И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.982

В.Л. КРЕПКОГОРСКИЙ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА. НОРМЫ, ЗАДАННЫЕ С ПОМОЩЬЮ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Применяя интерполяционный функтор $(\cdot,\,\cdot)_{\theta,q}$ к паре пространств Бесова, получим пространства $BL^{s,k}_{p,q}$, которые принадлежат классу пространств Бесова только в некоторых частных случаях, хорошо известных с 60-х годов. Общий случай исследовался в [1]–[3], где даны описания пространств $BL^{s,k}_{p,q}=(B^{s_0}_{p_0},B^{s_1}_{p_1})_{\theta,q}$ с различными вариантами норм. С точки зрения многих задач самыми "удобными" в пространствах B^s_p являются нормы, использующие дифференциально-разностные конструкции. В данном случае это модуль непрерывности w_f. Например, они позволяют получить "внутреннее" описание нормы пространства B^s_p на области $\mathcal{D}$. Можно предположить, что аналогичные конструкции нормы пространств BL будут обладать такими же хорошими свойствами. В данной заметке дано описание пространств $(\overline{B})_{\theta,q}$ с помощью разностей.

1. Нормы в пространствах Бесова

Используем следующие определения норм в пространствах Бесова B^s_p.

1) Пусть $0<s<\infty$, $1<p<\infty$. Если ℓ и N — целые числа, удовлетворяющие условиям $0\le N<s$ и $\ell>s-N$, $0<\delta\le\infty$, то

$$B^s_p(R_1)=\left\{f: f\in S'(R_1),\ \|f|B^s_p\|^{(1)}=\|f|L_p\|+\left\|h^{-(s-N)}\cdot\Delta^\ell_h\frac{\partial^N f}{\partial x^N}\,|L^*_p((0,\,\delta),\,L_p(R_1))\right\|<\infty\right\},$$

где $\Delta_h f=f(x+h)-f(x)$, $\Delta^\ell_h f=\Delta^{\ell-1}_h(\Delta_h f)$, $\|g|\,L^*_p\|=\big(\int\limits_0^\delta|g(h)|^p\frac{dh}{h}\big)^{1/p}$ ([4], с. 227).

2) Пусть $0<p<\infty$, $s>1/p$. Если ℓ — целое число, $\ell>s$, то

$$\|f|B^s_p\|^{(2)}=\|f|L_p\|+\left\|\left(\int_{R_1}|h|^{-sp}\sup_{|\rho|\le|h|}|(\Delta^\ell_\rho f)(\cdot)|^p\frac{dh}{|h|}\right)^{1/p}|L_p(R_1)\right\|\quad([5],\text{ с. }132).$$

3) Пусть $0<p<\infty$, $\ell>s$, $w_f(h,x):=\sup\limits_{|\rho|\le h}|\Delta^\ell_\rho f|$, $h\in[0,\,1]$. Тогда

$$\|f|B^s_p\|^{(3)}=\|f|L_p\|+\left\|\int_0^1(h^{-s}w_f(h,x))^p\frac{dh}{h}\,|\,L_p\right\|.$$

4) При $-\infty<s<\infty$, $1\le p\le\infty$, $j=0,\,1,\dots$

$$\|f|B^s_p\|^{(4)}=\|2^{js}\|\varphi_j*f\,|L_p\|\,\,|\ell_p\|\quad([6],\text{ с.}180).$$

При $1<p<\infty$, $s>1/p$ все нормы $\|\cdot\,|\,B^s_p\|^{(i)}$, $i=\overline{1,4}$, эквивалентны между собой.

2. Интерполяция пространств L_p с весом. Пространства Лоренца $L_{p,q}$ с весом

Как обычно, интерполяция в классе пространств Бесова сводится к интерполяции соответствующих банаховых структур. Пространствам Бесова B_p^s соответствуют пространства L_p. При интерполяции пространств L_p получаются пространства Лоренца.

Пусть $L_p(X,\omega,\mu)$ — пространство (L_p) с весом ω, состоящее из функций, определенных на пространстве X с мерой μ. Для $f(x)\in L_1(X,\mu)+L_\infty(X,\mu)$ положим

$$\rho(f,\sigma)=\mu(\{x \mid x\in X, | f(x)>\sigma\}),\quad 0<\sigma<\infty,$$

и

$$f^*(t)=\inf_{\rho(f,\sigma)\le t}\sigma,\quad 0<t<\infty.$$

Функция $f^*(t)$ называется невозрастающей равноизмеримой перестановкой функции $f(x)$.

Пусть $1<p<\infty$, $1\le q\le\infty$. Пространства Лоренца $L_{p,q}$ с весом ω определим равенством

$$L_{p,q}(X,\omega,\mu)=\{f(x) \mid f\in L_1+L_\infty,\ \|f \mid L_{p,q}\|<\infty\},$$

где

$$\|f \mid L_{p,q}\|=\left(\int_0^\infty (t^{1/p}(f(x)\cdot(x))^*)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/p} \text{ при } 1\le q\le\infty$$

и при $q=\infty$

$$\|f \mid L_p,\infty\|=\sup_t t^{1/p}(f(x)\cdot\omega(x))^*.$$

Если $\lambda(x)$ — действительная функция на X, $\lambda(x)\ne 0$ п. в., то через $\lambda\cdot\mu$ обозначим меру $(\lambda{\cdot}\mu)(E){=}\int\limits_E\lambda(x)d\mu$. Нам понадобится исследовать пространство $(\overline{L_p(\omega)})_{\theta,q}=(L_{p_0}(\omega_0),\,L_{p_1}(\omega_1))_{\theta,q}$. Здесь

$$L_{p_i}(\omega_i)=L_{p,q}((0,\,1)\times R_1,\,h^{-s_i-1/p_i},\mu_2),$$

где $i=0,1$, μ_2 — лебегова мера на R_2, $h\in(0,1)$. Для интерполяции пространств L_p с весом, используя формулу Фрейтага [7]

$$(L_{p_0}(\omega_0,\mu),\,L_{p_1}(\omega_1,\mu))_{\theta,q}=L_{p,q}\left(\left(\frac{\omega_1^{p_1}}{\omega_0^{p_0}}\right)^{\frac{1}{p_1-p_0}},\ \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^{\frac{p_1p_0}{p_1-p_0}}\mu\right),$$

получим равенство

$$(\overline{L_p(\omega)})_{\theta,q}=L_{p,q}((0,\,1)\times R_1,\,h^{-b},\,h^{-k-1}\cdot\mu_1\times\mu_1),$$

где k и b — параметры из уравнения прямой $s=k\alpha+b$, $\alpha=1/p$, проходящей через точки $(1/p_i,\,s_i)$.

3. Интерполяционные пространства BL

В [1] дано описание интерполяционного пространства

$$(B_{p_0}^{s_0}(R_n),\ B_{p_1}^{s_1}(R_n))_{\theta,q}=BL_{p,q}^{s,k}(R_n)$$

с нормой

$$\|f \,|\, BL_{p,q}^{s,k}(R_n)\|^{(1)}=\|(f*\varphi_j)_{j=0}^\infty \mid L_{p,q}(\overline{Z}_+\times R_n,\,2^{jb},2^{jk}\nu\times\mu_1)\|.$$

Положим $L_{p,q}^{s,k}=L_{p,q}(\overline{Z}_+\times R_n,\,2^{jb},2^{jk}\nu\times\mu_1)$, где $\overline{Z}_+=\{0,1,2,\dots\}$, $Z_+=\{1,2,\dots\}$, ν — атомическая мера на $\overline{Z}$, с мерой атома, равной единице.

Рассмотрим другие варианты интерполяционных норм

$$\|f \,|\, BL_{p,q}^{s,k}(R_n)\|^{(2)}=\|f \,|\, L_{p,q}(R_1)\|+\|w_f(h,x) \,|\, L_{p,q}((0,\,1)\times R_1,\,h^{-b},\,h^{-k-1}\mu_1\times\mu_1)\|,$$

где $w_f(h,x) := \sup\limits_{|\rho|\le h} |\Delta_\rho^\ell f|$, $h \in [0,1]$. Пусть $\widetilde{L}_{p,q}^{s,k} := L_{p,q}((0,\,1)\times R_1,\, h^{-b},\, h^{-k-1}\mu_1 \times \mu_1)$ и

$$\|f\,|\,BL_{p,q}^{s,k}(R_1)\|^{(3)} = \|f\,|\,L_{p,q}(R_1)\| + \|(w_f(2^{-j},\,x))_{j=1,\,2,\ldots}\,|L_{p,q}(Z_+ \times R_1,\, 2^{jb},\, 2^{jk}\nu \times \mu_1)\|.$$

4. Эквивалентность интерполяционных норм

Теорема 1. *При $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s > 1/p$, $k \ne 0$ нормы $\|f\,|\,BL_{p,q}^{s,k}(R_1)\|^{(1)}$, $\|f\,|\,BL_{p,q}^{s,k}(R_1)\|^{(2)}$ и $\|f\,|\,BL_{p,q}^{s,k}(R_1)\|^{(3)}$ эквивалентны.*

Из теоремы 1 и известных интерполяционных теорем для пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля [1] можно получить следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $0 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1, q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, и k — угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/p_i,\, s_i)$, $i = 0,1$. Тогда*

$$(B_{p_0}^{s_0}(R_1),\, B_{p_1}^{s_1}(R_1))_{\theta,q} = (F_{p_0,q_0}^{s_0}(R_1),\, F_{p_1,q_1}^{s_1}(R_1))_{\theta,q} = BL_{p,q}^{s,k}.$$

При этом, если $s > 1/p$; $1 < p < \infty$, то можно использовать нормы $\|\cdot\,|\,BL\|^{(3)}$ и $\|\cdot\,|\,BL\|^{(2)}$.

Литература

1. Крепкогорский В.Л. *Интерполяция в пространствах Лизоркина–Трибеля и Бесова* // Матем. сб. – 1994. – Т. 185. – № 7. – С. 63–76.
2. Кругляк Н.Я. *Гладкие аналоги разложения Кальдерона–Зигмунда, количественные теоремы о покрытиях и K-функционал для пары $(L_q,\, W_p^k)$* // Алгебра и анал. – 1996. – Т. 8. – № 4. – С. 75–109.
3. Брудный Ю.А., Кругляк Н.Я. *Вещественная интерполяция одного семейства пространств гладких функций* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 349. – № 6. – С. 729–731.
4. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
5. Трибель Х. *Теория функциональных пространств.* – М.: Мир, 1986. – 447 с.
6. Берг Й., Лёфстрём Й. *Интерполяционные пространства. Введение.* – М.: Мир, 1980. – 264 с.
7. Freitag D. *Real interpolation of weighted L_p-spaces* // Math. Nachr. – 1978. – V. 86. – P. 15–18.

Казанский филиал военного
артиллерийского университета

Поступили
полный текст 15.02.2000
краткое сообщение 02.11.2000