ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 512.543

Е.Н. ЯКОВЕНКО

ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ С ПОЛУБРАУЭРОВОЙ РЕШЕТКОЙ ЗАМКНУТЫХ ПОДГРУПП

Решетка $\mathcal{L}$ называется *полубрауэровой вверх* (удовлетворяет условию $sB_\cap$), если для любых $A, B \in \mathcal{L}$ во множестве $\{X \in \mathcal{L} \mid A \cap B = A \cap X\}$ есть наибольший элемент. Локально-компактная группа G называется *sB-группой*, если решетка $\mathcal{L}(G)$ полубрауэрова вверх. Такие группы изучались В.М.Ширяевым при дополнительном предположении компактной покрываемости; условие полубрауэровости решетки $\mathcal{L}(G)$ оказалось равносильным дистрибутивности $\mathcal{L}(G)$ [1]. В данной статье получен аналогичный результат для произвольных локально-компактных групп.

Пусть $\mathcal{L}(G)$ — решетка всех замкнутых подгрупп группы G с операциями $\cap$ и $\triangledown$ (композит), G_0 — связная компонента единицы e группы G, $\mathbb{R}$ — аддитивная группа всех действительных чисел с естественной топологией, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — одномерный тор, $\mathbb{C}_{p^n}$ — циклическая группа порядка p^n, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — квазициклическая группа (p — простое число), $\mathbb{Q}_p$ ($\mathbb{Z}_p$) — группа всех (всех целых) p-адических чисел, $\mathbb{Q}^\partial$ — аддитивная группа рациональных чисел с дискретной топологией.

Пример 1. Дискретная группа G ранга 1 является sB-группой.

Действительно, для любых $A, B \in \mathcal{L}(G)$ обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех подгрупп X, удовлетворяющих условию $A \cap B = A \cap X$. Пусть M — композит всех подгрупп из $\mathfrak{M}$. Покажем, что $M \in \mathfrak{M}$. Если $a \in A \cap M$, то $a \in \mathop{\triangledown}\limits_{i=1}^{n} X_i$, где $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{M}$. Ввиду дистрибутивности $\mathcal{L}(G)$ имеем $A \cap \Big(\mathop{\triangledown}\limits_{i=1}^{n} X_i\Big) = \mathop{\triangledown}\limits_{i=1}^{n} (A \cap X_i) = A \cap B$, так что $a \in A \cap B$. Итак, $A \cap B = A \cap M$, и M — наибольший элемент в $\mathfrak{M}$.

Пример 2. $\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p$ не является sB-группой.

Действительно, пусть $G = A \times B$, $A = \langle a \rangle$, $a^p = e$, $B = \langle b \rangle$, $b^p = e$, $C = \langle ab \rangle$. Легко видеть, что множество $\{X \in \mathcal{L}(G) \mid A \cap B = A \cap X\}$ не содержит наибольшего элемента M, т.к. M должен содержать C.

Пример 3. $\mathbb{T}$ не является sB-группой.

Действительно, рассмотрим подгруппы $A = \langle a \rangle$, $a^p = e$ и $B = \langle b \rangle$, $b^q = e$, $p \neq q$. Допустим, что множество $\mathfrak{M} = \{X \in \mathcal{L}(\mathbb{T}) \mid A \cap X = A \cap B = e\}$ содержит наибольший элемент M. Так как все подгруппы B_n, топологически изоморфные $\mathbb{C}_{q^n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, принадлежат $\mathfrak{M}$, то $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n} \subset M$. Но $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n} = \mathbb{T}$, поэтому $M = \mathbb{T}$, что противоречит условию $A \cap M = e$.

Лемма 1. *Условие sB наследуется замкнутыми подгруппами и факторгруппами.*

Доказательство. Пусть G — sB-группа, H — замкнутая подгруппа, $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Если C — наибольший элемент в $\{X \in \mathcal{L}(G) \mid A \cap B = A \cap X\}$, то очевидно, $C \cap H$ — наибольший элемент в $\{Y \in \mathcal{L}(H) \mid A \cap B = A \cap Y\}$.

Пусть N — замкнутая нормальная подгруппа в G, $\widetilde{G} = G/N$. Пусть $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ — замкнутые подгруппы в $\widetilde{G}$, A и B — их полные прообразы в G, C — наибольший элемент в $\{X \in \mathcal{L}(G) \mid A \cap B = A \cap X\}$. Легко видеть, что CN/N — наибольший элемент в $\{\widetilde{Y} \in \mathcal{L}(\widetilde{G}) \mid \widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \widetilde{A} \cap \widetilde{Y}\}$. $\square$

Лемма 2. *Любая sB-группа G нульмерна.*

Доказательство. Если $G_0 \neq e$, то G_0 обладает нетривиальной лиевой факторгруппой G_0/N, которая содержит замкнутую подгруппу A, топологически изоморфную $\mathbb{T}$ или $\mathbb{R}$. Ввиду леммы 1 A должна быть sB-группой, что противоречит примеру 3. $\square$

Лемма 3. *Компактная абелева sB-группа G монотетична.*

Доказательство. По лемме 2 группа G нульмерна и потому проконечна; пусть G — проективный предел групп G_λ $(\lambda \in \Lambda)$. В конечной абелевой группе G_λ все силовские p-подгруппы цикличны ввиду примера 2, поэтому группа G_λ циклическая для любого λ. Но тогда G монотетична по следствию 1 из [2]. $\square$

Лемма 4. *Всякая sB-группа G абелева.*

Доказательство. Пусть $a, b \in G$, $A = \langle \overline{a} \rangle$, $B = \langle \overline{b} \rangle$. Достаточно доказать, что $A \nabla B$ абелева, поэтому будем считать $G = A \nabla B$. Тогда подгруппа $D = A \cap B$ содержится в центре G. Пусть L — наибольший элемент в $\mathfrak{N} = \{X \in \mathcal{L}(G) \mid B \cap D = B \cap X\}$. Поскольку $B \cap A = D = B \cap D$, то подгруппа $A \in \mathfrak{N}$, и потому $A \leq L$. Тогда $L^a = L$ для любого $a \in A$.

Так как B абелева, $D = D^b = (B \cap D)^b = (B \cap L)^b = B \cap \mathcal{L}^b$, т. е. $L^b \in \mathfrak{N}$, поэтому $L^b \leq L$. Таким образом, $L \triangleleft G$.

Пусть M — наибольший элемент в $\mathfrak{M} = \{X \in \mathcal{L}(G) \mid L \cap D = L \cap X\}$. Так как $L \cap B = B \cap D = D = L \cap D$, подгруппа $B \in \mathfrak{M}$, и поэтому $B \leq M$. Для любого $a \in A$ $L \cap M^a = (L \cap M)^a = (L \cap D)^a = D^a = D = L \cap D$, поэтому $M^a \in \mathfrak{M}$, $M^a \leq M$. Следовательно, $M \triangleleft G$.

Рассмотрим факторгруппу $G/D = \widetilde{G} = \widetilde{L} \nabla \widetilde{M}$, где $\widetilde{L} = L/D$, $\widetilde{M} = M/D$. Из равенства $L \cap M = D$ вытекает $\widetilde{L} \cap \widetilde{M} = e$, поэтому $\widetilde{G} = \widetilde{L} \times \widetilde{M}$ (абстрактно). Поскольку $\widetilde{G}$ порождается перестановочными элементами $\widetilde{a} = aD$ и $\widetilde{b} = bD$, группа $\widetilde{G}$ абелева.

Если $D = e$, то группа G абелева. Если $D \neq e$, то элементы $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ компактны, откуда вытекает компактность $\widetilde{G}$. Согласно лемме 3 $\widetilde{G}$ монотетична. Ввиду центральности D группа G абелева. $\square$

Теорема. *Группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию sB, когда G — нульмерная группа ранга 1, т. е. либо подгруппа из $\mathbb{Q}^\partial$, либо периодическая абелева группа, силовские подгруппы которой изоморфны $\mathbb{C}_{p^n}$, $\mathbb{C}_{p^\infty}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$.*

Доказательство. Пусть G — sB-группа. Согласно леммам 2 и 4 G абелева и нульмерна. Если G периодична, то любая ее конечнопорожденная замкнутая подгруппа X компактна. По лемме 2 X монотетична, поэтому G имеет ранг 1.

Пусть G содержит чистый элемент a, $A = \langle \overline{a} \rangle$, K — подгруппа всех компактных элементов из G. По доказанному K имеет ранг 1. Допустим, что $K \neq e$, b — элемент простого порядка из K, $\langle b \rangle = B$. Ввиду условия sB множество $\mathfrak{M} = \{X \in \mathcal{L}(G) \mid A \cap X = A \cap B = e\}$ содержит наибольший элемент M. Так как $A \cap \langle ab \rangle = e$, то $\langle ab \rangle \in \mathfrak{M}$, поэтому $\langle ab \rangle \leq M$. Поскольку также $B \leq M$, получим $a \in M$ — противоречие. Следовательно, G — дискретная группа без кручения.

Допустим, что G содержит подгруппу $C = \langle c \rangle$, $A \cap C = e$. Рассмотрим множество $\mathfrak{N} = \{X \in \mathcal{L}(G) \mid A \cap X = A \cap C\}$ и обозначим через N его наибольший элемент. Так как $\langle a \rangle \cap \langle ac \rangle = e$, то $\langle ac \rangle \in \mathfrak{N}$, т. е. $\langle ac \rangle \leq N$. Отсюда получим $\langle a \rangle \leq N$, что невозможно. Значит, для любой циклической подгруппы C из G должно быть $D = A \cap C \neq e$. Поскольку группа $A \nabla C/D$ порождается элементами aD и cD конечных порядков, то она конечна и циклична по лемме 3. Но тогда циклической будет и $A \nabla C$, т. е. ранг G равен 1.

По теореме 4 из [3] G — либо подгруппа из $\mathbb{Q}^{\partial}$, либо периодическая абелева группа, силовские подгруппы которой имеют цепную решетку.

Обратно, пусть G — нульмерная группа ранга 1. Если G периодична, то $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$ есть кардинальное произведение решеток $\mathcal{L}(G_{p_i})$, где $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}(G_{p_i})$ — цепь $(i \in I)$ ([3], теорема 7). Очевидно, все $\mathcal{L}_i$ удовлетворяют условию $sB_\cap$. Осталось показать, что условие $sB_\cap$ наследуется кардинальными произведениями решеток.

Пусть $A = \prod A_i \in \mathcal{L}$, $B = \prod B_i \in \mathcal{L}$, где $A_i, B_i \in \mathcal{L}_i$ $(i \in I)$. Так как $\mathcal{L}_i$ удовлетворяет условию $sB_\cap$, то множество $\mathfrak{M}_i = \{Y_i \in \mathcal{L}_i \mid A_i \cap B_i = A_i \cap Y_i\}$ содержит наибольший элемент M_i. Положим $M = \prod\limits_{i \in I} M_i$. Легко проверить, что $X = \prod X_i$ тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{M} = \{Y \in \mathcal{L}(G) \mid A \cap B = A \cap Y\}$, когда $X_i \in \mathfrak{M}_i$ для любого i. Отсюда, в частности, следует $M \in \mathfrak{M}$. Для любого $X = \prod X_i$ из $\mathfrak{M}$ из равенства $A_i \cap B_i = A_i \cap X_i$ $(i \in I)$ ввиду максимальности M_i следует $X_i \leq M_i$ $(i \in I)$, т.е. $X \leq M$. Итак, M — наибольший элемент в $\mathfrak{M}$. $\square$

Случай дискретной группы рассмотрен в примере 1.

Литература

1. Ширяев В.М. *Локально-компактные компактно покрываемые группы с полубрауэровой решеткой замкнутых подгрупп* // Теория полугрупп и ее прилож. – Саратов, 1993. – № 11. – С. 78–90.
2. Мухин Ю.Н., Хоменко О.П. *Монотетичные группы и подгрупповая решетка* // Матем. зап. Уральск. ун-та. – 1967. – Т.6. – № 1. – С. 67–79.
3. Мухин Ю.Н. *Локально-компактные группы с дистрибутивной структурой замкнутых подгрупп* // Сиб. матем. журн. – 1967. – Т. 8. – № 2. – С. 366–375.

Омский государственный
педагогический институт

Поступила
01.12.1995