ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 514.756.2

А.В. СТОЛЯРОВ

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ НОРМАЛИЗОВАННОГО КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

В данной статье изучаются конформные и аффинные связности, индуцируемые невырожденной нормализацией n-мерного конформного пространства C_n; найдено поле инвариантных циклид Дарбу, определяемое нормализацией (не обязательно невырожденной) пространства C_n.

Индексы принимают следующие значения:

$$\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}; \quad i, j, k, l, s, t = \overline{1, n}.$$

1. Рассмотрим конформное (псевдоконформное индекса $l \neq 0$ или собственно конформное, $l = 0$) пространство C_n, $n \geq 2$, [1], [2]; отнесем его к подвижному полуизотропному [3] реперу $R = \{A_\lambda\}$, состоящему из точек A_0, A_{n+1} и n гиперсфер A_i, проходящих через эти точки. Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [1], [2]

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}. \tag{1}$$

Любую гиперсферу $P \in \mathrm{C}_n$ можно представить в виде линейной комбинации элементов репера

$$P = x^0 A_0 + x^i A_i + x^{n+1} A_{n+1}.$$

Группа конформных преобразований $\mathcal{L}$ пространства C_n изоморфна подгруппе группы проективных преобразований проективного пространства P_{n+1}, а именно, изоморфна стационарной подгруппе гиперквадрики Дарбу $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$, на которую отображаются все точки конформного пространства C_n при перенесении Дарбу [1], [2]

$$Q_n^2 : g_{ij} x^i x^j + 2x^0 x^{n+1} = 0;$$

эта подгруппа зависит от $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ независимых параметров.

При бесконечно малом преобразовании конформной группы $\mathcal{L}$ (стационарной подгруппы абсолюта $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$) элементы конформного репера R (проективного репера R) получают приращения, главную часть которых определяют дифференциалы dA_λ (соответственно $d\mathrm{A}_\lambda$), являющиеся гиперсферами (точками); эти дифференциалы разлагаются по элементам исходного репера R (R) следующим образом:

$$dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu \quad (\text{соответственно} \;\; d\mathrm{A}_\lambda = \omega_\lambda^\mu \mathrm{A}_\mu), \tag{2}$$

где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ зависят от параметров группы $\mathcal{L}$ (стационарной подгруппы абсолюта Q_n^2). Условием полной интегрируемости системы уравнений (2) являются структурные уравнения

$$D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu.$$

Кроме того, в силу соотношений (1), (2) формы ω_λ^μ удовлетворяют следующим линейным зависимостям [1], [2]:

$$
\begin{aligned}
&\text{(а)} && \omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0;\\
&\text{(б)} && \omega_i^0 + g_{ik}\omega_{n+1}^k = 0, \quad \omega_i^{n+1} + g_{ik}\omega_0^k = 0;\\
&\text{(в)} && dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Ниже будем рассматривать конформное пространство C_n с невырожденным метрическим тензором g_{ij}

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j, \quad dg^{ij} - g^{ik}\omega_k^j - g^{kj}\omega_k^i = 0. \tag{4_1}$$

В частности, если пространство C_n является собственно конформным, то его метрический тензор g_{ij} невырожден, т. е. имеют место соотношения (4_1) и

$$g \overset{\text{def}}{=} |g_{ij}| > 0, \quad d\ln\sqrt{g} = \omega_k^k. \tag{4_2}$$

2. Пространство C_n называется нормализованным [4], [5], если в нем задано дифференцируемое точечное соответствие $A_0 \to X_{n+1}$ (A_0 — нормализуемая точка, X_{n+1} — нормализующая точка пространства C_n). Нормализация пространства C_n равносильна тому, что к каждой точке $A_0 \in \mathrm{C}_n$ присоединены n гиперсфер

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0, \tag{5}$$

проходящих через точки A_0 и X_{n+1}. Если X_{n+1} — точка конформного пространства C_n, отличная от A_0 и не лежащая на изотропном конусе $g_{ij}x^ix^j = 0$ с вершиной в точке A_0, то в силу (P_iX_{n+1})=0 и $\mathrm{X}_{n+1} \in Q_n^2$ она имеет разложение

$$X_{n+1} = -\frac{1}{2}g^{ij}x_i^0x_j^0A_0 - g^{ij}x_i^0A_j + A_{n+1}, \tag{6}$$

где

$$\nabla x_i^0 + \omega_i^0 = x_{ik}^0\omega_0^k. \tag{7}$$

Таким образом, нормализация пространства C_n эквивалентна заданию поля квазитензора x_i^0 (см. (7)).

Предполагая, что пространство C_n нормализовано, продолжим уравнения (7); находим

$$\nabla_\delta x_{ij}^0 + x_{ij}^0\pi_0^0 + x_{(i}^0\pi_{j)}^0 - g_{ij}g^{st}x_s^0\pi_t^0 = 0, \quad \delta = d|_{\omega_0^i=0}, \quad \pi_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\mu|_{\omega_0^i=0}.$$

В силу последних уравнений и уравнений (3(в)), (4_1), (7) система функций

$$a_{ij}^0 \overset{\text{def}}{=} x_{ij}^0 - x_i^0x_j^0 + \frac{1}{2}g_{ij}g^{st}x_s^0x_t^0 \tag{8}$$

образует тензор, вообще говоря, несимметричный

$$\nabla a_{ij}^0 + a_{ij}^0\omega_0^0 = a_{ijk}^0\omega_0^k; \tag{9}$$

тензор a_{ij}^0 назовем основным тензором нормализации пространства C_n полем квазитензора x_i^0. В случае симметрии основного тензора a_{ij}^0 нормализацию конформного пространства C_n по аналогии с нормализацией проективного пространства [5] назовем гармонической.

Геометрическая трактовка нормализации $A_0 \to X_{n+1}$ конформного пространства C_n заключается в том, что при перенесении Дарбу текущей точке A_0 гиперквадрики Дарбу $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$

сопоставляется точка $\mathrm{X}_{n+1} \in Q_n^2$, касательной гиперплоскостью в которой к Q_n^2 является гиперплоскось $[\mathrm{X}_{n+1}\mathrm{P}_i]$ пространства P_{n+1}. Действительно, в силу соотношений (2), (3), (4)–(8) получим

$$d\mathrm{X}_{n+1} = (x_k^0\omega_0^k - \omega_0^0)X_{n+1} - g^{ij}a_{ik}^0\omega_0^k\mathrm{P}_j. \tag{10}$$

В силу уравнений (4_1), (9) совокупность функций

$$b_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} g^{st}a_{is}^0a_{jt}^0, \quad db_{ij} + 4b_{ij}\omega_0^0 - b_{it}\omega_j^t - b_{tj}\omega_t^t = b_{ijk}\omega_0^k \tag{11}$$

есть симметричный тензор; в текущей точке $A_0 \in \mathrm{C}_n$ он определяет гиперконус направлений второго порядка с вершиной в точке A_0

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} b_{ij}\omega_0^i\omega_0^j = 0, \tag{12}$$

который назовем гиперконусом нормализации пространства C_n.

Так как имеет место

$$d^2\mathrm{A}_0 = (\dots)\mathrm{A}_0 + (\dots)^k\mathrm{A}_k - g_{ij}\omega_0^i\omega_0^j\mathrm{A}_{n+1},$$

то направление смещения текущей точки $A_0 \in \mathrm{C}_n$ принадлежит конусу изотропных направлений $g_{ij}\omega_0^i\omega_0^j = 0$ тогда и только тогда, когда при перенесении Дарбу ее образ A_0 смещается по асимптотической линии гиперквадрики $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$.

Теорема 1. *Направление смещения текущей точки $A_0 \in \mathrm{C}_n$ принадлежит гиперконусу нормализации конформного пространства C_n тогда и только тогда, когда при перенесении Дарбу образ X_{n+1} нормализующей точки X_{n+1} смещается по асимптотической линии гиперквадрики Дарбу $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$.*

В самом деле, из (5) с использованием соотношений (2), (6)–(8) находим

$$d\mathrm{P}_i = a_{ij}^0\omega_0^j\mathrm{A}_0 - g_{ij}\omega_0^j\mathrm{X}_{n+1} + (\omega_i^j + x_i^0\omega_0^j + \omega_i^{n+1}g^{kj}x_k^0)\mathrm{P}_j. \tag{13}$$

Из уравнений (10), (13) с использованием (11) имеем

$$d^2\mathrm{X}_{n+1} = (\dots)\mathrm{X}_{n+1} + (\dots)^j\mathrm{P}_j - b_{st}\omega_0^s\omega_0^t\mathrm{A}_0;$$

утверждение теоремы 1 непосредственно следует из последнего соотношения, если иметь в виду уравнение гиперконуса нормализации (12).

Например, если при $n = 2$ задана нормализованная псевдоконформная плоскость C_2 (индекса 1), то в ортонормированном репере R справедливо $g_{11} = 1$, $g_{22} = -1$, $g_{12} = 0$; при этом конус нормализации (12) в текущей точке $A_0 \in \mathrm{C}_2$ состоит из двух действительных направлений:

$$\begin{aligned} \omega_0^1 : \omega_0^2 &= -(a_{12}^0 + a_{22}^0) : (a_{11}^0 + a_{21}^0), \\ \omega_0^1 : \omega_0^2 &= -(a_{12}^0 - a_{22}^0) : (a_{11}^0 - a_{21}^0), \end{aligned} \tag{14}$$

и квадрика Дарбу в P_3 есть однополостный гиперболоид

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 + 2x^0x^3 = 0. \tag{15}$$

Направления (14) нормализации различны тогда и только тогда, когда $|a_{ij}^0| \neq 0$. Согласно теореме 1 при смещении точки $A_0 \in \mathrm{C}_2$ по одному из направлений (14) точка X_{n+1} смещается по соответствующей прямолинейной образующей

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x^0 - (x_2^0 - x_1^0)(x^1 + x^2) = 0, \\ x^1 - x^2 - (x_2^0 - x_1^0)x^3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{r} x^1 + x^2 + (x_1^0 + x_2^0)x^3 = 0, \\ 2x^0 + (x_1^0 + x_2^0)(x^1 - x^2) = 0 \end{array} \right.$$

гиперболоида (15), проходящей через X_{n+1}. Справедливо и обратное.

Продолжая уравнения (9), имеем

$$\nabla_\delta a^0_{ijk} + 2a^0_{ijk}\pi^0_0 + 2a^0_{ij}\pi^0_k + a^0_{ik}\pi^0_j + a^0_{kj}\pi^0_i - (g_{ik}a^0_{sj} + g_{jk}a^0_{is})g^{st}\pi^0_t = 0. \tag{16}$$

Возьмем охват

$$\mathrm{A}^0_{ijk} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a^0_{ijk} - a^0_{ik}x^0_j - a^0_{kj}x^0_i - 2a^0_{ij}x^0_k + (g_{ik}a^0_{sj} + g_{jk}a^0_{is})g^{st}x^0_t; \tag{17}$$

в силу уравнений (3(в)), (4_1), (7), (9), (16) система функций (17) образует тензор $\nabla \mathrm{A}^0_{ijk} + 2\mathrm{A}^0_{ijk}\omega^0_0 = \mathrm{A}^0_{ijks}\omega^s_0$.

Предположим, что основной тензор a^0_{ij} невырожден

$$\begin{gathered} a^0_{ik}a^{kj}_0 = a^0_{ki}a^{jk}_0 = \delta^j_i, \quad \nabla a^{ij}_0 - a^{ij}_0\omega^0_0 = -a^{is}_0 a^{tj}_0 a^0_{stk}\omega^k_0, \\ a \stackrel{\mathrm{def}}{=} |a^0_{ij}| \neq 0, \quad d\ln a + 2\omega^0_0 - 2\omega^k_k = a_k\omega^k_0, \quad a_k = a^{ts}_0 a^0_{stk}; \end{gathered} \tag{18}$$

в этом случае будем говорить, что нормализация пространства C_n является невырожденной.

3. Возьмем новую систему из $(n+2)^2$ форм Пфаффа

$$\Omega^\mu_\lambda = \omega^\mu_\lambda + \Pi^\mu_{\lambda k}\omega^k_0; \tag{19}$$

потребуем, чтобы система форм $\{\Omega^\mu_\lambda\}$ удовлетворяла структурным уравнениям пространства конформной связности $\mathrm{C}_{n,n}$ [6]–[8]

$$D\Omega^\mu_\lambda = \Omega^\rho_\lambda \wedge \Omega^\mu_\rho + \frac{1}{2}R^\mu_{\lambda st}\omega^s_0 \wedge \omega^t_0.$$

Это требование порождает дифференциальные уравнения

$$d\Pi^\mu_{\lambda k} + \Pi^\mu_{\lambda k}\omega^0_0 - \Pi^\mu_{\lambda s}\omega^s_k - \Pi^\mu_{\rho k}\omega^\rho_\lambda + \Pi^\rho_{\lambda k}\omega^\mu_\rho + \Pi^\rho_{\lambda s}\Pi^\mu_{\rho k}\omega^s_0 = \widetilde{\Pi}^\mu_{\lambda ks}\omega^s_0, \tag{20}$$

при этом тензор кривизны-кручения пространства $\mathrm{C}_{n,n}$ имеет строение

$$R^\mu_{\lambda st} = -2\widetilde{\Pi}^\mu_{\lambda[st]}.$$

На формы системы $\{\Omega^\mu_\lambda\}$ наложим дополнительные условия, а именно, чтобы при преобразованиях (19)

1) формы Ω^k_0, Ω^0_0, Ω^{n+1}_{n+1} оставались без изменения, т. е. $\Omega^k_0 = \omega^k_0$, $\Omega^0_0 = \omega^0_0$, $= \omega^{n+1}_{n+1}$;
2) для пространства $\mathrm{C}_{n,n}$ метрическим тензором был тензор g_{ij} исходного пространства C_n;
3) формы Ω^μ_λ удовлетворяли соотношениям вида (3).

Требования 1)–3) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &\text{(а)} && \Pi^{n+1}_{0k} = \Pi^s_{0k} = \Pi^0_{0k} = \Pi^{n+1}_{ks} = \Pi^{n+1}_{n+1k} = \Pi^0_{n+1k} = 0, \\ &\text{(б)} && g^{ik}\Pi^j_{ks} + g^{jk}\Pi^i_{ks} = 0, \\ &\text{(в)} && g^{ik}\Pi^0_{ks} + \Pi^i_{n+1s} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Отметим, что требование одновременного выполнения соотношений (21) носит инвариантный характер.

В силу уравнений (20) и равенств (21 (а)) имеем

$$\begin{aligned} &\text{(а)} && \nabla\Pi^j_{ik} + \Pi^j_{ik}\omega^0_0 = \Pi^j_{iks}\omega^s_0, \\ &\text{(б)} && \nabla\Pi^0_{ik} + \Pi^0_{ik}\omega^0_0 + \Pi^t_{ik}\omega^0_t = \Pi^0_{iks}\omega^s_0, \quad \nabla\Pi^j_{n+1k} + \Pi^j_{n+1k}\omega^0_0 + \Pi^j_{tk}g^{tl}\omega^0_l = \Pi^j_{n+1ks}\omega^s_0; \end{aligned} \tag{22}$$

здесь $\Pi^j_{iks} = \widetilde{\Pi}^j_{iks} - \Pi^j_{n+1k}g_{is} - \Pi^0_{ik}\delta^j_s - \Pi^t_{is}\Pi^j_{tk}$, $\Pi^0_{iks} = \widetilde{\Pi}^0_{iks} - \Pi^t_{is}\Pi^0_{tk}$, $\Pi^j_{n+1ks} = \widetilde{\Pi}^j_{n+1ks} - \Pi^t_{n+1s}\Pi^j_{tk}$.

Задание поля тензора Π^j_{ik}, удовлетворяющего дифференциальным уравнениям (22 (а)) и конечным соотношениям (21 (б)), позволит найти функции Π^0_{ik}, Π^j_{n+1k}, т. к.

1) в силу уравнений (7), (22 (б)) в качестве функций Π^0_{ik} можно принять

$$\Pi^0_{ik} = \Pi^t_{ik} x^0_t; \tag{23}$$

2) в силу соотношений (21 (б), (в)), (23) в качестве функций Π^j_{n+1k} следует взять

$$\Pi^j_{n+1k} = -g^{js}\Pi^t_{sk}x^0_t = g^{ts}\Pi^j_{sk}x^0_t.$$

При этом компоненты тензора кривизны-кручения пространства $C_{n,n}$ имеют вид

$$R^j_{0st} = -2\Pi^j_{[st]}, \quad R^0_{0st} = -R^{n+1}_{n+1st} = x^0_l R^l_{0st}, \quad R^{n+1}_{0st} = R^0_{n+1st} = 0, \quad R^{n+1}_{ist} = 2\Pi^l_{i[s}g_{t]l}; \tag{24_1}$$

$$R^j_{iks} = -2\lfloor \Pi^j_{i[ks]} + (\Pi^t_{i[k}\delta^j_{s]} + g^{jl}\Pi^t_{l[k}g_{s]i})x^0_t + \Pi^j_{t[k}\Pi^t_{|i|s]}\rfloor; \tag{24_2}$$

$$R^0_{iks} = R^t_{iks}x^0_t - 2(\Pi^t_{i[k}a^0_{|t|s]} + g^{jl}\Pi^t_{l[k}g_{s]i}x^0_t x^0_j) + \frac{1}{2}R^{n+1}_{iks}g^{lt}x^0_l x^0_t, \quad R^j_{n+1ks} = -g^{jt}R^0_{tks}. \tag{24_3}$$

4. Приведем один из возможных охватов тензора Π^j_{ik} в предположении, что задана невырожденная нормализация конформного пространства C_n. Возьмем охват

$$\mathrm{A}^j_{ik} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a^{js}_0 \mathrm{A}^0_{sik} - g^{jt}g_{li}a^{ls}_0\mathrm{A}^0_{stk}, \quad \nabla \mathrm{A}^j_{ik} + \mathrm{A}^j_{ik}\omega^0_0 = \mathrm{A}^j_{iks}\omega^s_0. \tag{25}$$

В силу (25) соотношения (21 (б)) и (22 (а)) будут удовлетворены, если в качестве Π^j_{ik} взять тензор $\mathrm{A}^j_{ik} : \Pi^j_{ik} = \mathrm{A}^j_{ik}$; при этом соответствующие формы Ω^μ_λ связности обозначим через $\overset{1}{\omega}{}^\mu_\lambda$, а само пространство конформной связности — через $\overset{1}{C}_{n,n}$

$$\begin{gathered}
\overset{1}{\omega}{}^i_0 = \omega^i_0, \quad \overset{1}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0, \quad \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_{n+1} = \omega^{n+1}_{n+1}, \quad \overset{1}{\omega}{}^0_0 + \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_{n+1} = 0, \quad \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_i = \omega^{n+1}_i, \quad \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_0 = \overset{1}{\omega}{}^0_{n+1} = 0,\\
\overset{1}{\omega}{}^0_i + g_{ik}\overset{1}{\omega}{}^k_{n+1} = 0, \quad \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_i + g_{ik}\overset{1}{\omega}{}^k_0 = 0,\\
\overset{1}{\omega}{}^j_i = \omega^j_i + \mathrm{A}^j_{ik}\omega^k, \quad \overset{1}{\omega}{}^0_i = \omega^0_i + \mathrm{A}^t_{ik}x^0_t\omega^k_0, \quad \overset{1}{\omega}{}^j_{n+1} = \omega^j_{n+1} - g^{js}\mathrm{A}^t_{sk}x^0_t\omega^k_0,\\
dg_{ij} - g_{ik}\overset{1}{\omega}{}^k_j - g_{kj}\overset{1}{\omega}{}^k_i = 0.
\end{gathered} \tag{26}$$

Доказана

Теорема 2. *Невырожденная нормализация конформного пространства* C_n *индуцирует пространство конформной связности* $\overset{1}{C}_{n,n}$, *метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором* g_{ij} *исходного пространства* C_n, *формами связности его являются формы* $\overset{1}{\omega}{}^\mu_\lambda$ (*см.* (26)); *тензор кривизны-кручения* $\overset{1}{R}{}^\mu_{\lambda st}$ *пространства* $\overset{1}{C}_{n,n}$ *имеет строение* (24_{1-3}), *где* $\Pi^j_{ik} = \mathrm{A}^j_{ik}$, $\Pi^j_{iks} = \mathrm{A}^j_{iks}$ (*см.* (25)).

5. Уравнения (7) с использованием соотношений (26) можно записать в виде $dx^0_i + x^0_i\overset{1}{\omega}{}^0_0 - x^0_k\overset{1}{\omega}{}^k_i + \overset{1}{\omega}{}^0_i = x^0_{ik}\overset{1}{\omega}{}^k_0$. Следовательно, поле квазитензора x^0_i, определяющее нормализацию исходного конформного пространства C_n, задает нормализацию и индуцированного пространства конформной связности $\overset{1}{C}_{n,n}$; при этом поля основных тензоров a^0_{ij} (см. (8)) и $\overset{1}{a}{}^0_{ij}$ нормализованных пространств C_n и $\overset{1}{C}_{n,n}$ совпадают, т. е. $a^0_{ij} \equiv \overset{1}{a}{}^0_{ij}$.

Возьмем две системы форм $\{\theta^j_0, \theta^j_i\}$, $\{\overset{1}{\theta}{}^j_0, \overset{1}{\theta}{}^j_i\}$:

$$\begin{cases} \theta^j_0 = \omega^j_0,\\ \theta^j_i = \omega^j_i - \delta^j_i(\omega^0_0 - x^0_k\omega^k_0) + g^{js}x^0_s\omega^{n+1}_i + x^0_i\omega^j_0; \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \overset{1}{\theta}{}^j_0 = \overset{1}{\omega}{}^j_0,\\ \overset{1}{\theta}{}^j_i = \overset{1}{\omega}{}^j_i - \delta^j_i(\overset{1}{\omega}{}^0_0 - x^0_k\overset{1}{\omega}{}^k_0) + g^{js}x^0_s\overset{1}{\omega}{}^{n+1}_i + x^0_i\overset{1}{\omega}{}^j_0. \end{cases} \tag{28}$$

Каждая из этих систем удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [6], [8], а следовательно, определяет пространство аффинной связности соответственно $\mathrm{A}_{n,n}$ и $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$; пространство $\mathrm{A}_{n,n}$ имеет нулевое кручение, а кручение $\overset{1}{r}{}^{j}_{0st}$ пространства $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ совпадает с кручением $\overset{1}{R}{}^{j}_{0st}$ пространства конформной связности $\overset{1}{C}_{n,n}$ (см. $(24)_1$)

$$\overset{1}{r}{}^{j}_{0st} \equiv \overset{1}{R}{}^{j}_{0st} = -2\mathrm{A}^{j}_{[st]}.$$

Уравнения тензора g_{ij} (см. (3(в)), (26)) с использованием выражений (27), (28) запишутся в виде $dg_{ij} - g_{ik}\theta^k_j - g_{kj}\theta^k_i = g_{ij}\theta$, $dg_{ij} - g_{ik}\overset{1}{\theta}{}^k_j - g_{kj}\overset{1}{\theta}{}^k_i = g_{ij}\theta$, $\theta = 2(\omega^0_0 - x^0_k\omega^k_0)$. Последние уравнения говорят о том, что связности ∇, $\overset{1}{\nabla}$ пространств $\mathrm{A}_{n,n}$ и $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ являются вейлевыми [5] с полем метрического тензора g_{ij} и дополнительной формой θ; отметим, что вейлева связность $\overset{1}{\nabla}$, в отличие от ∇, вообще говоря, имеет кручение. Следует также заметить, что связность ∇ пространства $\mathrm{A}_{n,n}$ риманова тогда и только тогда, когда нормализация пространства C_n является гармонической, т. е. $a^0_{[ij]} = 0$. Последнее следует из того, что в силу (8) внешний дифференциал $D\theta = 2a^0_{[st]}\omega^s_0 \wedge \omega^t_0$; следовательно, дополнительная форма θ есть полный дифференциал тогда и только тогда, когда $a^0_{[st]} = 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Невырожденная нормализация конформного пространства C_n полем квазитензора x^0_i индуцирует нормализацию пространства конформной связности $\overset{1}{C}_{n,n}$, при этом поля основных тензоров a^0_{ij} и $\overset{1}{a}{}^0_{ij}$ этих пространств совпадают; аффинные связности ∇ и $\overset{1}{\nabla}$, индуцируемые при этой нормализации, являются вейлевыми с полем метрического тензора g_{ij}, причем связность ∇ не имеет кручения, тензор кручения связности $\overset{1}{\nabla}$ совпадает с тензором кручения пространства $\overset{1}{C}_{n,n}$ и, вообще говоря, является ненулевым. Связность ∇ риманова тогда и только тогда, когда нормализация пространства C_n является гармонической.*

6. Невырожденная нормализация конформного пространства C_n определяет поле симметричного тензора b_{ij} (см. (11)). Совокупность функций

$$\mathrm{B}_{ijk} \overset{\text{def}}{=} b_{ijk} - 4b_{ij}x^0_k - b_{ik}x^0_j - b_{kj}x^0_i + (g_{ik}b_{sj} + g_{jk}b_{is})g^{st}x^0_t$$

образует симметричный по индексам i, j тензор $\nabla\mathrm{B}_{ijk} + 5\mathrm{B}_{ijk}\omega^0_0 = \mathrm{B}_{ijks}\omega^s_0$. В силу этого в п. 4 в качестве тензора Π^j_{ik} можно взять тензор

$$\mathrm{B}^j_{ik} \overset{\text{def}}{=} b^{js}B_{sik} - g^{jt}g_{li}b^{ls}\mathrm{B}_{stk} \quad (\text{ср. с } (25)), \tag{29}$$

что приводит к справедливости аналогов теорем 2 и 3 относительно пространств конформной связности $\overset{2}{C}_{n,n}$ и аффинной связности $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$, определяемых охватами (29).

Аналогично, поле невырожденного симметричного тензора b_{ij} определяет поле невырожденного симметричного тензора $c_{ij} \overset{\text{def}}{=} g^{st}b_{is}b_{jt}$, что в свою очередь приводит к справедливости аналогов теорем 2 и 3 относительно пространств конформной связности $\overset{3}{C}_{n,n}$ и аффинной связности $\overset{3}{\mathrm{A}}_{n,n}$.

Продолжая этот процесс, можно утверждать, что невырожденная нормализация конформного пространства C_n полем квазитензора x^0_i индуцирует бесчисленное множество пространств конформной связности $\overset{p}{C}_{n,n}$ и аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ $(p = 1, 2, \dots)$, удовлетворяющих теоремам 2 и 3 соответственно.

В случае нормализованного собственно конформного пространства C_n в силу уравнений (4_2), (18) имеем

$$d\ln\left(\frac{a}{g}\right)+2n\omega_0^0=a_k\omega_0^k, \quad a_k=a_0^{ts}a_{stk}^0;$$

продолжая последнее уравнение, находим

$$da_i+a_i\omega_0^0-a_k\omega_i^k+2n\omega_i^0=a_{ik}\omega_0^k, \quad a_{[ik]}=0.$$

Из этих уравнений очевидно, что поле квазитензора $\frac{a_i}{2n}$ определяет нормализацию собственно конформного пространства C_n; эта нормализация индуцирована первоначальной нормализацией пространства C_n, т. е. нормализацией полем квазитензора x_i^0.

В случае нормализации собственно конформного пространства C_n полем квазитензора $\frac{a_i}{2n}$ в качестве основного тензора A_{ij}^0 вместо a_{ij}^0 (см. (8)) теперь берется

$$\mathrm{A}_{ij}^0\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{2n}\left(a_{ij}-\frac{a_ia_j}{2n}+\frac{1}{4n}g_{ij}g^{st}a_sa_t\right); \tag{30}$$

при этом нормализация пространства с полем основного тензора A_{ij}^0 является гармонической, т. е. $\mathrm{A}_{[ij]}^0=0$. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Невырожденная нормализация* (*не обязательно гармоническая*) *собственно конформного пространства* C_n *полем квазитензора* x_i^0 *индуцирует гармоническую нормализацию исходного пространства полем квазитензора* $\frac{a_i}{2n}$, *основной тензор которой имеет строение* (30).

7. Известно [2], что если точка $M\in\mathrm{C}_n$ отлична от текущей точки $A_0\in\mathrm{C}_n$ и не лежит на изотропном конусе $g_{ij}x^ix^j=0$ с вершиной в точке A_0, то она имеет разложение $M=x^0A_0+x^iA_i+A_{n+1}$, и уравнения $\delta x^0+2x^0\pi_0^0+x^j\pi_j^0=0$, $\delta x^i+x^i\pi_0^0+x^j\pi_j^i-g^{ij}\pi_j^0=0$ представляют собой условие ее инвариантности.

В [9] рассматриваются соприкасающиеся циклиды Дарбу гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1}\subset\mathrm{C}_n$. Циклидой, как известно, называют гиперповерхность пространства C_n, уравнение которой в выбранном полуизотропном репере R имеет вид

$$Q: p_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu=0, \quad p_{\lambda\mu}=p_{\mu\lambda}, \tag{31}$$

где x^λ — координаты точек $M\in\mathrm{C}_n$, принадлежащих циклиде. Условие инвариантности циклиды запишется в виде

$$\delta(p_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu)=\theta(p_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu). \tag{32}$$

Будем считать, что циклида Q не проходит через точку $A_0\in\mathrm{C}_n$: $p_{00}\neq0$. За счет нормировки коэффициентов уравнения (31) можно добиться, чтобы $p_{00}=-1$. Исключая из уравнений (32) форму $\theta=-4\pi_0^0$, имеем условия инвариантности циклиды (31)

$$\begin{aligned}\delta p_{0i}+p_{0i}\pi_0^0-p_{0k}\pi_i^k+\pi_i^0&=0,\\ \delta p_{0n+1}+2p_{0n+1}\pi_0^0+p_{0s}g^{st}\pi_t^0&=0,\\ \delta p_{ij}+2p_{ij}\pi_0^0-p_{ik}\pi_j^k-p_{kj}\pi_i^k-p_{0i}\pi_j^0-p_{0j}\pi_i^0&=0,\\ \delta p_{in+1}+3p_{in+1}\pi_0^0-p_{kn+1}\pi_i^k-p_{0n+1}\pi_i^0+p_{ik}g^{ks}\pi_s^0&=0,\\ \delta p_{n+1,n+1}+4p_{n+1,n+1}\pi_0^0+2p_{kn+1}g^{ks}\pi_s^0&=0.\end{aligned} \tag{33}$$

Пусть задана нормализация (не обязательно невырожденная) конформного пространства C_n полем квазитензора x_i^0; в этом случае уравнениям (33) удовлетворяют соответственно следующие охваты:

$$
\begin{gathered}
a_{0i} \stackrel{\text{def}}{=} x_i^0, \quad a_{0n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} g^{st} x_s^0 x_t^0, \quad a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -(a_{(ij)}^0 + x_i^0 x_j^0), \quad a_{(ij)}^0 = \tfrac{1}{2}(a_{ij}^0 + a_{ji}^0), \\
a_{in+1} \stackrel{\text{def}}{=} -(a_{(ik)}^0 g^{ks} x_s^0 + \tfrac{1}{2} g^{st} x_s^0 x_t^0 x_i^0), \quad a_{n+1,n+1} \stackrel{\text{def}}{=} -\lfloor a_{(kl)}^0 g^{ks} g^{lt} x_s^0 x_t^0 + (\tfrac{1}{2} g^{st} x_s^0 x_t^0)^2 \rfloor.
\end{gathered} \tag{34}
$$

Если принять $p_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu}$, то уравнение циклиды (31) в силу (34) имеет вид

$$
a_{(ij)}^0 (x^i + g^{il} x_l^0 x^{n+1})(x^j + g^{js} x_s^0 x^{n+1}) + (x_i^0 x^i - x^0 + \tfrac{1}{2} g^{ij} x_i^0 x_j^0 x^{n+1})^2 = 0. \tag{35}
$$

Очевидно, нормализующая точка $X_{n+1} \in \mathrm{C}_n$ (см. (6)) принадлежит циклиде (35).

При перенесении Дарбу образы всех точек циклиды (35) лежат на гиперквадрике Дарбу $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$; следовательно, в проективном пространстве P_{n+1} образом циклиды при перенесении Дарбу является $(n-1)$-мерная поверхность 4-го порядка, лежащая на гиперквадрике Дарбу Q_n^2 и проходящая через точку $\mathrm{X}_{n+1} \in Q_n^2$:

$$
\begin{cases}
a_{(ij)}^0 (x^i + g^{il} x_l^0 x^{n+1})(x^j + g^{js} x_s^0 x^{n+1}) + (x_i^0 x^i - x^0 + \tfrac{1}{2} g^{ij} x_i^0 x_j^0 x^{n+1})^2 = 0, \\
g_{ij} x^i x^j + 2x^0 x^{n+1} = 0.
\end{cases} \tag{36}
$$

Известно, что если в проективном пространстве P_{n+1} от репера $\mathrm{R} = \{\mathrm{A}_\lambda\}$ перейти к реперу $\mathrm{R}' = \{\mathrm{A}_0, \mathrm{P}_i, \mathrm{X}_{n+1}\}$, то имеет место следующая связь между “старыми” x^λ и “новыми” y^λ координатами точки $\mathrm{M} \in \mathrm{P}_{n+1}$:

$$
\begin{gathered}
x^0 = y^0 + x_j^0 y^j - \tfrac{1}{2} g^{st} x_s^0 x_t^0 y^{n+1}, \\
x^i = y^i - g^{si} x_s^0 y^{n+1}, \\
x^{n+1} = y^{n+1}.
\end{gathered}
$$

Уравнение (36) образа циклиды при перенесении Дарбу в репере R' примет вид

$$
\begin{cases}
a_{(ij)}^0 y^i y^j + (y^0)^2 = 0, \\
g_{ij} y^i y^j + 2y^0 y^{n+1} = 0.
\end{cases} \tag{36$'$}
$$

Первое из уравнений (36$'$) в проективном пространстве P_{n+1} есть гиперконус второго порядка с вершиной в точке X_{n+1}, второе — гиперквадрика Дарбу; их пересечение и есть образ циклиды (35) при перенесении Дарбу конформного пространства C_n на проективное пространство P_{n+1}.

Если тензор $a_{(ij)}^0$ положительно определенный, то циклида Дарбу, соответствующая точке $A_0 \in \mathrm{C}_n$, есть мнимая гиперповерхность (35) пространства C_n, на которой лежит действительная оснащающая точка X_{n+1}. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Нормализация конформного пространства* C_n *внутренним образом индуцирует поле инвариантных циклид Дарбу* (35), *содержащих нормализующие точки* $X_{n+1} \in \mathrm{C}_n$ *и не проходящих через нормализуемые точки* $A_0 \in \mathrm{C}_n$; *в каждой точке* $A_0 \in \mathrm{C}_n$ *образом соответствующей циклиды при перенесении Дарбу на проективное пространство* P_{n+1} *является* $(n-1)$*-поверхность 4-го порядка* (36) (*она может быть и мнимой*), *лежащая на гиперквадрике Дарбу и являющаяся пересечением этой гиперквадрики с гиперконусом второго порядка с вершиной в точке* X_{n+1} (*см.* (36$'$).

Геометрическая характеристика циклиды Дарбу (35) заключается в следующем. Согласно соотношению (10) смещение $d\mathrm{X}_{n+1}$ образа оснащающей точки $X_{n+1} \in \mathrm{C}_n$ принадлежит касательной гиперплоскости $[\mathrm{X}_{n+1}\mathrm{P}_i]$ к гиперквадрике Дарбу в точке X_{n+1}; в силу (10), (36$'$) очевидно, что это смещение в пространстве P_{n+1} принадлежит гиперконусу $a^0_{(ij)}y^iy^j + (y^0)^2 = 0$ с вершиной в точке X_{n+1} тогда и только тогда, когда смещение точки $A_0 \in \mathrm{C}_n$ принадлежит конусу направлений

$$a^0_{(ij)}g^{is}g^{jt}a^0_{sk}a^0_{tl}\omega^k_0\omega^l_0 = 0 \tag{37}$$

с вершиной в точке A_0. Следовательно, справедлива

Теорема 6. *При всевозможных смещениях нормализуемой точки $A_0 \in \mathrm{C}_n$, принадлежащих конусу направлений* (37), *нормализующая точка $X_{n+1} \in \mathrm{C}_n$ описывает циклиду Дарбу* (35); *справедливо и обратное.*

Рассмотрим пример. Пусть задана невырожденная нормализация собственно конформной плоскости C_2, причем симметрированный тензор $a^0_{(ij)}$ нормализации имеет сигнатуру, равную нулю. В силу положительной определенности метрического тензора g_{ij} плоскости C_2 за счет специализации конформного репера $\widetilde{R} = \{A_0, P_i, A_3\}$ тензоры g_{ij} и $a^0_{(ij)}$ можно привести к следующим нормальным видам:

$$g_{ij} = \delta_{ij}; \quad a^0_{11} = 1, \quad a^0_{22} = -1, \quad a^0_{12} = 0. \tag{38}$$

В таком специализированном репере уравнения циклиды Дарбу (35) и конуса направлений (37) в силу (38) запишутся соответственно в виде

$$(x^1 + x^0_1x^3)^2 - (x^2 + x^0_2x^3)^2 + \{x^0_ix^i - x^0 + \tfrac{1}{2}[(x^0_1)^2 + (x^0_2)^2]x^3\}^2 = 0, \tag{39}$$

$$\lfloor 1 - (a^0_{12})^2 \rfloor \lfloor (\omega^1_0)^2 - (\omega^2_0)^2 \rfloor = 0. \tag{40}$$

Так как справедливо $|a^0_{ij}| = (a^0_{12})^2 - 1 \neq 0$, то (40) определяет два направления:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \ \omega^1_0 : \omega^2_0 = 1 : 1, \\ &\text{б)}\ \ \omega^1_0 : \omega^2_0 = -1 : 1. \end{aligned} \tag{41}$$

Следовательно, при невырожденной нормализации собственно конформной плоскости C_2 с нулевой сигнатурой тензора $a^0_{(ij)}$ в каждой точке $A_0 \in \mathrm{C}_2$ конус направлений (37) состоит из двух действительных направлений (41); заметим, что эти направления определены в специализированном конформном репере $\widetilde{R} = \{A_0, P_i, A_3\}$ (см. (38)).

В силу соотношений (10), (38) в точке $\mathrm{X}_3 \in Q^2_2$ направлениям (41) соответствуют две различные касательные к образу циклиды (39) при перенесении Дарбу, определяемые направлениями

$$\begin{aligned} d_1\mathrm{X}_3 &= \theta_1\mathrm{X}_3 - (a^0_{12} + 1)(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)\omega^2_0, \\ d_2\mathrm{X}_3 &= \theta_2\mathrm{X}_3 - (a^0_{12} - 1)(\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2)\omega^2_0; \end{aligned} \tag{42}$$

т. к. $|a^0_{ij}| \neq 0$, то $a^0_{12} + 1 \neq 0$, $a^0_{12} - 1 \neq 0$.

Соотношения (42) говорят о том, что в точке $\mathrm{X}_3 \in Q^2_2$ направления $(\mathrm{X}_3\mathrm{P}_1)$, $(\mathrm{X}_3\mathrm{P}_2)$, $(\mathrm{X}_3d_1\mathrm{X}_3)$, $(\mathrm{X}_3d_2\mathrm{X}_3)$ образуют гармоническую четверку

$$((\mathrm{X}_3\mathrm{P}_1), (\mathrm{X}_3\mathrm{P}_2); (\mathrm{X}_3d_1\mathrm{X}_3), (\mathrm{X}_3d_2\mathrm{X}_3)) = -1.$$

Таким образом, *при невырожденной нормализации собственно конформной плоскости C_2 с нулевой сигнатурой симметрированного тензора $a^0_{(ij)}$ в специализированном конформном репере $\widetilde{R} = \{A_0, P_i, A_3\}$, определяемом соотношениями* (38), *направления* (42) *касательных к образу циклиды* (39) *при перенесении Дарбу в каждой точке $\mathrm{X}_3 \in Q^2_2$ гармонически разделяют направления $(\mathrm{X}_3\mathrm{P}_1)$, $(\mathrm{X}_3\mathrm{P}_2)$.*

Литература

1. Акивис М.А. *К конформно-дифференциальной геометрии многомерных плоскостей* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – № 1. – С. 53–72.
2. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations.* – USA, 1996. – 386 p.
3. Бушманова Г.В., Норден А.П. *Элементы конформной геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.
4. Норден А.П. *Конформная интерпретация пространства Вейля* // Матем. сб. – 1949. – Т. 24. – № 1. – С. 75–85.
5. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
6. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1979. – Т. 9. – 246 с.
7. Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. – 210 с.
8. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–283.
9. Акивис М.А. *Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства* // Матем. сб. – 1952. – Т. 31. – № 1. – С. 43–75.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступила
22.03.2002