Известия вузов. Математика
2015, №10, с. 19–26
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

НГУЕН БЫОНГ, НГУЕН ТХИ ХОНГ ФЫОНГ, НГУЕН ТХАЙ ТУ ТХИЕУ

ЯВНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

УДК: 517.988

Аннотация. В работе предлагаются два явных итерационных метода для решения вариационного неравенства над множеством общих неподвижных точек бесконечного семейства нерастягивающих отображений вещественных рефлексивных строго выпуклых банаховых пространств с равномерно дифференцируемой по Гато нормой.

Ключевые слова: нерастягивающее отображение, неподвижная точка, вариационное неравенство.

1. Введение

Пусть E — банахово пространство, E^* — двойственное ему пространство. Для простоты будем обозначать нормы пространств E и E^* одним и тем же символом $\|\cdot\|$. Вместо записи $x^*(x)$, где $x^* \in E^*$ и $x \in E$, будем использовать запись $\langle x, x^*\rangle$. Отображение J из E в E^*, удовлетворяющее условию

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|\,\|x^*\| \ \text{ и } \ \|x^*\| = \|x\|\},$$

называется нормализованным дуальным отображением пространства E. Пусть C — некоторое непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства E и пусть $F : E \to E$ — некоторое нелинейное отображение. Решение вариационного неравенства предполагает нахождение точки $p^* \in C$ такой, что

$$\langle F(p^*), j(p^* - p)\rangle \le 0 \quad \forall p \in C, \tag{1}$$

для некоторого $j(p^* - p) \in J(p^* - p)$.

Напомним, что если отображение $T : C \to C$ удовлетворяет условиям $\|Tx-Ty\| \le \|x-y\|$, $\langle Tx - Ty, j(x - y)\rangle \ge \eta\|x - y\|^2$ с фиксированным $\eta > 0$ и

$$\langle Tx - Ty, j(x - y)\rangle \le \|x - y\|^2 - \gamma\|(I - T)x - (I - T)y\|^2,$$

где $\gamma \in [0, 1)$, а символ I означает тождественное отображение в E, то оно называется соответственно нерастягивающим, η-сильно аккретивным и γ-строго псевдосжимающим на C. Отображение, являющееся 0-строго псевдосжимающим, называется псевдосжимающим. Обозначим множество неподвижных точек отображения T через $\mathrm{Fix}(T)$, т. е.

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in C : x = Tx\}.$$

Поступила 23.02.2014

Работа выполнена при поддержке Вьетнамского государственного фонда развития науки и технологий.

В работах [1], [2] рассмотрен случай, когда отображение F является η-сильно аккретивным и γ-строго псевдосжимающим, причем выполнено условие $\eta + \gamma > 1$, а $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ представляет собой счетно бесконечное семейство нерастягивающих отображений пространства E (E — вещественное рефлексивное строго выпуклое банахово пространство с равномерно дифференцируемой по Гато нормой). Для решения вариационного неравенства (1), где

$$C = \cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i), \tag{2}$$

нами предлагаются методы регуляризации и неявные итерационные методы. Для этого в [1], [2] рассматривается новое отображение V_k, определяемое следующим образом:

$$V_k = V_k^1, \quad V_k^i = T^i T^{i+1} \dots T^k, \quad T^i = (1 - \alpha_i)I + \alpha_i T_i$$

для всех $i \leq k$, где последовательность $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$\alpha_i \in (0, 1) \ \text{ и } \ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty.$$

Для случая, когда $E \equiv H$, H — гильбертово пространство, $C = \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i)$, а T_i, $i = 1, \dots, N$, — конечное семейство нерастягивающих отображений на H, Н. Быонг и Л. Дыонг [3] построили сильно сходящийся алгоритм

$$x_{k+1} = (1 - \beta_k^0)x_k + \beta_k^0 T_0^k \widetilde{V}_k x_k, \quad x_1 \in E, \quad \widetilde{V}_k = T_N^k T_{N-1}^k \dots T_1^k. \tag{3}$$

Здесь $T_0^k = I - \mu\lambda_k F$, μ — фиксированное вещественное число, $\lambda_k \in (0, 1)$ и выполнены условия

(L1) $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$,

(L2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$,

$T_i^k = (1 - \beta_k^i)I + \beta_k^i T_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, и $\beta_k^i \in (\alpha, \beta)$ для некоторых $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $k \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, N$, причем $|\beta_{k+1}^i - \beta_k^i| \to 0$ при $k \to \infty$, $i = 1, 2, \dots, N$. Теорема 1, приведенная ниже, была доказана Яо и др. для случая, когда $C = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$.

Теорема 1 ([5])**.** *Пусть H — вещественное гильбертово пространство и пусть отображение $F : H \to H$ непрерывно по Липшицу с некоторой положительной константой L и сильно монотонно с некоторой положительной константой η. Пусть $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ — бесконечное семейство нерастягивающих отображений пространства H. Тогда последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, заданная правилом*

$$x_{k+1} = (1 - \gamma_k)F_k(x_k) + \gamma_k W_k F_k(x_k), \tag{4}$$

где $F_k = I - \lambda_k F$, $\lambda_k \in (0, 1)$, выполнены условия (L1), (L2) *и $\gamma_k \in [\gamma, 1/2]$ для некоторого $\gamma > 0$, сильно сходится к точке p^*, т. е. к решению задачи* (1)—(2) *при условии $C \neq \emptyset$.*

Доказательство теоремы основано на использовании W_k-отображения В. Такахаси [4], построенного с помощью отображений $T_k, T_{k-1}, \dots, T_1$ и вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$

таких, что $0 < \alpha_i \le b < 1$ для $i \ge 1$, следующим образом:

$$\begin{aligned}
U_{k,k+1} &= I,\\
U_{k,k} &= \alpha_k T_k U_{k,k+1} + (1-\alpha_k)I,\\
U_{k,k-1} &= \alpha_{k-1} T_{k-1} U_{k,k} + (1-\alpha_{k-1})I,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
U_{k,2} &= \alpha_2 T_2 U_{k,3} + (1-\alpha_2)I,\\
W_k = U_{k,1} &= \alpha_1 T_1 U_{k,2} + (1-\alpha_1)I.
\end{aligned}$$

В работе [6] тот же результат получен Ш. Вонгом при замене условия (L1) неравенством $0 < \lambda_k \le \eta/L^2 - \varepsilon$, где ε — малая положительная константа, $k \ge k_0$, k_0 — некоторое целое число, $k_0 > 1$ и $\lambda_k F(x_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Ясно, что схемы (3) и (4) не являются параллельными алгоритмами, а значит, при достаточно больших значениях N их вычисление может потребовать много времени. Кроме того, вычисление значений V_k и W_k в точках пространства E или H весьма трудоемко. Преодолеть эти недостатки можно, если в отображении S_k, определенном ниже, вместо V_k и W_k использовать два предложенных явных итерационных метода: для любого $x_1 \in E$ последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ строится по правилу

$$x_{k+1} = (1-\gamma_k)x_k + \gamma_k S_k F_k(x_k) \tag{5}$$

и

$$x_{k+1} = (1-\gamma_k)S_k x_k + \gamma_k F_k(x_k) \tag{6}$$

для $k \ge 1$, где

$$0 < \liminf_k \gamma_k \le \limsup_k \gamma_k < 1, \tag{7}$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} s_i T_i/\widetilde{s}_k, \quad s_i > 0, \quad \widetilde{s}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} s_i = \widetilde{s} < \infty, \tag{8}$$

$F_k = I - \lambda_k F$, причем $\lambda_k \in (0,1)$ и выполнены условия (L1) и (L2).

Все термины и утверждения, используемые при доказательстве полученных здесь результатов, можно найти в работах [1] и [2].

Предложение 1 ([7]). *Предположим, что отображение F является η-сильно аккретивным и γ-строго псевдосжимающим, $\eta + \gamma > 1$, а отображение T является непрерывным и псевдосжимающим на E; здесь E — вещественное рефлексивное строго выпуклое банахово пространство с равномерно дифференцируемой по Гато нормой. Любому $t \in (0,1)$ поставим в соответствие произвольно выбранное число $\mu_t \in (0,1)$ и построим последовательность $\{z_t\}$ по правилу*

$$z_t = t(I - \mu_t F)z_t + (1-t)Tz_t. \tag{$*$}$$

Тогда при $t \to 0$ последовательность $\{z_t\}$ сильно сходится к точке p^*, т. е. к решению задачи (1)–(2) с множеством $C = \mathrm{Fix}(T)$, которое по предположению непусто.

Предложение 2 ([7]). *Пусть для E, F и T выполнены условия предложения 1. Предположим, что существует ограниченная последовательность $\{x_k\} \subset E$ такая, что $\lim_{k\to\infty} \|x_k - Tx_k\| = 0$, и существует точка $p^* = \lim_{t\to 0} z_t$, где последовательность $\{z_t\}$ построена по формуле $(*)$. Тогда*

$$\limsup_{k\to\infty} \langle F(p^*), j(p^* - x_k)\rangle \le 0. \tag{9}$$

Лемма 1 ([7]). *Пусть E — вещественное гладкое банахово пространство, отображение $F : E \to E$ является η-сильно аккретивным и γ-строго псевдосжимающим, $\eta + \gamma > 1$. Тогда для любого $\lambda \in (0, 1)$ оператор $I - \lambda F$ является сжимающим с константой $1 - \lambda\tau$, где $\tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma}$.*

Лемма 2 ([8]). *Пусть $\{a_k\}$ — последовательность неотрицательных вещественных чисел, удовлетворяющая условию $a_{k+1} \le (1 - b_k)a_k + b_k c_k$, где $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$ — последовательности вещественных чисел, для которых*

(i) $b_k \in [0, 1]$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$;

(ii) $\limsup\limits_{k\to\infty} c_k \le 0$.

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Лемма 3 ([9]). *Пусть $\{x_k\}$ и $\{z_k\}$ — ограниченные последовательности в банаховом пространстве E такие, что $x_{k+1} = (1 - \gamma_k)x_k + \gamma_k z_k$ для $k \ge 1$, где последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (7). Предположим, что*

$$\limsup_{k\to\infty} \big(\|z_{k+1} - z_k\| - \|x_{k+1} - x_k\|\big) \le 0.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - z_k\| = 0$.

2. Основные результаты

Теорема 2. *Предположим, что отображение F является η-сильно аккретивным и γ-строго псевдосжимающим, причем $\eta + \gamma > 1$. Пусть $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ — бесконечное семейство нерастягивающих отображений пространства E, которое представляет собой вещественное рефлексивное строго выпуклое банахово пространство с равномерно дифференцируемой по Гато нормой, и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \ne \emptyset$. Будем считать, что $\lambda_k \in (0, 1)$, γ_k и s_i удовлетворяют условиям* (L1)—(L2), (7) *и* (8) *соответственно. Тогда при $k \to \infty$ последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, построенная по формуле* (5)*, сильно сходится к точке p^*, т. е. к решению задачи* (1)—(2).

Доказательство. Очевидно, из (8) вытекает, что S_k — нерастягивающее отображение на E и $S_k p = p$ для всех точек $p \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Fix}(T_i)$ при любом $k \ge 1$. Тогда, учитывая лемму 1, из (5) и (8) получаем оценку

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - p\| &= \|(1-\gamma_k)x_k + \gamma_k S_k F_k(x_k) - p\| \le \\
&\le (1-\gamma_k)\|x_k - p\| + \gamma_k \|S_k F_k(x_k) - S_k p\| \le \\
&\le (1-\gamma_k)\|x_k - p\| + \gamma_k \|F_k(x_k) - p\| \le \\
&\le (1-\gamma_k)\|x_k - p\| + \gamma_k[(1-\lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \lambda_k\|F(p)\|] = \\
&= (1-\gamma_k\lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \gamma_k\lambda_k\tau\frac{\|F(p)\|}{\tau} \le \\
&\le \max\{\|x_1 - p\|, \|F(p)\|/\tau\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена, а значит, ограничены и последовательности $\{F(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{S_k F_{k+1} x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{F_k(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Поэтому последовательность $\{F_{k+1}(x_k) - p\}_{k=1}^{\infty}$ также ограничена некоторой положительной константой M_1.

Положим $z_k = S_kF_k(x_k)$. Из (5) и (8) получаем

$$x_{k+1} = (1-\gamma_k)x_k + \gamma_k z_k,$$

и

$$\|S_{k+1}F_{k+1}(x_k) - S_kF_{k+1}(x_k)\| = \left\| \frac{1}{\widetilde{s}_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} s_iT_i(F_{k+1}(x_k)) - \frac{1}{\widetilde{s}_k} \sum_{i=1}^{k} s_iT_i(F_{k+1}(x_k)) \right\| =$$

$$= \left(\frac{1}{\widetilde{s}_k} - \frac{1}{\widetilde{s}_{k+1}}\right) \left\| \sum_{i=1}^{k} s_iT_i(F_{k+1}(x_k)) \right\| + \frac{1}{\widetilde{s}_{k+1}} \|s_{k+1}T_{k+1}(F_{k+1}(x_k))\| \leq$$

$$\leq \frac{s_{k+1}}{\widetilde{s}_{k+1}} (M_1 + \|T_{k+1}(F_{k+1}(x_k)) - T_{k+1}p\| + \|p\|) \leq \frac{s_{k+1}}{\widetilde{s}_{k+1}} (2M_1 + \|p\|).$$

Тогда

$$\|z_{k+1} - z_k\| = \|S_{k+1}F_{k+1}(x_{k+1}) - S_kF_k(x_k)\| \leq$$

$$\leq \|S_{k+1}F_{k+1}(x_{k+1}) - S_{k+1}F_{k+1}(x_k)\| + \|S_{k+1}F_{k+1}(x_k) - S_kF_{k+1}(x_k)\| +$$

$$+ \|S_kF_{k+1}(x_k) - S_kF_k(x_k)\| \leq \|F_{k+1}(x_{k+1}) - F_{k+1}(x_k)\| + \frac{s_{k+1}}{\widetilde{s}_{k+1}} (2M_1 + \|p\|) +$$

$$+ \|F_{k+1}(x_k) - F_k(x_k)\| \leq \|x_{k+1} - x_k\| + 2\lambda_{k+1}M_1 + \frac{s_{k+1}}{s_1}(2M_1 + \|p\|) + |\lambda_{k+1} - \lambda_k| M_1.$$

Учитывая условие (L1) и сходимость $s_{k+1} \to 0$ при $k \to \infty$, делаем вывод, что

$$\limsup_{k\to\infty} \big(\|z_{k+1} - z_k\| - \|x_{k+1} - x_k\|\big) \leq 0.$$

Согласно лемме 3 получаем

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - z_k\| = 0. \tag{10}$$

С другой стороны, поскольку $\|z_k - S_kx_k\| = \|S_kF_k(x_k) - S_kx_k\| \leq \|F_k(x_k) - x_k\| \leq \lambda_k M_1$ и $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, получаем $\|z_k - S_kx_k\| \to 0$, откуда с учетом (10) вытекает

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - S_kx_k\| = 0. \tag{11}$$

Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - Sx_k\| = 0, \quad \text{причем} \quad S = \frac{1}{\widetilde{s}} \sum_{i=1}^{\infty} s_iT_i. \tag{12}$$

Действительно, для любого $x \in D$, где D — ограниченное подмножество в E, оценим величину

$$\|S_kx - Sx\| = \left\| \frac{1}{\widetilde{s}_k} \sum_{i=1}^{k} s_iT_ix - \frac{1}{\widetilde{s}} \sum_{i=1}^{\infty} s_iT_ix \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{\widetilde{s}_k} \sum_{i=1}^{k} s_iT_ix - \frac{1}{\widetilde{s}} \sum_{i=1}^{k} s_iT_ix \right\| + \left\| \frac{1}{\widetilde{s}} \sum_{i=k+1}^{\infty} s_iT_ix \right\| \leq$$

$$\leq \frac{(\widetilde{s} - \widetilde{s}_k)}{\widetilde{s}_k\widetilde{s}} \sum_{i=1}^{k} s_i\|T_ix\| + \frac{1}{\widetilde{s}} \sum_{i=k+1}^{\infty} s_i\|T_ix\| \leq \frac{M(\widetilde{s} - \widetilde{s}_k)}{\widetilde{s}} + \frac{M}{\widetilde{s}} \sum_{i=k+1}^{\infty} s_i = 2\frac{M}{\widetilde{s}} \sum_{i=k+1}^{\infty} s_i,$$

где $M := \|x\| + 2\|p\| \geq \|T_i x - T_i p\| + \|p\| \geq \|T_i x\|$, точка $p \in \mathcal{F}$, i — произвольное число, $i \geq 1$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in D} \|S_k x - Sx\| = 0$$

для любого ограниченного подмножества D в пространстве E. Полагая $D = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, получаем, что при $k \to \infty$ имеет место сходимость $\|S_k x_k - Sx_k\| \to 0$. С учетом (11) отсюда вытекает первое равенство в (12). Далее, поскольку отображение S нерастягивающее, оно является непрерывным и псевдосжимающим на E. Из предложений 1 и 2, где T заменено на S, вытекает неравенство (9). Оценим теперь величину $\|x_{k+1} - p^*\|^2$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - p^*\|^2 &\leq (1-\gamma_k)\|x_k - p^*\|^2 + \gamma_k\|S_k F_k(x_k) - p^*\|^2 = \\
&= (1-\gamma_k)\|x_k - p^*\|^2 + \gamma_k\|S_k F_k(x_k) - S_k p^*\|^2 \leq \\
&\leq (1-\gamma_k)\|x_k - p^*\|^2 + \gamma_k\|F_k(x_k) - p^*\|^2 = \\
&= (1-\gamma_k)\|x_k - p^*\|^2 + \gamma_k\|F_k(x_k) - F_k(p^*) - \lambda_k F(p^*)\|^2 \leq \\
&\leq (1-\gamma_k)\|x_k - p^*\|^2 + \gamma_k[(1-\lambda_k\tau)\|x_k - p^*\|^2 - \\
&- 2\lambda_k\langle F(p^*), j(x_k - p^* - \lambda_k F(x_k))\rangle] = \\
&= (1-\gamma_k\lambda_k\tau)\|x_k - p^*\|^2 + 2\gamma_k\lambda_k[\langle F(p^*), j(p^* - x_k)\rangle + \\
&+ \langle F(p^*), j(p^* - x_k + \lambda_k F(x_k)) - j(p^* - x_k)\rangle] \leq \\
&\leq (1-\gamma_k\lambda_k\tau)\|x_k - p^*\|^2 + \gamma_k\lambda_k\tau 2[\langle F(p^*), j(p^* - x_k)\rangle + \\
&+ \langle F(p^*), j(p^* - x_k + \lambda_k F(x_k)) - j(p^* - x_k)\rangle]/\tau \leq \\
&\leq (1-b_k)\|x_k - p^*\|^2 + b_k c_k,
\end{aligned}$$

где

$$b_k = \gamma_k\lambda_k\tau, \quad c_k = 2[\langle F(p^*), j(p^* - x_k)\rangle + \langle F(p^*), j(p^* - x_k + \lambda_k F(x_k)) - j(p^* - x_k)\rangle]/\tau. \tag{13}$$

Поскольку $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$, имеем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$. Тогда из леммы 2, неравенства (9) и в силу слабо звездной непрерывности j вытекает $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - p^*\|^2 = 0$. □

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, построенная по формуле (6), сильно сходится к тому же элементу p^*.*

Доказательство. Для неподвижной точки $p \in \cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$ по лемме 1 имеем

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - p\| &= \|\gamma_k(I - \lambda_k F)x_k + (1-\gamma_k)S_k x_k - p\| \leq \\
&\leq \gamma_k\|(I - \lambda_k F)x_k - p\| + (1-\lambda_k)\|S_k x_k - S_k p\| \leq \\
&\leq \gamma_k[(1-\lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \lambda_k\|F(p)\|] + (1-\lambda_k)\|x_k - p\| = \\
&= (1-\gamma_k\lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \gamma_k\lambda_k\tau\frac{\|F(p)\|}{\tau} \leq \\
&\leq \max\{\|x_1 - p\|, \|F(p)\|/\tau\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена, так же как и последовательности $\{F(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{S_k x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{F_k(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_k - p\}_{k=1}^{\infty}$. Можно считать, что они ограничены положительной константой M_2.

Положим $z_k = S_k x_k - \gamma_k\lambda_k F(x_k)/(1-\gamma_k)$. Тогда, учитывая (6) и (7), можем записать

$$x_{k+1} = \gamma_k x_k + (1-\gamma_k)z_k,$$

причем

$$\begin{aligned}\|z_{k+1}-z_k\| &\le \|S_{k+1}x_{k+1}-S_kx_k\| + \|\gamma_k\lambda_kF(x_k)/(1-\gamma_k)-\\ &- \gamma_{k+1}\lambda_{k+1}F(x_{k+1})/(1-\gamma_{k+1})\| \le\\ &\le \|S_{k+1}x_{k+1}-S_{k+1}x_k\| + \|S_{k+1}x_k - S_kx_k\|+\\ &+ \|\gamma_k\lambda_kF(x_k)/(1-\gamma_k) - \gamma_{k+1}\lambda_{k+1}F(x_{k+1})/(1-\gamma_{k+1})\| \le\\ &\le \|x_{k+1}-x_k\| + \frac{2s_{k+1}}{\widetilde{s}_{k+1}}(M_2+\|p\|) + (\lambda_k+\lambda_{k+1})\beta M_2/(1-\beta) \le\\ &\le \|x_{k+1}-x_k\| + \frac{2s_{k+1}}{s_1}(M_2+\|p\|) + (\lambda_k+\lambda_{k+1})\beta M_2/(1-\beta),\end{aligned}$$

где β — некоторая фиксированная положительная константа такая, что $\gamma_k \le \beta < 1$. Отсюда, учитывая условие (L1) и сходимость $s_{k+1} \to 0$ при $k \to \infty$, получаем

$$\limsup_{k\to\infty}\big(\|z_{k+1}-z_k\| - \|x_{k+1}-x_k\|\big) \le 0.$$

Согласно лемме 3 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - z_k\| = 0$. С другой стороны, поскольку $\|z_k - S_kx_k\| = \|\gamma_k\lambda_kF(x_k)/(1-\gamma_k)\| \le \lambda_k\beta M_2/(1-\beta)$ и $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, имеет место сходимость $\|z_k - S_kx_k\| \to 0$. Далее, аналогично доказательству теоремы 2 получаем $\|x_k - Sx_k\| \to 0$ при $k \to \infty$ и выполнено неравенство (9).

Оценим теперь величину $\|x_{k+1}-p^*\|^2$. Как и при доказательстве теоремы 2, имеем

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}-p^*\|^2 &\le (1-\gamma_k)\|S_kx_k - p^*\|^2 + \gamma_k\|F_k(x_k)-p^*\|^2 \le\\ &\le (1-\gamma_k)\|x_k-p^*\|^2 + \gamma_k\|F_k(x_k) - F_k(p^*) - \lambda_kF(p^*)\|^2 \le (1-b_k)\|x_k-p^*\|^2 + b_kc_k,\end{aligned}$$

где b_k и c_k определены в (13). Таким образом, из леммы 2 и неравенства (9) вытекает $\lim_{k\to\infty}\|x_k - p^*\|^2 = 0$. □

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

[1] Buong Ng., Phuong Ng.Th.H. *Regularization methods for a class of variational inequalities in Banach spaces*, Comput. Math. and Math. Physics **52** (11), 1487–1496 (2012).

[2] Buong Ng., Phuong Ng.Th.H. *Strong convergence to solution for a class of variational inequalities in Banach spaces by implicit iteration methods*, J. Optim. Theory Appl. **159**, 399–411 (2013).

[3] Buong Ng., Duong L.Th. *An explicit iterative algorithm for a class of variational inequalities in Hilbert spaces*, J. Optim. Theory Appl. **151** (5), 513–524 (2011).

[4] Takahashi W. *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications*, Ann. Univ. Maria Curie-Sklodowska Sect. A **51**, 277–292 (1997).

[5] Yao Y., Noor M.A., Liou Y.C. *A new hybrid iterative algorithm for variational inequalities*, Appl. Math. Comput. **216**, 822–829 (2010).

[6] Wang Sh. *Convergence and weaker control conditions for hybrid iterative algorithms*, Fixed Point Theory and Appl., doi: 10.1186/1687-1812-2011-3 (2011).

[7] Ceng L.C., Ansari Q.H., Yao J.Ch. *Mann-type steepest-descent and modified hybrid steepest descent methods for variational inequalities in Banach spaces*, Num. Funct. Anal. Optim. **29** (9–10), 987–1033 (2008).

[8] Xu H.K. *An iterative approach to quadratic optimization*, J. Optim. Theory Appl. **116**, 659–678 (2003).

[9] Suzuki T. *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**, 99–106 (2007).

Нгуен Быонг

Институт информационных технологий,
Вьетнамская академия наук и технологий,
Хоанг Куок Вьет., 18, Ханой, Вьетнам,

`e-mail:` nbuong@ioit.ac.vn

Нгуен Тхи Хонг Фыонг

Институт информационных технологий,
Вьетнамская академия наук и технологий,
Хоанг Куок Вьет., 18, Ханой, Вьетнам,

`e-mail:` phuong.nthi3@gmail.com

Нгуен Тхай Ту Тхиеу

Национальный университет г. Тай-Нгуен,
Научный колледж г. Тай-Нгуен,
Тай-Нгуен, Вьетнам,

`e-mail:` thuthuy220369@gmail.com

Nguyen Buong, Nguyen Thi Hong Phuong, and Nguyen Thi Thu Thuy

Explicit iteration methods for a class of variational inequalities in Banach spaces

Abstract. In this paper, in order to solve a variational inequality problem over the set of common fixed points of an infinite family of nonexpansive mappings on real reflexive and strictly convex Banach spaces with a uniformly Gâteaux differentiable norm, we introduce two new explicit iteration methods.

Keywords: nonexpansive mapping, fixed point, variational inequality.

Nguyen Buong

Academy of Science and Technology of Vietnam,
Instutute of Informational Technologies,
18 Hoahg Quok Viet., Hanoi, Vietnam,

`e-mail:` nbuong@ioit.ac.vn

Nguyen Thi Hong Phuong

Academy of Science and Technology of Vietnam,
Instutute of Informational Technologies,
18 Hoahg Quok Viet., Hanoi, Vietnam,

`e-mail:` phuong.nthi3@gmail.com

Nguyen Thi Thu Thuy

Thaiguen College, Thaiguen University, Vietnam,

`e-mail:` thuthuy220369@gmail.com