Известия вузов. Математика
2009, № 2, с. 34–45

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Б.Г. ГРЕБЕНЩИКОВ

О ПОСТРОЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. В работе рассматривается совокупность двух подсистем линейных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием, причем одна из подсистем имеет в правой части экспоненциальный множитель. Строится асимптотически периодическое решение системы.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, устойчивость, асимптотически периодическое решение.

УДК: 517.929

Abstract. In this paper we consider an ensemble of two subsystems of linear differential equations with constant delay. One of the subsystems contains an exponential multiplier in its right-hand side. We construct an asymptotically periodic solution of this system.

Keywords: trigonometric series, stability, asymptotically periodic solution.

Рассматривается следующая нестационарная система с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= (A_1+\varepsilon\overline{S}_1(t))x(t)+(A_2+\varepsilon\overline{S}_2(t))x(t-\tau)+\\ &\quad + (B_1+\varepsilon\overline{P}_1(t))y(t)+(B_2+\varepsilon\overline{P}_2(t))y(t-\tau)+\overline{f}_1(t),\\ dy(t)/dt &= e^t[(A_3+\varepsilon\overline{S}_3(t))x(t)+(A_4+\varepsilon\overline{S}_4)x(t-\tau)+(B_3+\varepsilon\overline{P}_3(t))y(t)+\\ &\quad + (B_4+\varepsilon\overline{P}_4(t))y(t-\tau)+\overline{f}_2(t)],\quad t\ge t_0>0,\quad \tau=\mathrm{const},\qquad \tau>0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\overline{S}_j$, $\overline{P}_j$ $(j=1,2,3,4)$ — периодические (периода τ) непрерывно дифференцируемые матрицы размерности $m\times m$, $\max\{\|\overline{S}_j\|,\|\overline{P}_j\|\}\le\overline{P}$, где $\overline{P}$ — положительная константа, ε — малое положительное число. Очевидно, при $\varepsilon=0$ имеем линейную неоднородную систему

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_1x(t)+A_2x(t-\tau)+B_1y(t)+B_2y(t-\tau)+\overline{f}_1(t),\\ dy(t)/dt &= e^t(A_3x(t)+A_4x(t-\tau)+B_3y(t)+B_4y(t-\tau)+\overline{f}_2(t)),\quad t\ge t_0>0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь A_r, B_r $(r=1,2,3,4)$ — постоянные матрицы размерности $m\times m$, $x(t)$, $y(t)$ — m-мерные вектор-функции времени (аргумента) t, m-мерные вектор-функции $\overline{f}_j(t)$ $(j=1,2)$ являются непрерывно дифференцируемыми, периодическими периода τ.

Решение системы (1) определено при $t_0-\tau\le\eta\le t_0$ начальной вектор-функцией $\phi^\top(\eta)=\{\phi_1(\eta),(\phi_2(\eta)\}:x(\eta)=\phi_1(\eta)$, $y(\eta)=\phi_2(\eta)$ (значок $\top$ означает транспонирование вектора). Отметим, что система (1) является "возмущенной" по отношению к системе (2), причем возмущения благодаря малости величины ε малы. Рассмотрим вначале некоторые свойства

Поступила 03.07.2006, окончательный вариант 28.11.2007

невозмущенной системы (2) (полагаем, что решение данной “невозмущенной” системы определено в момент времени t_0 той же самой начальной вектор-функцией $\phi(\eta)$, что и решение исходной системы (1)).

Перейдем от системы (2) — конечной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием на бесконечном промежутке времени — к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданной на конечном промежутке времени $[0,\tau]$, полагая $x_{n+1}(t) = x(t_0+n\tau+t)$, $y_{n+1}(t) = y(t_0+n\tau+t)$, $f_r(t) = \overline{f}_r(t_0+t) : t \in [0,\tau]$ $(r = 1,2)$. Получим совокупность двух подсистем m-го порядка

$$dx_{n+1}(t)/dt = A_1x_{n+1}(t) + A_2x_n(t) + B_1y_{n+1}(t) + B_2y_n(t) + f_1(t), \tag{3}$$

$$\varepsilon_n dy_{n+1}(t)/dt = e^t(A_3x_{n+1}(t) + A_4x_n(t) + B_3y_{n+1}(t) + B_4y_n(t) + f_2(t)), \tag{4}$$

$$0 \le t \le \tau, \quad \varepsilon_n = e^{-(t_0+n\tau)}$$

с граничными условиями

$$x_{n+1}(0) = x_n(\tau), \quad y_{n+1}(0) = y_n(\tau).$$

Таким образом, нахождение решения системы (2) сведено к последовательному интегрированию “дифференциально-разностной” ([1], с. 103) неоднородной системы в линейном пространстве непрерывных вектор-функций, заданных на отрезке $[0,\tau]$.

Отметим некоторые свойства подсистемы (4). Ввиду того, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, подсистема (4) является сингулярно возмущенной [2], [3], следовательно, совокупность решений системы (3), (4) можно рассматривать как систему, содержащую медленные ($x_n(t)$) и быстрые ($y_n(t)$) переменные.

Полагаем, что корни λ характеристического уравнения

$$|A_1 + A_2e^{-\lambda\tau} - \lambda E| = 0 \tag{5}$$

(E — единичная матрица размерности $m \times m$) имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\lambda < -\beta_1, \quad \beta_1 = \text{const}, \quad \beta_1 > 0. \tag{6}$$

Очевидно, неравенство (6) означает, что решение системы

$$dG(t)/dt = A_1G(t) + A_2G(t-\tau) \tag{7}$$

экспоненциально устойчиво. Отметим, что ввиду выполнения неравенства (6) для любого $j = 0, \pm1, \pm2, \dots$ существует матрица

$$(A_1 + A_2 + ijlE)^{-1}, \quad l = \frac{2\pi}{\tau}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

В самом деле, пусть неравенство (6) справедливо и нашлось такое $\overline{j}$, что

$$|A_1 + A_2 - i\overline{j}lE| = 0. \tag{8}$$

Ищем частное решение $\overline{G}(t)$ системы (7) в виде

$$\overline{G}(t) = \overline{\gamma}_{\overline{j}}e^{i\overline{j}lt}.$$

Подставив его в систему (7), получаем соотношение

$$i\overline{j}l\overline{\gamma}_{\overline{j}} = A_1\overline{\gamma}_{\overline{j}}e^{i\overline{j}lt} + A_2\overline{\gamma}_{\overline{j}}e^{i\overline{j}lt}e^{-i\overline{j}l\tau}. \tag{9}$$

Ввиду равенства

$$e^{-i\overline{j}l\tau} = \cos(2\pi\overline{j}) - i\sin(2\pi\overline{j}) = 1,$$

учитывая соотношение (8), из равенства (9) получаем следующее: найдется отличный от нуля постоянный вектор $\overline{\gamma}_{\overline{j}}$, являющийся решением системы (9). Но тогда среди решений системы (7) найдется решение, не являющееся экспоненциально устойчивым, что противоречит условию (6). Следовательно, при любых $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ матрица $(A_1 + A_2 - ijlE)^{-1}$ существует.

Далее, считаем, что матрица B_3 имеет все собственные значения $\overline{\lambda}$ с отрицательной вещественной частью, т. е. справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\overline{\lambda} < -\beta_2, \quad \beta_2 = \text{const}, \quad \beta_2 > 0. \tag{10}$$

Наконец, полагаем, что корни ν уравнения

$$|B_3 + B_4 e^{-\nu\tau} - (A_3 + A_4 e^{-\nu\tau})(A_1 + A_2 e^{-\nu\tau} - \nu E)^{-1}(B_1 + B_2 e^{-\nu\tau})| = 0$$

имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедлива оценка

$$\operatorname{Re}\nu < -\beta_3, \quad \beta_3 = \text{const}, \quad \beta_3 > 0. \tag{11}$$

Норму вектора $w = \{w_j\}^\top$ (здесь w_j — компоненты вектора w) определим равенством $\|w\| = \sum\limits_j |w_j|$. Норму матрицы $D = \{d_{ij}\}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ определим в соответствии с нормой вектора ([4], с. 193), именно, $\|D\| = \max\limits_j \sum\limits_i |d_{ij}|$. Если определить норму вектор-функции $z(t)$, $t \in [0, \tau]$, следующим образом

$$\|z(t)\|_\tau = \max_{0 \le t \le \tau} \|z(t)\|,$$

то при такой нормировке линейное пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[0, \tau]$, будет пространством Банаха ([4], с. 124), обозначим его $\mathbb{C}_{2m}[0, \tau]$.

Определение. Решение системы (1) $\widehat{w}_\varepsilon^\top(t) = \{\widehat{x}_\varepsilon(t), \widehat{y}_\varepsilon(t)\}$ будем называть асимптотически периодическим (периода τ), если для любого сколь угодно малого $\widehat{\varepsilon} > 0$ найдется такой момент времени $\overline{T} > 0$, что для любого $t \ge \overline{T}$ справедливо неравенство $\|\widehat{w}(t+\tau) - \widehat{w}(t)\| < \widehat{\varepsilon}$.

Теорема. *При достаточно малом ε система* (1) *допускает асимптотически периодическое решение.*

Доказательство. Счетная система на конечном промежутке времени $[0, \tau]$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} dx_{n+1}(t)/dt = (A_1 + \varepsilon S_1(t))x_{n+1}(t) + (A_2 + \varepsilon S_2(t))x_n(t) + \\ + (B_1 + \varepsilon P_1(t))y_{n+1}(t) + (B_2 + \varepsilon P_2(t))y_n(t) + f_1(t), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n dy_{n+1}(t)/dt = e^t[(A_3 + \varepsilon S_3(t))x_{n+1}(t) + (A_4 + \varepsilon S_4)x_n(t) + \\ + (B_3 + \varepsilon P_3(t))y_{n+1}(t) + (B_4 + \varepsilon P_4(t))y_n(t) + f_2(t)], \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $P_j(t) = \overline{P}_j(t_0 + t)$, $S_j(t) = \overline{S}_j(t_0 + t)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Рассмотрим соответствующую вырожденную систему, полагая в подсистеме (13) малый параметр $\varepsilon_n = 0$. Данная система имеет вид

$$\begin{aligned} & dx_{n+1}(t)/dt = (A_1 + \varepsilon S_1(t))x_{n+1}(t) + (A_2 + \varepsilon S_2(t))x_n(t) + \\ & \quad + (B_1 + \varepsilon P_1(t))y_n(t) + (B_2 + \varepsilon P_2(t))y_n(t) + f_1(t), \\ & 0 = (A_3 + \varepsilon S_3(t))x_{n+1}(t) + (A_4 + \varepsilon S_4)x_n(t) + \\ & \quad + (B_3 + \varepsilon P_3(t))y_{n+1}(t) + (B_4 + \varepsilon P_4(t))y_n(t) + f_2(t), \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned}$$

Ищем периодическое решение $\overline{w}_\varepsilon(t)$ этой системы в виде ряда по степеням малого параметра ε, принимая в качестве начального приближения величину $\overline{w}_0^\top(t)=\{\overline{x}(t),\overline{y}(t)\}$ (т. е. решение вырожденной системы при $\varepsilon=0$), а именно,

$$\overline{w}_\varepsilon(t)=\overline{w}_0(t)+\sum_j \overline{w}^j(t)\varepsilon^j,\quad w^{j\top}(t)=\{\overline{x}^j(t),\overline{y}^j(t)\}. \tag{14}$$

В работе [5] автором доказано, что нулевое приближение представимо в виде комплекснозначных рядов Фурье вида

$$\overline{x}(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_k^0 e^{iklt},\quad \overline{y}(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_k^0 e^{iklt}, \tag{15}$$

при этом любое решение системы (3), (4) при $n\to\infty$ стремится к величине, определяемой равенством (15) (данное свойство можно доказать, учитывая экспоненциальную устойчивость однородной системы, соответствующей системе (3), (4)). Следовательно, порождающая система допускает асимптотически периодическое решение ([6], с. 127).

Подставляя выражение (14) в вырожденную систему, приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d\overline{x}^j(t)/dt&=(A_1+A_2)\overline{x}^j(t)+(B_1+B_2)\overline{y}^j(t)+\\ &+(S_1(t)+S_2(t))\overline{x}^{j-1}(t)+(P_1(t)+P_2(t))\overline{y}^{j-1}(t), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} 0&=(A_3+A_4)\overline{x}^j(t)+(B_3+B_4)\overline{y}^j(t)+(S_3(t)+S_4(t))\overline{x}^{j-1}(t)+\\ &+(P_3(t)+P_4(t))\overline{y}^{j-1}(t),\quad j=1,2,\dots \end{aligned} \tag{17}$$

Разложим вектор-функции $S_r(t)$, $P_r(t)$ в комплекснозначные ряды Фурье

$$S_r(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{\alpha}_k^r e^{iklt},\quad P_r(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{\gamma}_k^r e^{iklt},\quad r=1,2,3,4 \tag{18}$$

(данные ряды сходятся абсолютно ввиду того, что периодические вектор-функции $S_r(t)$, $P_r(t)$ непрерывно дифференцируемы ([7], с. 508)). Ищем периодическое решение систем (16), (17) методом неопределенных коэффициентов, полагая $\overline{x}^j(t)=\sum\alpha_k^j e^{iklt}$, $\overline{y}^j(t)=\sum\gamma_k^j e^{iklt}$ (суммирование ведется по k от $-\infty$ до $+\infty$). Для определения неизвестных коэффициентов α_k^j, γ_k^j получаем соотношения

$$\begin{aligned} &[B_3+B_4-(A_3+A_4)\,(A_1+A_2-iklE)^{-1}\,(B_1+B_2)]\gamma_k^j=\\ &\qquad\qquad=(A_3+A_4)\,(A_1+A_2-iklE)^{-1}\,\delta_{k,j}^1-\delta_{k,j}^2,\\ &\alpha_k^j=-(A_1+A_2-iklE)^{-1}[(B_1+B_2)\gamma_k^j+\delta_{k,j}^1], \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{k,j}^1&=\sum_{r,n:r+n=k}(\overline{\alpha}_r^1+\overline{\alpha}_r^2)\alpha_n^{j-1}+\sum_{r,n:r+n=k}(\overline{\gamma}_r^1+\overline{\gamma}_r^2)\gamma_n^{j-1},\\ \delta_{k,j}^2&=\sum_{r,n:r+n=k}(\overline{\alpha}_r^3+\overline{\alpha}_r^4)\alpha_n^{j-1}+\sum_{r,n:r+n=k}(\overline{\gamma}_r^3+\overline{\gamma}_r^4)\gamma_n^{j-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Разрешим первое из соотношений (19) относительно вектора γ_k^j. Получаем равенство

$$\gamma_k^j = [B_3 + B_4 - (A_3 + A_4)\,(A_1 + A_2 - iklE)^{-1}\,(B_1 + B_2)]^{-1}[(A_3 + A_4)\times \\ \times (A_1 + A_2 - iklE)^{-1}\,\delta_{k,j}^1 - \delta_{k,j}^2]. \quad (21)$$

Учитывая (21), получим из системы (19) соотношение

$$\alpha_k^j = -\,[A_1 + A_2 - iklE]^{-1}\,[(B_1 + B_2)\times \\ \times (B_3 + B_4 - (A_3 + A_4)\,(A_1 + A_2 - iklE)^{-1}\,(B_1 + B_2))^{-1}\times \\ \times ((A_3 + A_4)\,(A_1 + A_2 - iklE)^{-1}\,\delta_{k,j}^1 - \delta_{k,j}^2) + \delta_{k,j}^1]. \quad (22)$$

Теперь из соотношений (21) и (22) последовательно определяем коэффициенты рядов Фурье для любого j-го приближения. Докажем, что при достаточно малом ε процесс последовательных приближений сходится.

Рассмотрим, например, соотношение (21). При вычислении первого приближения имеем неравенство

$$\|\gamma_k^1\| \le \overline{M}_1[\overline{M}_2\|\delta_{k,1}^1\| + \|\delta_{k,1}^2\|]. \quad (23)$$

Здесь $\overline{M}_1 = \max\limits_k \|[B_3 + B_4 - (A_3 + A_4)\,(A_1 + A_2 - iklE)^{-1}\,(B_1 + B_2)]^{-1}\|$, и $\overline{M}_2 = \max\limits_k \|(A_3 + A_4)\,(A_1 + A_2 - iklE)^{-1}\,\|$. Очевидно, константы $\overline{M}_j$ $(j = 1, 2)$ равномерно ограничены. В самом деле,

$$\lim_{k\to\infty}(A_1 + A_2 - iklE)^{-1} = 0,$$

следовательно, данная величина равномерно ограничена при любых $k = \pm1, \pm2, \dots$, откуда и вытекает равномерная ограниченность констант $\overline{M}_j$ $(j = 1, 2)$. Рассмотрим теперь равенства (20) при $j = 1$. Ввиду абсолютной сходимости рядов (15) и (18) для достаточно большого натурального N имеем неравенства

$$\begin{gathered}\sum_{k=-\infty}^{-N-1}\|\alpha_k^0\| < \varepsilon_1, \quad \sum_{k=N+1}^{\infty}\|\alpha_k^0\| < \varepsilon_1, \quad \sum_{k=-\infty}^{-N-1}\|\gamma_k^j\| < \varepsilon_1, \quad \sum_{k=N+1}^{\infty}\|\gamma_k^j\| < \varepsilon_1; \\ \sum_{k=-\infty}^{-N-1}\|\delta_{k,1}^1\| < \varepsilon_1, \quad \sum_{k=N+1}^{\infty}\|\delta_{k,1}^1\| < \varepsilon_1, \quad \sum_{k=-\infty}^{-N-1}\|\delta_{k,1}^2\| < \varepsilon_1, \quad \sum_{k=N+1}^{\infty}\|\delta_{k,1}^2\| < \varepsilon_1,\end{gathered} \quad (24)$$

где ε_1 — достаточно малое положительное число. Следовательно, при нахождении первого приближения (с точностью порядка ε_1) из соотношений (21), (23), (24) имеем неравенство

$$\{\|\gamma_{-N}^1\|, \|\gamma_{-N+1}^1\|, \dots, \|\gamma_N^1\|\}^\top \le \overline{A}_1^{2N}\{\|\alpha_{-N}^0\|, \|\alpha_{-N+1}^0\|, \dots, \|\alpha_N^0\|\}^\top + \\ + \overline{A}_2^{2N}\{\|\gamma_{-N}^0\|, \|\gamma_{-N+1}^0\|, \dots, \|\gamma_N^0\|\}^\top, \quad (25)$$

где матрицы

$$\overline{A}_j^{2N} = \begin{pmatrix} \overline{a}_0^j & \overline{a}_1^j & \dots & \overline{a}_N^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{a}_{-1}^j & \overline{a}_0^j & \dots & \overline{a}_{N-1}^j & \overline{a}_N^j & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{a}_{-N}^j & \overline{a}_{-N+1}^j & \dots & \overline{a}_0^j & \overline{a}_1^j & \dots & \dots & \overline{a}_N^j \\ 0 & \overline{a}_{-N}^j & \overline{a}_{-N+1}^j & \dots & \dots & \dots & \overline{a}_{N-2}^j & \overline{a}_{N-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{a}_{-N}^j & \overline{a}_{-N+1}^j & \dots & \overline{a}_1^j & \overline{a}_0^j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (26)$$

являются постоянными, размерности $2N \times 2N$. Здесь

$$\begin{aligned} \overline{a}_k^1 &= \overline{M}_1\overline{M}_2(\|\overline{\alpha}_k^1\| + \|\overline{\alpha}_k^2)\|) + \overline{M}_1(\|\overline{\alpha}_k^3\| + \|\overline{\alpha}_k^4\|), \\ \overline{a}_k^2 &= \overline{M}_1\overline{M}_2(\|\overline{\gamma}_k^1\| + \|\overline{\gamma}_k^2)\|) + \overline{M}_1(\|\overline{\gamma}_k^3\| + \|\overline{\gamma}_k^4\|). \end{aligned} \tag{27}$$

Пусть $\overline{\gamma}_N^1 = \max\limits_j \|\gamma_j^1\|$, $\overline{\gamma}_N^0 = \max\limits_j \|\gamma_j^0\|$, $\overline{\alpha}_N^0 = \max\limits_j \|\alpha_j^0\|$, $j = 0, \pm 1, \dots, \pm N$. Как следует из соотношений (25)–(27), справедливы неравенства

$$\|\gamma_j^1\| \le \sum_{k=j-N}^{N} (\overline{a}_k^1\overline{\alpha}_N^0 + \overline{a}_k^2\overline{\gamma}_N^0), \quad \overline{\gamma}_N^1 \le \sum_{j=-N}^{N} (\overline{a}_k^1\overline{\alpha}_N^0 + \overline{a}_k^2\overline{\gamma}_N^0).$$

Отсюда $\|\gamma_{j+1}^1\| < \|\gamma_j^1\|$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, $\|\gamma_{k-1}^1\| < \|\gamma_k^1\|$, $k = 0, -1, -2, \dots, -N-1$. Окончательно получаем следующее: нашлись равномерно ограниченные постоянные $M_{N1} > 0$, $M_{N2} > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$\overline{\gamma}_N^1 \le M_{N1}\overline{\alpha}_N^0 + M_{N2}\overline{\gamma}_N^0.$$

Если рассмотреть теперь соотношение (22), то подобное неравенство такими же методами можно получить и для величины $\overline{\alpha}_N^1$: $\overline{\alpha}_N^1 = \max\limits_j \|\alpha_j^1\|$, $j = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, именно, найдутся такие равномерно ограниченные постоянные $K_{N1} > 0$, $K_{N2} > 0$, что справедливо неравенство

$$\overline{\alpha}_N^1 \le K_{N1}\overline{\alpha}_N^0 + K_{N2}\overline{\gamma}_N^0.$$

Пусть $w_{Nj}^\top = \{\overline{\alpha}_N^j, \overline{\gamma}_N^j\}$, $j = 0, 1$. Имеем неравенство $w_{N1} \le \overline{B}_N w_{N0}$, где $\overline{B}_N$ — матрица с положительными компонентами размерности 2×2, имеющая вид

$$\overline{B}_N = \begin{pmatrix} K_{N1} & K_{N2} \\ M_{N1} & M_{N2} \end{pmatrix}.$$

Подобное неравенство можно получить и для величины w_{N2}, именно, $w_{N2} \le \overline{B}_N w_{N1}$ и т. д.

Пусть теперь величина ε настолько мала, что справедливо неравенство

$$\varepsilon\|\overline{B}_N\| < q_1, \quad q_1 = \mathrm{const}, \quad 0 < q_1 < 1. \tag{28}$$

Тогда, как следует из соотношения (14), процесс последовательных приближений сходится.

Теперь нужно доказать экспоненциальную устойчивость однородной системы, соответствующей системе (12), (13), имеющей вид

$$\begin{aligned} du_{n+1}(t)/dt = (A_1 + \varepsilon S_1(t))u_{n+1}(t) + (A_2 + \varepsilon S_2(t))u_n(t) + \\ + (B_1 + \varepsilon P_1(t))v_n(t) + (B_2 + \varepsilon P_2(t))v_n(t), \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n dv_{n+1}(t)/dt = e^t[(A_3 + \varepsilon S_3(t))u_{n+1}(t) + (A_4 + \varepsilon S_4(t))u_n(t) + \\ + (B_3 + \varepsilon P_3(t))v_{n+1}(t) + (B_4 + \varepsilon P_4(t))v_n(t)], \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned} \tag{30}$$

Рассмотрим систему (29). Известно ([1], с. 336), что при достаточно малом ε для фундаментальной матрицы решений $U_\varepsilon(t-s)$ однородной (возмущенной) системы

$$du_{n+1}(t)/dt = (A_1 + \varepsilon S_1(t))u_{n+1}(t) + (A_2 + \varepsilon S_2(t))u_n(t)$$

справедлива оценка

$$\|U_\varepsilon(t-s)\| \le M_\varepsilon e^{-\overline{\beta}_1(t-s)}, \quad 0 \le s \le t \le \tau, \tag{31}$$

где положительные константы M_ε, $\overline{\beta}_1$ удовлетворяют следующим условиям: $M_\varepsilon \geq 1$, $\overline{\beta}_1 = \beta_1 - \varepsilon_2$ (ε_2 – достаточно малое положительное число). Далее, для фундаментальной матрицы решений $V_{\varepsilon,n}(t,s)$ однородной (возмущенной) системы без запаздывающих членов

$$\varepsilon_n dv_{n+1}(t)/dt = e^t(B_3 + \varepsilon P_3(t))v_{n+1}(t) \tag{32}$$

при достаточно малом ε справедлива оценка [8]

$$\|V_{\varepsilon_n}(t,s)\| \leq M_1 e^{-(\varepsilon_n)^{-1}\overline{\beta}_2(e^t - e^s)}, \quad 0 \leq s \leq t \leq \tau, \tag{33}$$

где положительные константы $M_1, \overline{\beta}_2$ удовлетворяют условиям $M_1 > 1, \overline{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{2}$. В работе [5] доказано, что ввиду оценок (32), (33) при достаточно малом ε справедлива (весьма грубая) оценка вида

$$\|w_{n+1,\varepsilon}(t)\|_\tau \leq L_\varepsilon \|w_{n,\varepsilon}(t)\|_\tau, \quad L_\varepsilon = \mathrm{const}, \quad L_\varepsilon > 1. \tag{34}$$

Здесь $w_{n,\varepsilon}^\top = \{u_n(t), v_n(t)\}$ — решение однородной (возмущенной) системы (29), (30).

Решение возмущенной системы (29), (30) (записанное в интегральной форме) представим по шагам в операторном виде: на первом шаге

$$w_{1,\varepsilon}(t) = T_0(w_0(s)) + \varepsilon F_1^1 w_{1,\varepsilon}(s) + \varepsilon F_0^2 w_0(s).$$

На втором шаге

$$w_{2,\varepsilon}(t) = T_1(w_{1,\varepsilon}(s)) + \varepsilon F_2^1 w_{2,\varepsilon}(s) + \varepsilon F_1^2 w_{1,\varepsilon}(s)$$

и т. д. Здесь T_n — линейный оператор ($\mathbb{C}_{2m}[0,\tau] \to \mathbb{C}_{2m}[0,\tau]$), определяемый соотношением

$$T_n = \begin{cases} U_0(t)u_n(\tau) + \int\limits_0^t U_0(t-s)A_2u_n(s)ds + \int\limits_0^t U_0(t-s)\left(B_1v_{n+1}(s) + B_2v_n(s)\right)ds, \\ e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-1)}v_n(\tau) + \int\limits_0^t e^{B_2(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)}e^s(\varepsilon_n)^{-1}(B_4v_n(s) + \\ \qquad +A_3u_{n+1}(s) + A_4u_n(s))ds, \end{cases}$$

$U_0(t-s)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$d\overline{u}_{n+1}/dt = A_1\overline{u}_{n+1}(t) + A_2\overline{u}_n(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad \overline{u}_{n+1}(0) = \overline{u}_n(\tau),$$
$$\|U_0(t-s)\| \leq M_0e^{-\beta_1(t-s)} : M_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon.$$

F_n^r, $r = 1, 2$; $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — интегральные операторы, определяемые следующим образом:

$$F_{n+1}^1 w_{n+1,\varepsilon}(s) = \begin{cases} \int\limits_0^t U_0(t-s)(S_1(s)u_{n+1}(s) + P_1(s)v_{n+1}(s))ds, \\ \int\limits_0^t e^{(\varepsilon_n)^{-1}B_3(e^t-e^s)}(S_3(s)u_{n+1}(s) + P_3(s)v_{n+1}(s))e^s(\varepsilon_n)^{-1}ds, \end{cases}$$

$$F_n^2 w_n(s) = \begin{cases} \int\limits_0^t U_0(t-s)(S_2(s)u_n(s) + P_2(s)v_n(s))ds, \\ \int\limits_0^t e^{(\varepsilon_n)^{-1}B_3(e^t-e^s)}(S_4(s)u_n(s) + P_4(s)v_n(s))e^s(\varepsilon_n)^{-1}ds. \end{cases}$$

Для произведения операторов T_j ввиду условий (6), (10), (11) справедлива оценка [5]

$$\left\|\prod_{j=0}^n T_j w_0(s)\right\| \leq Lq^n(\|u_0(t)\|_\tau + \|v_0(t)\|_\tau),$$
$$w_0^\top(t) = \{u_0(t), v_0(t)\}, \quad L = \mathrm{const}, \quad L \geq 1, \quad q = \mathrm{const}, \quad 0 < q < 1. \tag{35}$$

Данная оценка может быть доказана с помощью преобразования Лапласа ([1]). Приведем краткий ее вывод. Рассмотрим однородную (невозмущенную) систему, соответствующую системе (2),

$$\begin{aligned} &dx^0(t)/dt = A_1x^0(t) + A_2x^0(t-\tau) + B_1y^0(t) + B_2y^0(t-\tau), \\ &dy^0(t)/dt = \widehat{t}_0 e^t(A_3x^0(t) + A_4x^0(t-\tau) + B_3y^0(t) + B_4y^0(t-\tau)), \quad \widehat{t}_0 = e^{t_0}, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Умножив обе части первой подсистемы на e^{-pt}, а обе части второй подсистемы на $e^{-(p+1)t}$ и интегрируя по t от нуля до $+\infty$, получим векторные равенства

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-pt}dx^0(t)/dt = A_1\int_0^\infty x^0(t)e^{-pt}dt + A_2\int_0^\infty x^0(t-\tau)e^{-pt}dt + \\ &\quad + B_1\int_0^\infty y^0(t)e^{-pt}dt + B_2\int_0^\infty y^0(t-\tau)e^{-pt}dt, \\ &\int_0^\infty e^{-(p+1)t}dy^0(t)/dt = \widehat{t}_0A_3\int_0^\infty x^0(t)e^{-pt}dt + \widehat{t}_0A_4\int_0^\infty x^0(-\tau)e^{-pt}dt + \\ &\quad + \widehat{t}_0B_3\int_0^\infty y^0(t)e^{-pt}dt + \widehat{t}_0B_4\int_0^\infty y^0(t-\tau)e^{-pt}dt. \end{aligned} \tag{37}$$

Вводя обозначения

$$F_1(p) = \int_0^\infty x^0(t)e^{-pt}dt, \quad F_2(p) = \int_0^\infty y^0(t)e^{-pt}dt,$$

учитывая равенство ([1], с. 89)

$$\int_0^\infty x^0(t-\tau)e^{-pt}dt = e^{-\tau p}\int_{-\tau}^0 \phi_1(\xi)e^{-p\xi}d\xi + e^{-\tau p}F_1(p)$$

и формулу интегрирования по частям, получим из (37) следующие уравнения:

$$\left(A_1 + A_2e^{-\tau p} - pE\right)F_1(p) + \left(B_1 + B_2e^{-\tau p}\right)F_2(p) + \widehat{f}_1(p) = 0, \tag{38}$$

$$F_2(p+1) = \frac{\widehat{t}_0}{p+1}\left(B_3 + B_4e^{-\tau p}\right)F_2(p) + \frac{\widehat{t}_0}{p+1}\left(A_3 + A_4e^{-\tau p}\right)F_1(p) + \frac{1}{p+1}\widehat{f}_2(p), \tag{39}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{f}_1(p) &= e^{-\tau p}\left[A_2\int_{-\tau}^0 \phi_1(\xi)e^{-p\xi}d\xi + B_2\int_{-\tau\tau}^0 \phi_2(\xi)e^{-p\xi}d\xi\right] + \phi_1(0), \\ \widehat{f}_2(p) &= \widehat{t}_0e^{-\tau p}\left[B_4\int_{-\tau}^0 \phi_2(\xi)e^{-p\xi}d\xi + A_4\int_{-\tau}^0 \phi_1(\xi)e^{-p\xi}d\xi\right] + \phi_2(0). \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение (38) в комплексной плоскости p. Учитывая условия (5), (6), можем разрешить его относительно вектор-функции $F_1(p)$ правее прямой $\mathrm{Re}\, p = -\beta_1$. Получим равенство

$$F_1(p) = -[A_1 + A_2e^{-\tau p} - pE]^{-1}[(B_1 + B_2e^{-\tau p})F_2(p) + \widehat{f}_1(p)].$$

Подставляя его в соотношение (39), получаем векторное неоднородное функционально-разностное уравнение

$$F_2(p+1) = \frac{\widehat{t}_0}{p+1}(D_1(p)F_2(p) + \widehat{f}(p)), \quad p = r + iq, \quad i = \sqrt{-1}, \quad r > \beta, \tag{40}$$

где

$$D_1(p) = B_3 + B_4 e^{-\tau p} - \left(A_3 + A_4 e^{-\tau p}\right)\left(A_1 + A_2 e^{-\tau p} - pE\right)^{-1}\left(B_1 + B_2 e^{-\tau p}\right),$$
$$\widehat{f}(p) = -\left(A_3 + A_4 e^{-\tau p}\right)\left(A_1 + A_2 e^{-\tau p} - pE\right)^{-1}\widehat{f}_1(p) + \frac{1}{\widehat{t}_0}\widehat{f}_2(p).$$

Анализ асимптотических свойств решения уравнения (40) может быть проведен методами, разработанными ранее автором при исследовании подобного функционально-дифференциального уравнения [9]. Именно, правее вертикальной прямой $\mathrm{Re}\, p = -\delta$ ($\delta = \mathrm{const}$, $0 < \delta < \min\limits_j\{\beta_j\}$) при фиксированном $r = \mathrm{Re}\, p$ для вектор-функции $F_2(p)$ справедливо асимптотическое представление

$$F_2(p+1) = \frac{\phi_2(0)}{p+1} + O\left(\frac{1}{|p+1|^2}\right), \quad q \to \pm\infty \quad (p = r + iq, \quad i = \sqrt{-1}). \tag{41}$$

Тогда, применяя обратное преобразование Лапласа (оно существует ввиду асимптотического представления (41) ([1], с. 24)), получаем предельное равенство

$$y^0(t) = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\delta/2-i\omega}^{-\delta/2+i\omega} F_2(p)e^{pt}dp. \tag{42}$$

Свойства интеграла, стоящего в правой части асимптотического равенства (42) (ввиду асимптотического представления (41)) описаны, например, в ([1], с. 467), именно, данный интеграл при $t \to \infty$ имеет асимптотическую оценку $O(e^{-\delta t/2})$, следовательно, $y^0(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$ по показательному закону.

Рассмотрим теперь поведение величины $x^0(t)$. Запишем решение первой подсистемы из соотношения (36) в интегральной форме

$$x^0(t) = U_0(t)\phi_1(0) + \int_{-\tau}^{0} U_0(t-\tau-\xi)A_2\phi_1(\xi)d\xi +$$
$$+ \int_0^t U_0(t-s)\left[B_1 y^0(s) + B_2 y^0(s-\tau)\right]ds. \tag{43}$$

(Здесь $U_0(t-s)$ — фундаментальная матрица решений однородной невозмущенной системы для системы (7).) Первые два члена в правой части соотношения (43) есть решение однородной невозмущенной системы, для них справедлива оценка

$$\|U_0(t)\phi_1(0) + \int_{-\tau}^{0} U_0(t-\tau-\xi)A_2\phi_1(\xi)d\xi\| \le M_0 e^{-\beta_1}\|\sup_\eta \phi_1(\eta)\|. \tag{44}$$

Оценим теперь два оставшихся члена в правой части соотношения (43). Учитывая предыдущие оценки, получаем следующую цепь неравенств:

$$\left\|\int_0^t U_0(t-s)B_1 y^0(s)ds\right\| \le \int_0^t \|B_1\| M_0 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{C}_1 e^{-\delta s/2}ds \times$$
$$\times \{\sup_\eta\|\phi_1(\eta)\| + \sup_\eta\|\phi_2(\eta)\|\} \le \left[\int_0^{t/2}\|B_1\|\widehat{C}_1 M_0 e^{-\beta_1(t-s)}ds +\right.$$
$$\left. + \int_{t/2}^{t}\|B_1\|\widehat{C}_1 M_0 e^{-\beta_1(t-s)-\delta t/4}ds\right][\sup_\eta\|\phi_1(\eta)\| + \sup_\eta\|\phi_2(\eta)\|] \le$$
$$\le \|B_1\|\widehat{C}_1 M_0(\beta_1)^{-1}[e^{-\beta_1 t/2} + e^{-\delta t/4}][\sup_\eta\|\phi_1(\eta)\| + \sup_\eta\|\phi_2(\eta)\|]. \tag{45}$$

Далее получаем следующие неравенства:

$$\left\| \int_0^t U_0(t-s)B_2y^0(s-\tau)ds \right\| \le \left\| \int_0^\tau U_0(t-s)B_2y^0(s-\tau)ds \right\| +$$
$$+ \left\| \int_\tau^t U_0(t-s)B_2y^0(s-\tau)ds \right\| \le \widehat{C}_2 \left[\int_{-\tau}^0 e^{-\beta_1(t-\zeta)}d\zeta + \int_0^t e^{-\beta_1(t-s)}e^{-\delta s/2}ds \right] \times$$
$$\times [\sup_\eta \|\phi_1(\eta)\| + \sup_\eta \|\phi_2(\eta)\|], \quad \widehat{C}_2 = \widehat{C}_1 M_0(\beta_1)^{-1}\|B_2\|e^{\beta_1\tau}.$$

Отсюда, учитывая неравенство (45), получаем оценку

$$\left\| \int_0^\tau U_0(t-s)B_1y^0(s)ds \right\| \le \widehat{C}_2[e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_1 t/2} + e^{-\delta t/4}][\sup_\eta \|\phi_1(\eta)\| + \sup_\eta \|\phi_2(\eta)\|]. \qquad (46)$$

Из полученных неравенств (44)–(46) следует, что и $\|x^0(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ как экспоненциальная вектор-функция. Из этих же неравенств следует оценка (35).

Далее, для интегрального оператора F^1_{n+1} согласно неравенству (34) имеем оценки

$$\max_{t\in[0,\tau]} \|F^1_{n+1}w_{n+1,\varepsilon}(s)\| \le \overline{P}\left[\frac{M_0}{\beta_1} + \frac{M_3}{\beta_2}\right] \|w_{n+1,\varepsilon}(t)\|_\tau \le L_\varepsilon \overline{P}\left[\frac{M_0}{\beta_1} + \frac{M_1}{\beta_2}\right] \|w_{n,\varepsilon}(t)\|_\tau. \qquad (47)$$

Для интегрального оператора F^2_n справедлива оценка

$$\|F^2_n\| \le \overline{P}\left[\frac{M_0}{\beta_1} + \frac{M_1}{\beta_2}\right] \|w_{n,\varepsilon}(t)\|_\tau. \qquad (48)$$

Используя формулу вариации постоянных ([8], с. 23), запишем решение возмущенной однородной системы на любом шаге. Имеем равенство

$$w_{n+1,\varepsilon}(t) = T_nT_{n-1}\dots T_0(w_0(s)) + \varepsilon T_nT_{n-1}\dots T_1[F^1_1(w_{1,\varepsilon}(s)) + F^2_0(w_0(s))] +$$
$$+ \varepsilon T_nT_{n-1}\dots T_2[F^1_2(w_{2,\varepsilon}(s)) + F^2_1(w_{1,\varepsilon}(s))] + \dots + \varepsilon F^1_{n+1}(w_{n+1,\varepsilon})(s) + \varepsilon F^2_n(w_{n,\varepsilon}(s)). \qquad (49)$$

Очевидно, первое слагаемое в правой части соотношения (49) есть решение невозмущенной системы. Далее, второй член в правой части данного равенства имеет начальной функцией величину $F^1_1(w_{1,\varepsilon}(s)) + F^2_0(w_0(s))$, которая (ввиду оценок (47), (48)) не превосходит величины

$$\overline{P}(1+L_\varepsilon)\left[\frac{M_0}{\beta_1} + \frac{M_1}{\beta_2}\right] \|w_0(t)\|_\tau. \qquad (50)$$

Следовательно, второй член в правой части равенства (49) (ввиду оценок (35), (50)) не превосходит величины

$$\varepsilon L q^{n-1}\overline{P}(1+L_\varepsilon)\left[\frac{M_0}{\beta_1} + \frac{M_1}{\beta_2}\right] \|w_0(t)\|_\tau.$$

Последующий член в правой части равенства (49) не превосходит величины

$$\varepsilon L q^{n-2}\overline{P}(1+L_\varepsilon)\left[\frac{M_0}{\beta_1} + \frac{M_1}{\beta_2}\right] \|w_{1,\varepsilon}(t)\|_\tau$$

и т. д. Но тогда из (49) получаем неравенство

$$\|w_{n+1,\varepsilon}(t)\|_\tau \le Lq^n\|w_0(t)\|_\tau + \varepsilon Lq^{n-1}\overline{P}(1+L_\varepsilon)\left[\frac{M_0}{\beta_1}+\frac{M_1}{\beta_2}\right]\|w_0(t)\|_\tau + \varepsilon Lq^{n-2}\overline{P}\times$$
$$\times(1+L_\varepsilon)\left[\frac{M_0}{\beta_1}+\frac{M_1}{\beta_2}\right]\|w_{1,\varepsilon}(t)\|_\tau + \ldots + \varepsilon Lq\overline{P}(1+L_\varepsilon)\left[\frac{M_0}{\beta_1}+\frac{M_1}{\beta_2}\right]\|w_{n-2,\varepsilon}(t)\|_\tau +$$
$$+\varepsilon L\overline{P}(1+L_\varepsilon)\left[\frac{M_0}{\beta_1}+\frac{M_1}{\beta_2}\right]\|w_{n-1,\varepsilon}(t)\|_\tau + \varepsilon(1+L_\varepsilon)\overline{P}\left[\frac{M_0}{\beta_1}+\frac{M_1}{\beta_2}\right]\|w_{n,\varepsilon}(t)\|_\tau. \quad (51)$$

Обозначив $\|w_{k,\varepsilon}\|q^{-k} = \overline{w}_k$, $\overline{\delta} = \overline{P}(1+L_\varepsilon)\left[\frac{M_0}{\beta_1}+\frac{M_1}{\beta_2}\right]$, получаем из соотношения (51) более грубое неравенство

$$\overline{w}_{n+1} \le \frac{L}{q}\overline{w}_0 + \varepsilon L\overline{\delta}q^{-2}\sum_{k=0}^{n}\overline{w}_k. \quad (52)$$

Тогда из (52) следует ([8], с. 39)

$$\overline{w}_{n+1} \le \frac{L}{q}\left(1+\varepsilon\frac{L\overline{\delta}}{q^2}\right)^n\left(1+\varepsilon\frac{\overline{\delta}}{q}\right)\overline{w}_0.$$

Возвращаясь теперь к переменной $\|w_{n,\varepsilon}(t)\|_\tau$, окончательно получаем оценку

$$\|w_{n+1,\varepsilon}(t)\|_\tau \le L\left(q+\varepsilon\frac{L\overline{\delta}}{q}\right)^n\left(1+\varepsilon\frac{\overline{\delta}}{q}\right)\|w_0(t)\|_\tau.$$

Асимтотическая (экспоненциальная) устойчивость достигается при

$$\varepsilon < \frac{q(1-q)}{L\overline{\delta}}. \quad (53)$$

(Отметим, что фактически нами доказана устойчивость по первому приближению для возмущенной системы (29), (30) при достаточно малом ε.) Пусть величина ε настолько мала, что выполняются неравенства (28), (31), (33), (53). Покажем, что любое решение системы (12), (13) стремится к периодическому решению вырожденной системы $\overline{w}_\varepsilon^\top(t) = \{\overline{x}_\varepsilon(t), \overline{y}_\varepsilon(t)\}$. Сделав замену $x_{n+1}(t) = \overline{x}_\varepsilon(t) + u^0_{n+1}(t)$, $y_{n+1}(t) = \overline{y}_\varepsilon(t) + v^0_{n+1}(t)$, получим из (12), (14) совокупность двух подсистем

$$\begin{aligned} &du^0_{n+1}(t)/dt = (A_1+\varepsilon S_1(t))u^0_{n+1}(t) + (A_2+\varepsilon S_2(t))u^0_n(t) + \\ &\quad + (B_1+\varepsilon P_1(t))v^0_{n+1}(t) + (B_2+\varepsilon P_2(t))v^0_n(t), \\ &\varepsilon_n dv^0_{n+1}(t)/dt + \varepsilon_n d\overline{y}_\varepsilon(t)/dt = e^t[(A_3+\varepsilon S_3(t))u^0_{n+1}(t) + (A_4+\varepsilon S_4)u^0_n(t) + \\ &\quad + (B_3+\varepsilon P_3(t))v^0_{n+1}(t) + (B_4+\varepsilon P_4(t))v^0_n(t)], \quad t\in[0,\tau]. \end{aligned} \quad (54)$$

Данная система является неоднородной (неоднородностью в подсистеме (54) является вектор-функция -$\varepsilon_n d\overline{y}_\varepsilon(t)/dt$), при этом

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n d\overline{y}_\varepsilon(t)/dt = 0. \quad (55)$$

Учитывая экспоненциальную устойчивость однородной (“возмущенной”) системы и предельное равенство (55), методами, аналогичными использованным ранее при выводе оценки (46), можем доказать, что справедливы предельные равенства

$$\lim_{n\to\infty} u^0_n(t)/dt = 0, \quad \lim_{n\to\infty} v^0_n(t)/dt = 0.$$

Таким образом, любое решение “возмущенной” системы асимптотически стремится к периодическому решению вырожденной системы $w_\varepsilon(t)$. Следовательно, “возмущенная” система допускает асимптотически периодическое решение $\widehat{w}_\varepsilon(t)$, и при достаточно больших t $\widehat{w}_\varepsilon(t) \approx \overline{w}_\varepsilon(t)$. $\square$

Литература

[1] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 558 с.

[2] Митропольский Ю.А. *Метод усреднения в нелинейной механике.* – Киев: Наукова думка, 1971. – 440 с.

[3] Шиманов С.Н. *Об устойчивости дифференциально-разностных уравнений* // В сб. “Устойчивость и нелинейные колебания”. – Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1991. – С. 95–98.

[4] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 741 с.

[5] Гребенщиков Б.Г. *О существовании асимптотически периодического решения одной системы с запаздыванием* // Изв. Уральск. гос. ун-та. Сер. матем., механ. – 2003. – Вып. 26. – С. 44–54.

[6] Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем.* – М.: Мир, 1971. – 307 с.

[7] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 3. – М.: Наука, 1966. – 656 с.

[8] Гребенщиков Б.Г. *Об устойчивости нестационарных систем с большим запаздыванием* // В сб. “Устойчивость и нелинейные колебания”. – Свердловск, 1984. – С. 18–29.

[9] Гребенщиков Б.Г. *Об устойчивости стационарных систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием, линейно зависящим от времени* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 7. – С. 69–71.

Б.Г. Гребенщиков

ведущий инженер, кафедра теоретической механики,
Уральский государственный университет,
620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,

e-mail: vitali.baranski@usu.ru

B.G. Grebenshchikov

Leading Engineer, Chair of Theoretical Mechanics,
Ural State University, 51 Lenin Ave., Ekaterinburg, 620083 Russia,

e-mail: vitali.baranski@usu.ru