ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 10 (473)

УДК 517.958

В.С. КЛИМОВ

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе устанавливаются варианты второй теоремы Боголюбова для квазилинейных параболических уравнений. Используются идеи метода усреднения[1], [2] и теория операторов монотонного типа [3]–[6].

1. Ниже $\|x;X\|$ — норма элемента x в B-пространстве X, X^* — сопряженное к X пространство, (x,x^*) — значение функционала $x^*\in X^*$ на элементе $x\in X$, $\sigma(X,X^*)$ и $\sigma(X^*,X)$ — слабые топологии на X и X^*, порождаемые формой $(\cdot,\cdot)$; $\theta_X(M_1,M_2)$ — уклонение множества $M_1\subset X$ от множества $M_2\subset X$ в метрике X : $\theta_X(M_1,M_2)=\sup\limits_{x_1\in M_1}\inf\limits_{x_2\in M_2}\|x_1-x_2;X\|$; $L^p(Q,X)$ $(1\le p\le\infty)$ — пространство измеримых по Лебегу–Бохнеру на множестве $Q\subset\mathbb{R}^k$ функций со значениями в B-пространстве X, норма в $L^p(Q,X)$ определяется стандартным образом ([3], с. 154); как обычно, совпадающие почти всюду (п. в.) относительно k-мерной лебеговой меры mes_k функции отождествляются; $C(T,X)$ — пространство непрерывных на отрезке $T=[0,\omega]$ $(0<\omega<\infty)$ функций со значениями в X; $C_w(T,X)$ — пространство слабо-непрерывных на T функций со значениями в X, определяющая топологию в $C_w(T,X)$ система полунорм $\|\cdot\|_l$ задается равенством

$$\|y\|_l=\max\{|l(y(t))|,\ t\in T\},\quad l\in X^*;$$

$X_1\times X_2$ – прямое произведение B-пространств X_1, X_2; если X_1, X_2 вложены в локально выпуклое пространство X_0, то с X_1, X_2 связаны B-пространства X_1+X_2 и $X_1\cap X_2$ ([3], с. 22-24). Все банаховы пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $x\cdot y=x_1y_1+\dots+x_ny_n$ — скалярное произведение векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ из $\mathbb{R}^n$.

Пусть заданы рефлексивное сепарабельное B-пространство V с нормой $\|\cdot\|$ и гильбертово пространство H с нормой $|\cdot|$, V непрерывно и плотно вложено в H. Пространство H отождествляется с сопряженным ему H^*, а $H^*=H$ — с некоторым подпространством сопряженного к V пространства V^*. Число (v,v^*) означает и скалярное произведение элементов v^* и v из H, и значение функционала v^* из V^* на элементе $v\in V$.

Числу p из промежутка $[2,\infty)$, отрезку $T=[0,\omega]$ и паре V, H сопоставим банаховы пространства $Y_1=L^p(T,V)$, $Y_2=L^\infty(T,H)$, $Z_1=L^q(T,V^*)$ $(q=p/(p-1))$, $Z_2=L^1(T,H)$, $Y=Y_1\cap Y_2$, $Z=Z_1+Z_2$. Пространство Y (Y_1) можно идентифицировать с сопряженным к пространству Z (Z_1) посредством билинейной формы $\langle y,z\rangle=\int\limits_T(y(t),z(t))dt$. Стандартным образом определяются слабые топологии $\sigma(Y,Z)$, $\sigma(Z,Y)$ на пространствах Y, Z соответственно. Множество $M\subset L^1(T,H)$ назовем равномерно суммируемым, если $\int\limits_e|z(t)|dt\le\psi(\mathrm{mes}_1 e)$ для всяких z из M и измеримых множеств $e\subset T$ (здесь $\mathrm{mes}_1 e$ — лебегова мера множества e), $\psi(t)\to0$ при $t\to0$. Множество $K\subset Z$ будем называть σ-ограниченным, если найдутся такие множества $K_1\subset Z_1$, $K_2\subset Z_2$, что $K\subset K_1+K_2$, K_1 ограничено в Z_1, K_2 равномерно суммируемо. Достаточное условие σ-ограниченности множества $K\subset Z$ — ограниченность K в пространстве $Z_1+L^r(T,H)$ при некотором $r>1$.

Положим $W = \{y \mid y \in Y,\ y' \in Z\}$. Равенство $y' + z = 0$ означает, что $\langle y, \varphi' v\rangle = \langle \varphi v, z\rangle$ при любых φ из $C_0^\infty(T)$ и v из V. Класс W вложен в $C(T, H)$ ([3], с. 177; [7]); это позволяет ввести понятие значения функции y из W в каждой точке отрезка T. Через W_0 обозначается часть W, состоящая из функций, удовлетворяющих условию периодичности $y(0) = y(\omega)$.

Следуя [7], обозначим через $\alpha_1(Y, Z)$ совокупность операторов $A : Y \times [0,1] \to Z$, удовлетворяющих условиям:

1) для каждого ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset Y$ множество $A(\mathfrak{M} \times [0,1]) = \{z \mid z = A(y,\lambda),\ y \in \mathfrak{M},\ \lambda \in [0,1]\}$ σ-ограничено в пространстве Z;

2) для произвольных последовательностей $y_i \in W_0$, $\lambda_i \in [0,1]$, обладающих свойствами

$$\begin{gathered} y_i \to y \ \text{ в } \ \sigma(Y,Z), \quad y_i \to y \ \text{ в } \ C_w(T,X), \quad \lambda_i \to \lambda \ \text{ в } \ \mathbb{R}, \\ z_i = A(y_i,\lambda_i) \to z \ \text{ в } \ \sigma(Y,Z), \quad \varlimsup_{i\to\infty} \langle y_i, z_i\rangle \le \langle y, z\rangle, \end{gathered} \tag{1}$$

имеет место равенство $z = A(y,\lambda)$ и сходимость $y_i \to y$ в метрике Y_1.

Условия 1), 2) выражают некоторые усиления свойств ограниченности и замкнутости оператора A. Первое требование выполнено, если, например, оператор A действует и ограничен из $Y \times [0,1]$ в $Z_1 + L^r(T,H)$, $r > 1$. Более сложным для проверки оказывается требование усиленной замкнутости оператора A [7].

Наряду с $\alpha_1(Y,Z)$ далее используется класс $\alpha(Y,Z)$, состоящий из операторов $A_0 : Y \to Z$, для которых постоянное по λ отображение $A(\cdot,\lambda) \equiv A_0$, $\lambda \in [0,1]$, принадлежит классу $\alpha_1(Y,Z)$. Очевидно, если $A \in \alpha_1(Y,Z)$, то при любом λ из $[0,1]$ оператор $A(\cdot,\lambda) : Y \to Z$ принадлежит классу $\alpha(Y,Z)$. Существенную роль ниже играет класс $S(V)$, состоящий из отображений $\mathfrak{A} : V \to V^*$, удовлетворяющих условиям: 1) для каждого ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset V$ соответствующая область значений $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ есть ограниченное подмножество пространства V^*; 2) для произвольной последовательности $v_i \in V$, обладающей свойствами $v_i \to v$ в $\sigma(V,V^*)$, $v_i^* = \mathfrak{A}(v_i) \to v^*$ в $\sigma(V^*,V)$, $\varlimsup_{i\to\infty}(v_i, v_i^*) \le (v, v^*)$, имеют место равенство $v^* = \mathfrak{A}(v)$ и сходимость $v_i \to v$ в метрике V. Близкие классы отображений вводились многими авторами (напр., [3], [5]–[7] и приведенная там библиография).

Отображения класса $S(V)$ естественным образом возникают при усреднении операторов класса $\alpha(Y,Z)$ [7]. Именно, введем оператор $M_t : L^1(T,V^*) \to V^*$, полагая $M_t z = \frac{1}{\omega}\int_T z(t)dt$; сохраним обозначение M_t и за сужением этого оператора на пространство Z. Каждый элемент v из V можно рассматривать как постоянную функцию класса Y и наоборот. Это позволяет отождествить пространство V с подпространством Y, состоящим из постоянных на T функций со значениями в пространстве V. На пространстве $V \subset Y$ нормы $\|\cdot\|$, $\|\cdot;Y\|$ эквивалентны. Пусть $A_0 \in \alpha(Y,Z)$, $\mathring{A}_0 = M_t A_0$. Отображение $\mathring{A}_0$ назовем усреднением оператора A_0; из результатов [7] вытекает включение $\mathring{A}_0 \in S(V)$.

Для отображений класса $S(V)$ введем понятие степени. Пусть E — конечномерное подпространство пространства V, наделенное структурой евклидова пространства, $j_E : E \to V$ — оператор вложения E в V, $j_E^* : V^* \to E$ — сопряженный к нему оператор. Оператору $\mathfrak{A}$ класса $S(V)$ сопоставим непрерывное отображение $\mathfrak{A}_E = j_E^* \mathfrak{A} j_E : E \to E$. Если $\mathcal{G}$ — ограниченная область в пространстве V и отображение $\mathfrak{A}$ невырождено на границе $\partial\mathcal{G}$ области $\mathcal{G}$, т. е. $0 \notin \mathfrak{A}(\partial\mathcal{G})$, то существует такое конечномерное пространство E_0, что для любого конечномерного пространства $E \supset E_0$, $E \subset V$, отображение $\mathfrak{A}_E$ невырождено на $\partial(\mathcal{G}\cap E)$ и вращение $\gamma(\mathfrak{A}_E, \mathcal{G}\cap E)$ векторного поля $\mathfrak{A}_E$ на $\partial(\mathcal{G}\cap E)$ одинаково для всех таких пространств. Число $\gamma(\mathfrak{A}_E, \mathcal{G}\cap E)$ называют ([6], с. 55) степенью отображения множества $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cup \partial\mathcal{G}$ относительно точки $0 \in V^*$ и обозначают символом $\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{G})$. Множество $\mathfrak{N} \subset V$ называют особым для отображения $\mathfrak{A}$, если каждый элемент v из $\mathfrak{N}$ есть особая точка $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}(v) = 0$. Особое множество изолировано, если некоторая его окрестность не пересекается с другими особыми множествами. Степень $\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{G})$ не зависит от выбора подобной окрестности $\mathcal{G}$; ее называют индексом особого множества $\mathfrak{N}$ и обозначают символом $\operatorname{ind}(\mathfrak{N}, \mathfrak{A})$.

Понятие индекса оказывается полезным при изучении периодической краевой задачи

$$y' + \lambda A(y, \lambda) = 0, \quad y(0) = y(\omega), \tag{2}$$

где $\lambda \in [0,1]$, A — оператор класса $\alpha_1(Y, Z)$. Решением задачи (2) при $\lambda > 0$ назовем функцию y класса W_0; множество таких решений обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda$. Отображение $\mathfrak{A} = \overset{\circ}{A}(\cdot, 0)$ принадлежит классу $S(V)$, множество его особых точек обозначим символом $\mathfrak{N}_0$. Очевидно, что множества $\mathfrak{N}_\lambda$ ($\lambda \in [0,1]$) можно рассматривать как подмножества $W_0 \subset Y$; элементы v из $\mathfrak{N}_0$ суть квазистатические решения усредненного уравнения $y' + \lambda \mathfrak{A}(y) = 0$.

Предложение 1 ([7]). *Пусть $\partial \mathcal{G}$ — граница ограниченной области $\mathcal{G} \subset V$, Ω — ограниченная область в Y и $\Omega \cap V = \mathcal{G}$, $N_\lambda = \Omega \cap \mathfrak{N}_\lambda$; $\theta_Y(M_1, M_2)$ — уклонение множества $M_1 \subset Y$ от множества $M_2 \subset Y$ в метрике пространства Y. Пусть $A = \alpha_1(Y, Z)$, отображение $\mathfrak{A} = \overset{\circ}{A}(\cdot, 0)$ невырождено на $\partial \mathcal{G}$ и $\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{G}) \neq 0$. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $N_\lambda \neq \emptyset$ при $0 \leq \lambda \leq \varepsilon_0$ и $\theta_Y(N_\lambda, N_0) \to 0$ при $\lambda \to 0$.*

Согласно предложению 1, представляющему вариант второй теоремы Боголюбова ([1], с. 445), каждый признак отличия от нуля степени $\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{G})$ не только обеспечивает непустоту множества особых точек отображения $\mathfrak{A}$ в области $\mathcal{G}$, но и гарантирует существование периодических решений задачи (2) при достаточно малых $\lambda > 0$. Для его применения полезно располагать содержательными примерами операторов класса $\alpha_1(Y, Z)$ и эффективными способами проверки предположения $\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{G}) \neq 0$. Анализу возникающих здесь вопросов посвящены пп. 2, 3.

2. Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathcal{D})$, $p \geq 2$, — пространство Соболева ([4], с. 13–14) функций $v : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|v; \overset{\circ}{W}{}^1_p\| = \|\nabla v; L^p\|$; здесь и далее $\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n})$ — градиент функции v. Пространство $V = \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathcal{D})$ компактно и плотно вложено в пространство $H = L^2(\mathcal{D})$. Пара пространств V, H однозначно определяет соответствующие им пространства Y, Z, W, W_0 функций на отрезке $T = [0, \omega]$. В частности, пространство $Y = L^p(T, V) \cap L^\infty(T, H)$ можно интерпретировать как пространство функций на цилиндре $Q = \mathcal{D} \times (0, \omega)$. Пространство Y непрерывно вложено в пространство $L^{p_1}(Q)$ ([4], с. 528), где $p_1 = p(n+2)/n$. Фиксируем p_0 из $(1, p_1)$ и положим $q_0 = p_0/(p_0 - 1)$. Возьмем число $p_2 < \infty$ настолько большим, что пространство $X = L^p(T, V) \cap L^{p_2}(T, H)$ будет непрерывно вложено в пространство $L^{p_0}(Q)$. Это условие гарантирует непрерывность вложения $L^{q_0}(Q)$ в пространство $X^* = L^q(T, V^*) + L^{q_2}(T, H)$ ($q_2 = p_2/(p_2 - 1) > 1$).

Введем отображение $f : Q \times \mathbb{R}^{n+1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ и функцию $g : Q \times \mathbb{R}^{n+1} \times [0,1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

a_1) для каждого элемента (η, ξ, λ) из $\mathbb{R}^{n+1} \times [0,1]$ отображение $f(\cdot, \cdot, \eta, \xi, \lambda)$ и функция $g(\cdot, \cdot, \eta, \xi, \lambda)$ измеримы на Q относительно mes_{n+1}; для почти всех (x, t) из Q отображение $f(x, t, \cdot, \cdot, \cdot)$ и функция $g(x, t, \cdot, \cdot, \cdot)$ непрерывны на $\mathbb{R}^{n+1} \times [0,1]$;

a_2) справедливы три неравенства

$$|f(x, t, \eta, \xi, \lambda)|^q + |g(x, t, \eta, \xi, \lambda)|^{q_0} \leq k_0 |\xi|^p + k_0 |\eta|^{p_0} + \varphi_0(x, t), \tag{3}$$

$$\xi f(x, t, \eta, \xi, \lambda) \geq k_1 |\xi|^p - k_0 |\eta|^{p_0} - \varphi_1(x, t), \tag{4}$$

$$(\xi_1 - \xi_0)(f(x, t, \eta, \xi_1, \lambda) - f(x, t, \eta, \xi_0, \lambda)) > 0, \tag{5}$$

в которых $k_i \in (0, \infty)$, $\varphi_i \in L^1(Q)$, $\xi_i \in \mathbb{R}^n$, $\xi_0 \neq \xi_1$, $i = 0, 1$.

Условие a_1) совпадает с классическим условием Каратеодори. Неравенства (3), (4) представляют оценки роста отображения f и функции g; неравенство (5) означает строгую монотонность отображения $f(x, t, \eta, \cdot, \lambda) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Определим на пространстве $Y \times [0,1]$ оператор $B(y, \lambda) = g(\cdot, \cdot, y, \nabla_x y, \lambda)$. Из неравенства (3) следует, что оператор B действует из $Y \times [0,1]$ в $L^{q_0}(Q)$ и ограничен. Так как $L^{q_0}(Q)$ непрерывно вложено в пространство $X^* = L^q(T,V^*) + L^{q_2}(T,H)$, то для любого ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset Y$ соответствующее множество $B(\mathfrak{M}\times[0,1])$ ограничено в X^*, а следовательно, $B(\mathfrak{M}\times[0,1])$ есть σ-ограниченное подмножество пространства Z; в этом смысле оператор $B : Y \times [0,1] \to Z$ σ-ограничен.

Лемма 1. *Пусть последовательности y_i из W_0 и λ_i из $[0,1]$ обладают свойствами (1). Пусть $(\cdot,\cdot)$ — стандартная билинейная форма на $L^{p_0}(Q) \times L^{q_0}(Q)$, определяющая двойственность между $L^{p_0}(Q)$, $L^{q_0}(Q)$, и $B(y_i,\lambda_i) \to b$ в $\sigma(L^{q_0}, L^{p_0})$. Тогда $(y_i, B(y_i,\lambda_i)) \to (y,b)$.*

Доказательство. Сходимость $y_i \to y$ в $\sigma(Y,Z)$ и $C_w(T,H)$ в соединении с компактностью вложения $V \subset H$ влечет (напр., [2], с. 159) сходимость $y_i \to y$ в $L^p(T,H)$, в частности, $y_i \to y$ по мере mes_{n+1}. Так как последовательность y_i ограничена в $L^{p_1}(Q)$ и сходится по мере к y, то $y_i \to y$ в $L^{p_0}(Q)$. Теперь сходимость $(y_i, B(y_i,\lambda_i)) \to (y,b)$ очевидна. $\square$

Из условий a_1), a_2) вытекает, что отображение f порождает непрерывный оператор F : $L^{p_0}(Q) \times L^p(Q,\mathbb{R}^n) \times [0,1] \to L^q(Q,\mathbb{R}^n)$, сопоставляющий тройке (v,u,λ) функцию $F(v,u,\lambda) = f(\cdot,\cdot,v,u,\lambda)$.

Лемма 2. *Пусть $v_i \in L^{p_0}(Q)$, $u_i \in L^p(Q,\mathbb{R}^n)$, $\lambda_i \in [0,1]$, $c_i = F(v_i,u_i,\lambda_i)$, $i = 1,2,\dots$, $v_i \to v$ в $L^{p_0}(Q)$, $u_i \to u$ в $\sigma(L^p,L^q)$, $c_i \to c$ в $\sigma(L^q,L^p)$, $\lambda_i \to \lambda$ и*

$$\varlimsup_{i\to\infty} (u_i,c_i) \le (u,c). \tag{6}$$

Тогда $u_i \to u$ в $L^p(Q,\mathbb{R}^n)$ и $c = F(v,u,\lambda)$.

Доказательство. Положим $h_i = F(v_i,u,\lambda_i)$, $\alpha_i = (c_i - h_i)(u_i - u)$, $\beta_i = c_i(u_i - u)$, $\gamma_i = h_i(u - u_i)$, $i = 1,2,\dots$ Очевидно, $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$, $i = 1,2,\dots$ Последовательность γ_i сходится к нулю в $\sigma(L^1,L^\infty)$. Это следует из того, что последовательность h_i сходится в $L^q(Q)$, а $u_i \to u$ в $\sigma(L^p,L^q)$. Справедливы неравенства

$$\varlimsup_{i\to\infty} \int_Q \beta_i \, dx\, dt \le \varlimsup_{i\to\infty} \int_Q u_i c_i \, dx\, dt - \lim_{i\to\infty} \int_Q u c_i \, dx\, dt \le 0,$$

из которых следует

$$\lim_{i\to\infty} \int_Q (c_i - h_i)(u_i - u) dx\, dt = \lim_{i\to\infty} \int_Q \alpha_i(x,t) dx\, dt = 0.$$

В силу (5) функции α_i неотрицательны, поэтому последнее равенство влечет сходимость α_i к нулю в $L^1(Q)$. Поскольку $u_i c_i = \alpha_i - \gamma_i + u c_i$, $\gamma_i \to 0$ в $\sigma(L^1,L^\infty)$, $\alpha_i \to 0$ в $L^1(Q)$, $uc_i \to uc$ в $\sigma(L^1,L^\infty)$, то $u_i c_i \to uc$ в $\sigma(L^1,L^\infty)$. Отсюда следует равномерная суммируемость последовательности функций $u_i c_i : Q \to \mathbb{R}$, а это, в свою очередь (ввиду оценки (4) и сходимости $v_i \to v$ в $L^{p_0}(Q)$), влечет равномерную суммируемость последовательности $|u_i|^p$, $i = 1,2,\dots$

Из сходимости $\alpha_i \to 0$ в $L^1(Q)$ следует сходимость α_i к нулю по мере. Отсюда вытекает, что некоторая подпоследовательность последовательности α_i сходится к нулю п. в. Производя перенумерацию, можно указать такое множество $Q' \subset Q$, что $\mathrm{mes}_{n+1} Q' = \mathrm{mes}_{n+1} Q$ и при $(x,t) \in Q'$ выполняются условия $\alpha_i(x,t) \to 0$, $v_i(x,t) \to v(x,t)$, последовательность $u_i(x,t)$ ограничена, $|u(x,t)| < \infty$, отображение $f(x,t,\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ непрерывно. Из перечисленных предположений и неравенства (5) стандартным образом (напр., [6], с. 13–19) выводится сходимость $u_i(x,t)$ к $u(x,t)$ на Q'.

Проведенные рассуждения показывают, что для любого бесконечного множества I натуральных чисел существует такая возрастающая последовательность $i_m \in I$, для которой $u_{i_m}(x,t)$ п. в. на Q сходится к $u(x,t)$. Это возможно лишь в случае, когда $u_i \to u$ по мере mes_{n+1}. Последовательность $|u_i - u|^p$ сходится к нулю в $L^1(Q)$, поскольку она сходится к нулю по мере и в силу оценки $|u_i - u|^p \le 2^{p-1}(|u_i|^p + |u|^p)$ равномерно суммируема. Отсюда следуют сходимость $u_i \to u$ в $L^p(Q)$ и равенство $c = F(v,u,\lambda)$. $\square$

Введем оператор $C : Y \times [0,1] \to Z$, полагая $C(y,\lambda) = -\operatorname{div} F(y, \nabla_x y, \lambda)$. Более точно, $z = C(y,\lambda)$, если вектор-функция $c = F(y, \nabla_x y, \lambda)$ удовлетворяет равенству

$$\langle w, z\rangle = \int_Q \nabla_x w(x,t) c(x,t) dx\, dt, \quad w \in Y.$$

Данное равенство можно интерпретировать как соотношение $z(\cdot,t) = -\operatorname{div} c(\cdot,t)$, понимаемое в смысле теории распределений. Оператор C действует и ограничен из $Y \times [0,1]$ в Z_1, поэтому C есть σ-ограниченный оператор.

Обозначим через A сумму введенных выше операторов B, C. Очевидно, $A = B + C$ есть σ-ограниченный оператор.

Теорема 1. *Пусть отображение f и функция g удовлетворяют условиям* a$_1$), a$_2$). *Тогда оператор $A : Y \times [0,1] \to Z$ принадлежит классу $\alpha_1(Y,Z)$.*

Доказательство. Достаточно проверить усиленную замкнутость оператора A. Пусть $y_i \in W_0$, $\lambda_i \in [0,1]$, $z_i = A(y_i, \lambda_i)$ и имеют место соотношения (1). Отсюда по аналогии с доказательством леммы 1 следует сходимость $y_i \to y$ в $L^{p_0}(Q)$. Так как $z_i = B(y_i,\lambda_i) + C(y_i,\lambda_i)$, то

$$\langle w, z_i\rangle = \int_Q (wB(y_i,\lambda_i) + \nabla_x W c_i) dx\, dt, \tag{7}$$

где $w \in Y$, $c_i = F(y_i, \nabla_x y_i, \lambda_i)$. Последовательности c_i, $B(y_i,\lambda_i)$, $u_i = \nabla_x y_i$ компактны в топологиях $\sigma(L^q, L^p)$, $\sigma(L^{q_0}, L^{p_0})$ и $\sigma(L^p, L^q)$ соответственно. Не уменьшая общности, можно считать, что $c_i \to c$, $B(y_i,\lambda_i) \to b$, $u_i \to u$ в соответствующих топологиях. Полагая в (7) $w = y_i$, приходим в силу леммы 1 к неравенству (6). Согласно лемме 2 отсюда вытекают сходимость $u_i = \nabla_x y_i$ в метрике $L^p(Q)$ к $u = \nabla_x y$ и равенство $c = F(y, \nabla_x y, \lambda)$. Последовательность $B(y_i,\lambda_i)$ сходится к $B(y,\lambda)$ в метрике $L^{q_0}(Q)$. Соотношение (7) влечет равенство $z = A(y,\lambda)$. Итак, $y_i \to y$ в метрике Y_1 и $z = A(y,\lambda)$. $\square$

3. Применим предшествующие результаты к периодической краевой задаче

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \lambda \operatorname{div} f(x,t,y,\nabla_x y,\lambda) + \lambda g(x,t,y,\nabla_x y,\lambda) = 0, \tag{8}$$

$$y(x,t) = 0, \quad x \in \partial\mathcal{D}, \ \ t \in T, \tag{9}$$

$$y(x,0) = y(x,\omega), \quad x \in \mathcal{D}. \tag{10}$$

Как и в п. 2, $\mathcal{D}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0,1]$, $Q = \mathcal{D} \times (0,\omega)$, отображение $f : Q \times \mathbb{R}^{n+1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ и функция $g : Q \times \mathbb{R}^{n+1} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям a$_1$), a$_2$); $V = \mathring{W}^1_p(\mathcal{D})$, $H = L^2(\mathcal{D})$, $Y = L^p(T,V) \cap L^\infty(T,H)$, $p \geq 2$; оператор A определен на $Y \times [0,1]$ равенством

$$A(y,\lambda) = -\operatorname{div} f(\cdot,\cdot,y,\nabla_x y,\lambda) + g(\cdot,\cdot,y,\nabla_x y,\lambda).$$

Под решением задачи (8)–(10) далее понимается решение y задачи (2), интерпретируемое как функция на цилиндре Q. Данное определение согласуется с принятым в теории квазилинейных параболических уравнений понятием обобщенного решения уравнения (8) (напр., [3], с. 179–187; [4], с. 528–529; [8]).

Положим

$$\mathring{f}(x,\eta,\xi) = \frac{1}{\omega}\int_T f(x,t,\eta,\xi,0)dt, \quad \mathring{g}(x,\eta,\xi) = \frac{1}{\omega}\int_T g(x,t,\eta,\xi,0)dt.$$

Как нетрудно видеть, отображение $\mathring{f} : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ и функция $\mathring{g} : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условию Каратеодори; справедливы естественные аналоги неравенств (3)–(5). Усреднение $\mathfrak{A} = \mathring{A}(\cdot,0)$ оператора $A(\cdot,0)$ может быть определено равенством

$$\mathfrak{A}(v) = -\operatorname{div} \mathring{f}(\cdot,v,\nabla v) + \mathring{g}(\cdot,v,\nabla v), \quad v \in V. \tag{11}$$

Иначе говоря, $v^* = \mathfrak{A}(v)$ — функционал на пространстве $V = \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathcal{D})$, определяемый соотношением

$$(w, v^*) = \int_{\mathcal{D}} (\overset{\circ}{g}(\cdot, v, \nabla v)w + \overset{\circ}{f}(\cdot, v, \nabla v)\nabla w)dx, \quad w \in V.$$

Особые точки оператора $\mathfrak{A}$ совпадают с обобщенными решениями краевой задачи

$$-\operatorname{div} \overset{\circ}{f}(\cdot, v, \nabla v) + g(\cdot, v, \nabla v) = 0, \quad v\big|_{\partial\mathcal{D}} = 0; \tag{12}$$

их можно рассматривать как квазистатические решения параболического уравнения $y' + \lambda\mathfrak{A}(y) = 0$. Под индексом изолированного решения v_0 задачи (12) ниже понимается индекс $\operatorname{ind}(v_0, \mathfrak{A})$ особой точки v_0 отображения $\mathfrak{A}$; аналогичным образом определяется индекс $\operatorname{ind}(\mathfrak{N}, \mathfrak{A})$ изолированного ограниченного множества $\mathfrak{N}$ решений задачи (12).

Теорема 2. *Пусть v_0 — изолированное решение краевой задачи* (12) *и* $\operatorname{ind}(v_0, \mathfrak{A}) \neq 0$. *Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \lambda \leq \varepsilon_0$ задача* (8)–(10) *имеет решение y_λ, для которого*

$$\lim_{\lambda\to 0} \|y_\lambda - v_0; Y\| = 0.$$

Доказательство. В некоторой окрестности $\mathcal{G} = \{y \mid y \in V,\ \|y - v_0; Y\| < \delta\}$ точки v_0 нет отличных от v_0 особых точек поля $\mathfrak{A}$, следовательно, $\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{G}) = \operatorname{ind}(v_0, \mathfrak{A}) \neq 0$. Условия предложения 1 выполнены с $\Omega = \{y \mid y \in Y,\ \|y - v_0; Y\| < \delta\}$. Согласно этому предложению множество N_λ принадлежащих Ω решений задачи (8)–(10) непусто при $0 < \lambda \leq \varepsilon_0$ и $\theta_Y(N_\lambda, v_0) \to 0$ при $\lambda \to 0$. В качестве y_λ можно брать любой элемент из N_λ. $\square$

Предположение $\operatorname{ind}(v_0, \mathfrak{A}) \neq 0$ допускает эффективную проверку ([6], с. 66–74). Наиболее простым представляется невырожденный случай, когда отображение $\mathfrak{A} : V \to V^*$ дифференцируемо по Фреше в точке v_0 и уравнение $\mathfrak{A}'(v_0)v = 0$ имеет только нулевое решение; в этом случае (при некоторых дополнительных ограничениях) $|\operatorname{ind}(v_0, \mathfrak{A})| = 1$ ([6], с. 68), что и обеспечивает возможность применения теоремы 2. Если $v_1, \ldots, v_m$ — изолированные решения задачи (12) и $\operatorname{ind}(v_i, \mathfrak{A}) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, то для каждого из решений v_i существует сходящаяся к нему ветвь решений y^i_λ задачи (8)–(10). Таким образом, можно установить существование многих решений задачи (8)–(10) при достаточно малых $\lambda > 0$.

В теореме 2 решение v_0 задачи (12) предполагается известным. Приведем теперь утверждение, в котором отсутствуют априорные предположения о множестве решений задачи (12). Пусть $0 < R < \infty$, $\Omega = \{y \mid y \in Y,\ \|y; Y\| < R\}$, $\mathcal{G} = \Omega \cap V$; $\mathfrak{N}_\lambda$, $0 < \lambda \leq 1$, — множество решений задачи (8)–(10), $\mathfrak{N}_0$ — множество решений задачи (12), $N_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda \cap \Omega$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Теорема 3. *Пусть отображение $\mathfrak{A}$ невырождено на $\partial\mathcal{G}$ и для v из $\partial\mathcal{G}$ выполнено хотя бы одно из условий*

$$1)\quad (v, \mathfrak{A}(v)) \geq 0, \tag{13}$$

$$2)\quad \frac{\mathfrak{A}(v)}{\|\mathfrak{A}(v)\|_*} \neq \frac{\mathfrak{A}(-v)}{\|\mathfrak{A}(-v)\|_*}, \tag{14}$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма в пространстве V^*. Тогда справедливо заключение предложения 1.

Доказательство. Если выполнено (13), то $\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{G}) = 1$ ([6], с. 65). Теперь доказываемый результат вытекает из предложения 1 и теоремы 1. Если выполнено (14), то $\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{G})$ есть нечетное число ([6], с. 65), что и влечет требуемое утверждение. $\square$

Хорошо известны предположения алгебраического характера относительно коэффициентов оператора $\mathfrak{A}$, обеспечивающие выполнение (13) (напр., [8]). Неравенство (14) естественно для отображений с нечетной главной частью; операторы подобного типа выделены в [5]. Неравенства (13), (14) характеризуют разные классы отображений.

Остановимся на варианте теорем 2, 3 для потенциальных операторов. Напомним, что отображение $\mathfrak{A} : V \to V^*$ называют потенциальным, если существует дифференцируемый по Гато функционал $\Phi : V \to \mathbb{R}$, для которого $\mathfrak{A}(v) = \Phi'(v)$ $(v \in V)$; в этом случае Φ — потенциал отображения $\mathfrak{A}$.

Предложение 2 ([9]). *Пусть ограниченное изолированное особое множество $\mathfrak{N}$ потенциального отображения $\mathfrak{A} = \Phi'$ класса $S(V)$ реализует абсолютный минимум функционала Φ. Тогда* 1) *имеет смысл и конечна эйлерова характеристика $\mathcal{X}(\mathfrak{N})$ множества $\mathfrak{N}$;* 2) *справедливо равенство* $\mathrm{ind}(\mathfrak{N}, \mathfrak{A}) = \mathcal{X}(\mathfrak{N})$.

Из предложений 1, 2 и теоремы 1 вытекает

Теорема 4. *Пусть определяемое равенством* (11) *отображение $\mathfrak{A}$ потенциально и функционал Φ – его потенциал. Пусть $\mathfrak{N}$ — ограниченное изолированное множество решений задачи* (12), *реализующее абсолютный минимум Φ, причем $\mathcal{X}(\mathfrak{N}) \neq 0$. Тогда найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при любом λ из $(0, \varepsilon_0]$ задача* (8)–(10) *имеет решение y_λ, для которого $\theta_Y(y_\lambda, \mathfrak{N}) \to 0$ при $\lambda \to 0$.*

Отметим некоторые обобщения и модификации изложенных выше результатов. Доказанные в [7] утверждения охватывают случай, когда A — многозначный оператор нелокального характера. Это дает принципиальную возможность установить варианты предшествующих теорем для параболических включений с отклоняющимся аргументом. Такого рода обобщения оказываются полезными в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами и при изучении эволюционных задач механики вязкопластичных сред. Аналоги теорем 1–4 справедливы для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. Соответствующие изменения связаны с заменой пространства $V = \mathring{W}{}^1_p(\mathcal{D})$ другими пространствами Соболева. На этом пути возможна замена (9) иными краевыми условиями. Например, при изучении нелинейных вариантов задачи Неймана целесообразно положить $V = W^1_p(\mathcal{D})$. Для области $\mathcal{D}$ с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$ сохраняются обычные теоремы вложения, что и дает возможность заменить условие Дирихле (9) условием типа Неймана.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial y}{\partial t} - \lambda\Delta y + \lambda(1 + 2\sin t)(y - |y|^{\varkappa}) = \lambda\cos t, \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial \nu} = 0 \quad (x \in \partial\mathcal{D}, \ \ t \in [0, 2\pi]), \quad y(x,0) = y(x,2\pi), \ \ x \in \mathcal{D}.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $\mathcal{D}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\mathcal{D}$ класса C^1, $\partial/\partial\nu$ — производная по внутренней нормали ν, $1 < \varkappa < 1 + 4/n$, Δ — оператор Лапласа. Для задачи (15) $V = W^1_2(\mathcal{D})$, $H = L^2(\mathcal{D})$, соответствующее (15) отображение $\mathfrak{A} : V \to V^*$ определяется равенством $\mathfrak{A}(v) = -\operatorname{div}(\nabla v) + v - |v|^{\varkappa}$. Как нетрудно видеть, $v_1 = 0$ — невырожденная особая точка отображения $\mathfrak{A}$ и $\mathrm{ind}(v_1, \mathfrak{A}) = 1$. Если краевая задача

$$-\operatorname{div}(\nabla u) + u - \varkappa u = 0 \ \ (x \in \mathcal{D}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, \ \ x \in \partial\mathcal{D},$$

имеет только нулевое решение, то $v_2 = 1$ также есть невырожденная особая точка $\mathfrak{A}$ и $\mathrm{ind}(v_2, \mathfrak{A}) \neq 0$. В силу предложения 1 при малых $\lambda > 0$ существуют решения y^1_λ, y^2_λ задачи (15), в определенном смысле близкие к v_1 и v_2 соответственно.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.* – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 204 с.
3. Гаевский Г., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.

4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* – М: Наука, 1967. – 736 с.
5. Похожаев С.И. *О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами* // Функц. анализ и его прилож. – 1967. – Т. 1. – № 3. – С. 66–73.
6. Скрыпник И.В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.* – М.: Наука, 1990. – 442 с.
7. Климов В.С. *К задаче о периодических решениях операторных дифференциальных включений* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1989. – Т. 53. – № 12. – С. 309–327.
8. Дубинский Ю.А. *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1976. – Т. 9. – С. 5–130.
9. Климов В.С. *О топологических характеристиках негладких функционалов* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1998. – Т. 62. – № 5. – С. 117–134.

Ярославский
государственный университет

Поступила
13.03.2000