, имеем $a = 0_S$ и

$$(a, b) \in \{(0_S, x) \mid x \in S\} \subseteq \leq_T \cup \{(0_S, x) \mid x \in S\} = \leq_{0_S} .$$

Аналогично для $b \notin T$.

Пусть S является группоидом. Ненулевой элемент $a \in S$ называется левым делителем 0, если $a \cdot b = 0$ для некоторого $b \in S$, $b \neq 0$. Ненулевой элемент $a \in S$, $a \neq 0$, называется правым делителем нуля, если $b \cdot a = 0$ для $b \in S$, $b \neq 0$. Если группоид S имеет левые (соответственно правые) делители нуля, то, очевидно, S имеет и правые (соответственно левые) делители нуля.

Легко проверить, что S^0 не имеет левых или правых делителей нуля. Действительно, если $a \in S^0$, $a \neq 0$ и $a * b = 0$ для некоторого $b \in S^0$, $b \neq 0$, то $a, b \in S$ и $a * b = ab \in S$ и $0 \in S$, что невозможно.

Замечание 3. Пусть $(S, \cdot)$ — группоид с 0 и $S \neq \{0\}$. Тогда множество $S \setminus \{0\}$ является подгруппоидом S тогда и только тогда, когда S не содержит левых или правых делителей нуля.

Действительно, пусть a — левый делитель нуля. Тогда $a \cdot b = 0$ для некоторого $b \in S$, $b \neq 0$. С другой стороны, поскольку $a, b \in S \setminus \{0\}$ и $S \setminus \{0\}$ является подгруппоидом S, имеем $a \cdot b \in S \setminus \{0\}$. Противоречие.

Наоборот, если a не содержит делителей нуля, то $S \setminus \{0\}$ является подгруппоидом S. Действительно, пусть $a \in S$, $a \neq 0$. Пусть также $b \in S \setminus \{0\}$. Тогда $a \cdot b \in S$. Если $a \cdot b = 0$, то a является левым делителем нуля. Поэтому $a \cdot b \in S \setminus \{0\}$.

Пусть S — полугруппа с 0. Обозначим через N_S совокупность всех нильпотентных элементов S (ср. также с [3]). Упорядоченный группоид с 0 называется 0-правым, если 1) $S^2 \neq \{0\}$ и 2) единственными идеалами S являются множества $\{0\}$ и S.

Лемма ([4], следствия 1, 2 и предложение 2). *Пусть $(S, \cdot, \leq)$ — упорядоченная группа с 0 такая, что $S \neq \{0\}$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *S является 0-простым группоидом*;
2) *$(S \cdot a \cdot S] = S$ для всех $a \in S \setminus \{0\}$*;
3) *для всех $a, b \in S \setminus \{0\}$ существуют $x, y \in S$ такие, что $b \leq xay$*;
4) *для всех $a \in S \setminus \{0\}$ и всех $b \in S$ существуют $x, y \in S$ такие, что $b \leq xay$.*

Предложение 4. *Пусть $(S, \cdot, \leq)$ — упорядоченная 0-простая группа с 0 и $N_S = \{0\}$. Тогда S не содержит левых или правых делителей нуля.*

Доказательство. Пусть a — левый делитель нуля. Тогда $a \neq 0$ и $a \cdot b = 0$ для $b \in S \setminus \{0\}$. Так как $a \in S \setminus \{0\}$, $b \in S$ и S 0-простая, то по лемме $b \leq xay$ для некоторых $x, y \in S$. Таким образом, $(bxa)^2 = bx(ab)xa = 0$ и $bxa \in T_S = \{0\}$. Отсюда $bxa = 0$, $b^2 \leq bxay = 0$, $b \in N_S = \{0\}$ и $b = 0$. Противоречие. $\square$

Замечание 4. Пусть S — полугруппа с 0, не содержащая левых (соответственно правых) делителей нуля. Тогда $N_s = \{0\}$.

Действительно, имеем $\{0\} \subseteq N_S$. Пусть $\{0\} \subset N_S$, $a \in N_S$ и $a \neq 0$. Пусть n — такое натуральное число, что $a^n = 0$. Рассмотрим множество $K_a = \{m \in N : a^m = 0\}$.

Поскольку $\varnothing \neq K_a \subseteq N$ $(n \in K_a)$, то существует $n_0 \in N$ такое, что

$$n_0 \in K_a \text{ и для любого } m \in K_a \text{ имеем } n_0 \leq m. \qquad (*)$$

Так как $n_0 \in K_a$, имеем $n_0 \in N$ и $a^{n_0} = 0$. Если $n_0 = 1$, то $a = 0$, что невозможно. Поэтому $n_0 \geq 0$, $n_0 - 1 \geq 1$ и $n_0 - 1 \in N$. Тогда $a^{n_0 - 1} \in S$. Если $a^{n_0 - 1} = 0$, то согласно $(*)$ имеем $n_0 \leq n_0 - 1 \in K_0$, что невозможно. Таким образом, $a^{n_0 - 1} \neq 0$. Так как $a^{n_0} = 0$, имеем $a \cdot a^{n_0 - 1} = 0$, где $a \neq 0$, $a^{n_0 - 1} \neq 0$. Таким образом, a является левым делителем нуля. Противоречие.

Заметим также, что если упорядоченный группоид S является 0-простым, то $S \neq \{0\}$. Действительно, если $S = \{0\}$, то $S^2 = \{0\}$. Противоречие.

Из предложений 3, 4 и замечаний 3, 4 следует

Теорема. *Пусть S — упорядоченная 0-простая полугруппа с 0. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $N_S = \{0\}$;

2) *S не содержит левых (соответственно правых) делителей нуля;*
3) *$S \setminus \{0\}$ является полугруппой S;*
4) *существует упорядоченная полугруппа $(T, \circ, \leq_T)$ такая, что $S \cong T^0$.*

3. В п. 1 мы видели, что присоединение нуля к упорядоченному группоиду без нуля является с точностью до изоморфизма единственным. В [5] Као Янглин рассматривает упорядоченные полугруппы с обобщенным нулем. К. Янглин называет элемент 0 упорядоченного группоида $(S, \cdot, \leq)$ “обобщенным нулем”, если для любого элемента $x \in S$ справедливо $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ и если 0 является минимальным элементом S (т. е. не существует такого $x \in S$, что $x < 0$; другими словами, если $x \in S$ и $x \leq 0$, то $x = 0$). Естественно возникает вопрос: является ли присоединение обобщенного нуля к упорядоченному группоиду S без обобщенного нуля единственным с точностью до изоморфизма? Ниже будет доказано, что в отличие от случая присоединения нуля к упорядоченному группоиду присоединение обобщенного нуля к упорядоченному группоиду не является в общем случае единственным даже с точностью до изоморфизма.

Пусть $(S, \cdot, \leq)$ — упорядоченный группоид (соответственно полугруппа) без обобщенного нуля. Рассмотрим элемент 0, который не принадлежит S, и определим $S^0 = S \cup \{0\}$. На множестве S^0 определим операцию “$*$” и отношение “$\leq^0$” следующим образом:

$$a * b = \begin{cases} ab, & \text{если } a, b \in S \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (a, b \in S^0);$$

$$\leq^0 = \leq \cup \{(0, 0\}.$$

Легко видеть, что $(S^0, *, \leq^0)$ является упорядоченным группоидом (соответственно полугруппой) и 0 является обобщенным нулем для S^0. Теперь определим отношение “$\leq_0$” на $(S^0, *)$ следующим образом: $\leq_0 = \leq \cup \{(0, x) : x \in S^0\}$. Мы уже видели в п. 1, что $(S^0, *, \leq_0)$ является упорядоченным группоидом (соответственно полугруппой), 0 в ней является нулем и, следовательно, и обобщенным нулем. Таким образом, $(S^0, *, \leq^0)$ и $(S^0, *, \leq_0)$ — два упорядоченных группоида и в обоих из них 0 является обобщенным нулем. Теперь предположим, что между этими группоидами существует изоморфизм

$$f : (S^0, *, \leq^0) \to (S^0, *, \leq_0).$$

Пусть x — элемент S^0 такой, что $f(x) = 0$. Тогда $f(0) * f(x) = f(0) * 0 = 0$ и $f(0) * f(x) = f(0 * x) = f(0)$. Поэтому $f(0) = 0$.

Пусть $x \in S$. Так как $x \in S^0$ и f является отображением “на”, то существует элемент $y \in S^0$ такой, что $f(y) = x$. Имеем $f(0) = 0 \leq_0 x = f(y)$ (т. к. 0 является нулем в $(S^0, *, \leq_0)$). По определению f имеем $0 \leq^0 y$, т. е. $(0, y) \in \leq^0 = \leq \cup \{(0, 0)\}$. Если $(0, y) \in \leq$, то, поскольку $\leq \subseteq S \times S$, имеем $0 \in S$, что невозможно. Поэтому $(0, y) = (0, 0)$ и $y = 0$. Тогда имеем $0 = f(0) = f(y) = x \in S$ и $0 \in S$. Снова получаем противоречие.

Замечание 5. Если $(S, \cdot)$ является группоидом (соответственно полугруппой) и $0 \notin S$, то множество $S^0 = S \cup \{0\}$ с операциями умножения “$\circ$” и порядка “$\leq_0$”, которые определены ниже, является упорядоченным группоидом (соответственно полугруппой) и 0 в нем является обобщенным нулем;

$$a \circ b = \begin{cases} ab, & \text{если } a, b \in S \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (a, b \in S^0);$$

$$\leq_0 = 1_{S_0} \ (= \{(x, x) \mid x \in S^0\}).$$

Пусть теперь $(S, \cdot, \leq)$ является упорядоченным группоидом (соответственно полугруппой) без обобщенного нуля и $0 \notin S$. Тогда множество $S^0 = S \cup \{0\}$ с операцией умножения “$*$” и порядка “$\leq^0$”, которые определяются ниже, становится упорядоченным группоидом (соответственно полугруппой) с обобщенным нулем 0.

$$a * b = \begin{cases} ab, & \text{если } a, b \in S \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (a, b \in S^0);$$

$$\leq^0 = \leq \cup \{(0,0)\}.$$

Если же $(S, \cdot)$ является группоидом (полугруппой) и $\leq = 1_S$, то $(S, \cdot, \leq)$ является упорядоченным группоидом (соответственно полугруппой) и $\leq_0 = \leq^0$.

Пример присоединения нуля и обобщенного нуля к конечной упорядоченной полугруппе.

Рассмотрим определенную в [6] упорядоченную полугруппу $S = \{a, b, c, d, e\}$, где операция умножения "$\cdot$" и отношение "$\leq$" определены следующим образом:

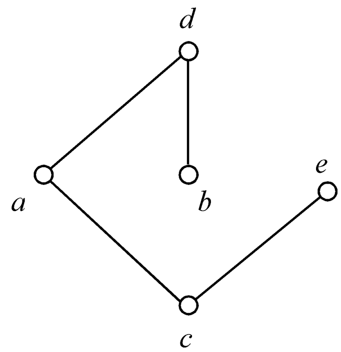
Таблица 1

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	c
b	a	b	c	d	a
c	a	b	c	d	c
d	d	d	d	d	d
e	a	b	c	d	c

$$\leq := \{(a,a), (a,d), (b,b), (b,d), (c,a), (c,c), (c,d), (c,e), (d,d), (e,e)\}.$$

Приведем покрывающее отношение $\prec$ и изображение S

$$\prec = \{(a,d), (b,d)(c,a), (c,e)\}.$$



Пусть $0 \notin S$ и $S^0 = \{a, b, c, d, e, 0\}$. Множество S^0 с определенными ниже операцией умножения "$*$" и отношением "$\leq_0$" является упорядоченной полугруппой и 0 является нулевым элементом $(S^0, *, \leq_0)$.

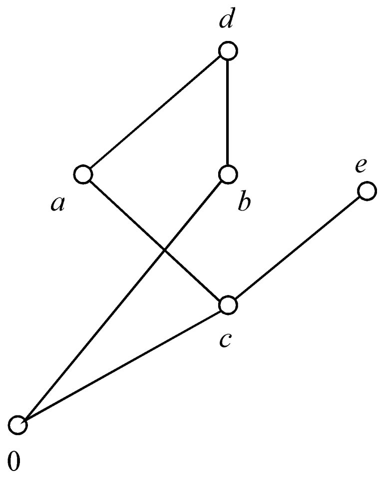
Таблица 2

$*$	a	b	c	d	e	0
a	a	b	c	d	c	0
b	a	b	c	d	a	0
c	a	b	c	d	c	0
d	d	d	d	d	d	0
e	a	b	c	d	c	0
0	0	0	0	0	0	0

$$\leq_0 = \leq \cup \{(0,x) \mid x \in S^0\}.$$

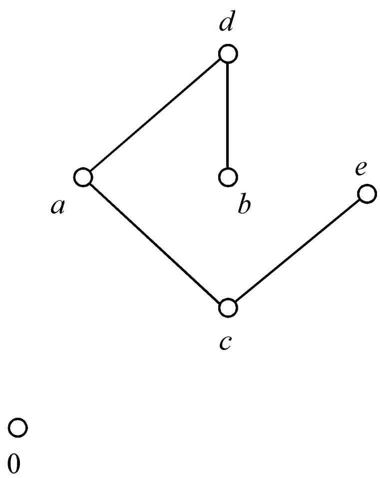
Теперь покрывающее отношение "$\prec_0$" и изображение $(S^0, *, \leq_0)$ выглядят следующим образом:

$$\prec_0 = \{(a,d), (b,d), (c,a), (c,e), (0,b)(0,c)\}.$$



Множество S^0 с той же операцией умножения, которая приведена в табл. 2, и порядком $\leq^0 = \leq \cup \{(0,0)\}$ является упорядоченной полугруппой, в которой 0 является обобщенным нулем. Покрывающее отношение $\prec^0$ и изображение для $(S^0, *, \leq^0)$ теперь выглядят таким образом:

$$\prec^0 = \{(a,d)(b,d)(c,a)(c,e)\}.$$



Литература

1. Birkhoff G. *Lattice theory* // Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Providence, R.I. – V. XXV, 1967.
2. Kehayopulu N., Tsingelis M. *On subdirectly irreducible ordered semigroups* // Semigroup Forum. – 1995. – V. 50. – P. 161-177.
3. Kehayopulu N. *On ordered semigroups without nilpotent ideal elements* // Math. Japonica. – 1991. – V. 36. – № 2. – P. 323–326.
4. Kehayopulu N., Tsingelis M. *Characterizations of* 0*-simple ordered semigroups* // Sci. Math. – 2000. – V. 3. – № 2. – P. 311-314.
5. Cao Yonglin. *Quotient principal factors of an ordered semigroup* // Comm. Algebra. – 2001. – V. 29. – № 5. – P. 1993–2001.
6. Kehayopulu N. *On intra-regular ordered semigroups* // Semigroup Forum. – 1993. – V. 46. – P. 271–278.

Афинский университет
(*Греция*)

Поступила
21.03.2001