ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 8 (459)

УДК 517.518.3

Н.П. ФАДЕЕВ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОБОБЩЕННО-ЧЕТНОГО ВЕСА

В статье изучаются функциональные, алгебраические и дифференциальные свойства алгебраических многочленов одной вещественной переменной, ортогональных с обобщенно-четным весом, заданным на двух (конечных или бесконечных) промежутках вещественной оси.

Пусть $\widetilde{\varphi}_n(x) = x^n + \cdots$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ — многочлены, ортогональные на множестве

$$E = [-\delta; -\gamma] \cup [\gamma; \delta], \tag{1}$$

$0 \le \gamma < \delta \le +\infty$, по весу $\rho(x)$, где $\rho(x)$ — неотрицательная, суммируемая по Лебегу на E функция и интегралы

$$\int_E \rho(x) x^n dx$$

абсолютно сходятся при $n = 0, 1, 2, \dots$

Будем предполагать, что $\rho(x)$ удовлетворяет на множестве E равенству

$$\rho(-x) = \frac{x-\lambda}{x+\lambda}\rho(x), \tag{2}$$

где $\lambda \in [-\gamma; \gamma]$, $\rho(x) = 0$ при $x \notin E$.

Как показано в [1], многочлены $\widetilde{\varphi}_{2n}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ четны и не зависят от выбора λ на отрезке $[-\gamma; \gamma]$, а

$$\widetilde{\varphi}_{2n+1}(x) = \frac{\widetilde{\varphi}_{2n+2}(x) + \lambda_{2n+1}\widetilde{\varphi}_{2n}(x)}{x+\lambda}, \tag{3}$$

где

$$\lambda_{2n+1} = -\frac{\widetilde{\varphi}_{2n+2}(\lambda)}{\widetilde{\varphi}_{2n}(\lambda)}. \tag{4}$$

Эти утверждения остаются справедливыми для любого симметричного множества ортогональности E [2]. Кроме того,

$$\widetilde{\varphi}_{2n+1}(x) = (x-\lambda)\widetilde{\varphi}^*_{2n}(x), \tag{5}$$

где $\widetilde{\varphi}^*_{2n}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ — многочлены, ортогональные на множестве (1) относительно веса $\rho^*(x) = (x^2 - \lambda^2)\rho(x)$.

Функцию $\rho(x)$, удовлетворяющую условию (2), будем называть обобщенно-четной. При $\lambda = 0$ в равенстве (2) обобщенно-четная функция $\rho(x)$ превращается в четную, и тогда

$$\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x).$$

Пусть четная весовая функция $\rho(x)$ удовлетворяет на множестве (1) условиям

$$\rho'(x)/\rho(x) = R_4(x)/R_5(x), \tag{6}$$

$$W(x) = \rho(x)R_5(x)/x^3, \quad W(\pm\gamma) = W(\pm\delta) = 0, \tag{7}$$

$$D(x) = \frac{R_4(x) + R_5'(x) - 2R_5(x)/x}{x^2} \tag{8}$$

— целая относительно x функция, где $R_k(x)$ $(k=4,5)$ — многочлен степени не выше k.

Теорема 1. *Если* $\widetilde{\varphi}_{2n}(x)=x^{2n}+b_{2n}x^{2n-2}+\cdots$, *то в условиях* (6)–(8) *при* $n=1,2,\ldots$

$$b_{2n}=\frac{n[r_2^{(4)}+(2n-1)r_2^{(5)}]}{r_0^{(4)}+(4n-1)r_0^{(5)}}, \tag{9}$$

где $r_i^{(k)}$ $(k=4,5;\ i=0,2)$ — *коэффициент при* x^{k-i} *многочлена* $R_k(x)$.

Доказательство. В [3] доказано, что в условиях (6)–(8) многочлены $\varphi_{2n}(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ являются частными решениями дифференциального уравнения

$$R_5(x)y''+[R_4(x)+R_5'(x)-3R_5(x)/x]y'-\gamma_n x^3 y=0,$$

где

$$\gamma_n=2n[r_0^{(4)}+(2n+1)r_0^{(5)}],$$

$r_0^{(k)}$ — коэффициент при x^k многочлена $R_k(x)$ $(k=4,5)$.

Теперь для получения равенства (9) достаточно в уравнение подставить $y=\widetilde{\varphi}_{2n}(x)$ и сравнить коэффициенты при x^{2n+1}. □

В [2] показано, что для параметров рекуррентной формулы многочленов, ортогональных относительно обобщенно-четного веса $\rho(x)$ (условие (2)) на множестве (1), имеют место равенства (4) и

$$\alpha_{n+2}=(-1)^n\lambda, \quad \lambda_{2n}=\frac{(1-\lambda^2-\lambda_{2n+1})\widetilde{\varphi}_{2n}(1)-\widetilde{\varphi}_{2n+2}(1)}{\widetilde{\varphi}_{2n}(1)-\lambda_{2n-1}\widetilde{\varphi}_{2n-2}(1)}.$$

Равенство (9) позволит получить более удобные для вычислений формулы.

Теорема 2. *Если четная весовая функция* $\rho(x)$ *удовлетворяет на множестве* (1) *условиям* (6)–(8), *то при* $n=0,1,2,\ldots$

$$\varphi_{2n}(x)=k_n\frac{x}{\rho(x)}D^n[\rho(x)R_5^n(x)/x^{n+1}], \tag{10}$$

где k_n — *некоторая постоянная,* $Df=f_x'/x$.

Доказательство. Покажем, что

$$P_{2n}(x)=x\rho^{-1}(x)D^n[\rho(x)R_5^n(x)/x^{n+1}]$$

является четным многочленом степени $2n$. Действительно,

$$D\left(\rho\frac{R_5^n}{x^{n+1}}\right)=\rho\frac{R_5^{n-1}}{x^n}Q_{2n,2}$$

(условия (6) и (8)), где $Q_{2n,2}(x)$ — четный многочлен 2-й степени. Пользуясь условиями (6) и (8), по индукции легко показать, что

$$D^k\left(\rho\frac{R_5^n}{x^{n+1}}\right)=\rho\frac{R_5^{n-k}}{x^{n-k+1}}Q_{2n,2k}, \quad 1<k<n,$$

где $Q_{2n,2k}(x)$ — четный многочлен степени $2k$. При $k=n$ получим

$$D^n\left(\rho\frac{R_5^n}{x^{n+1}}\right)=\frac{\rho}{x}Q_{2n,2n}.$$

Отсюда следует, что $P_{2n}(x)$ — четный многочлен степени $2n$.

Учитывая определение ортогонального многочлена [4], [5], покажем, что при $k=0,1,2,\ldots,2n-1$

$$I_k=\int_E\rho(x)P_{2n}(x)x^k\,dx=0.$$

При четном k, применяя $k/2+1$ раз формулу интегрирования по частям и учитывая условия (6)–(8), получим

$$I_k = (-1)^{k/2} k!! D^{n-k/2-1} \left(\rho \frac{R_5^n}{x^{n+1}} \right) \bigg|_{\partial E} = 0,$$

где $\partial E = \{-\delta, -\gamma, \gamma, \delta\}$ — множество всех граничных точек множества E. При нечетном k, интегрируя $[k/2]+1$ раз по частям, получим

$$I_k = (-1)^{[k/2]+1} k!! \int_E \rho \frac{R_5^{[k/2]+1}}{x^{[k/2]+2}} Q_{2n,2n-2([k/2]+1)} dx.$$

Осталось заметить, что подинтегральная функция нечетна. Значит, $I_k = 0$. Многочлен $P_{2n}(x)$ лишь постоянным множителем отличается от многочлена $\varphi_{2n}(x)$ [5]. $\square$

Условиям (2) и (6)–(8) (при $\lambda = 0$) удовлетворяет функция [1]

$$\rho(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = |x+\lambda|(1-x^2)^\alpha (x^2-\gamma^2)^\beta \tag{11}$$

на множестве

$$E = [-1; -\gamma] \cup [\gamma; 1], \tag{12}$$

где $\alpha, \beta > -1$, $0 \le \gamma < 1$, $\lambda \in [-\gamma; \gamma]$, $\rho(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0$ при $x \notin E$. В этом случае

$$\begin{gathered} R_4(x) = -[2(\alpha+\beta)+1]x^4 + [2(\alpha\gamma^2+\beta)+1+\gamma^2]x^2 - \gamma^2, \\ R_5(x) = x(1-x^2)(x^2-\gamma^2). \end{gathered} \tag{13}$$

В соответствии с теоремой 2 при $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{k_n}{(1-x^2)^\alpha (x^2-\gamma^2)^\beta} D^n[(1-x^2)^{\alpha+n}(x^2-\gamma^2)^{\beta+n}]. \tag{14}$$

Если в равенстве (11) $\lambda = \gamma$, то в соответствии с (5)

$$\varphi_{2n+1}(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{k_n(x-\gamma)}{(1-x^2)^\alpha (x^2-\gamma^2)^{\beta+1}} D^n[(1-x^2)^{\alpha+n}(x^2-\gamma^2)^{\beta+n+1}].$$

Так как формула Лейбница для $(uv)^{(n)}$ остается справедливой и для оператора $D^n(uv)$, то формула (14) приводит к равенству

$$\widetilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\Gamma(\beta+k+1)} (1-x^2)^{n-k}(x^2-\gamma^2)^k.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \widetilde{\varphi}_{2n}(1, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{(1-\gamma^2)^n \Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}, \\ \widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{(-1)^n(1-\gamma^2)^n \Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}. \end{gathered} \tag{15}$$

Заметим, что последние три формулы не зависят от выбора $\lambda \in [-\gamma; \gamma]$.

Известно [4], что для всякой системы алгебраических ортогональных многочленов имеет место рекуррентная формула

$$\widetilde{\varphi}_{m+2}(x) = (x - \alpha_{m+2})\widetilde{\varphi}_{m+1}(x) - \lambda_{m+1}\widetilde{\varphi}_m(x), \tag{16}$$

где α_{m+2} и λ_{m+1} — параметры указанной ортогональной системы.

В случае, когда весовая функция на множестве (12) задается равенством $\rho(x,\alpha,\beta,\gamma,\gamma) = |x+\gamma|(1-x^2)^\alpha(x^2-\gamma^2)^\beta$, где $\alpha,\beta > -1$, $0 \le \gamma < 1$, для параметров рекуррентной формулы в соответствии с формулами (4), (15) и (16) имеют место равенства

$$\alpha_{n+2}^{(1)} = (-1)^{n-1}\gamma, \quad \lambda_{2n}^{(1)} = \frac{(1-\gamma^2)n(\alpha+n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)},$$
$$\lambda_{2n+1}^{(1)} = \frac{(1-\gamma^2)(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Пользуясь формулами (3) (при $\lambda = \gamma$) и (15), получим

$$\widetilde{\varphi}_{2n+1}(1,\alpha,\beta,\gamma,\gamma) = \frac{(1-\gamma^2)^{n+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{(1+\gamma)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Условиям (2) и (6)–(8) (при $\lambda = 0$) удовлетворяет функция [1]

$$\rho(x,\alpha,\gamma,\lambda) = |x+\lambda|(x^2-\gamma^2)^\alpha e^{-(x^2-\gamma^2)} \tag{17}$$

на множестве

$$E =]-\infty,\gamma] \cup [\gamma,+\infty[, \tag{18}$$

где $\alpha > -1$, $0 \le \gamma < +\infty$, $\lambda \in [-\gamma;\gamma]$, $\rho(x,\alpha,\gamma,\lambda) = 0$ при $x \notin E$. В этом случае

$$R_4(x) = -2x^4 + [2(\alpha+\gamma^2)+1]x^2 - \gamma^2, \quad R_5(x) = x(x^2-\gamma^2). \tag{19}$$

В соответствии с теоремой 2 при $n = 0,1,2,\ldots$

$$\varphi_{2n}(x,\alpha,\gamma,\lambda) = \frac{k_n e^{x^2-\gamma^2}}{(x^2-\gamma^2)^\alpha} D^n[(x^2-\gamma^2)^{\alpha+n}e^{-(x^2-\gamma^2)}]. \tag{20}$$

Если $\lambda = \gamma$, то согласно (5)

$$\varphi_{2n+1}(x,\alpha,\gamma,\gamma) = \frac{k_n(x-\gamma)e^{x^2-\gamma^2}}{(x^2-\gamma^2)^{\alpha+1}} D^n[(x^2-\gamma^2)^{\alpha+n+1}e^{-(x^2-\gamma^2)}].$$

Раскрывая правую часть равенства (20), получим

$$\widetilde{\varphi}_{2n}(x,\alpha,\gamma,\lambda) = \Gamma(\alpha+n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{\Gamma(\alpha+n-k+1)}(x^2-\gamma^2)^{n-k}.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma,\alpha,\gamma,\lambda) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)},\\ \widetilde{\varphi}_{2n}(1,\alpha,\gamma,\lambda) = \Gamma(\alpha+n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k(1-\gamma^2)}{\Gamma(\alpha+n-k+1)}.\end{gathered} \tag{21}$$

В случае, когда весовая функция $\rho(x,\alpha,\gamma,\gamma)$ на множестве (18) задается равенством (17) с $\gamma = \lambda$, где $\alpha > -1$, $0 \le \gamma < +\infty$, для параметров рекуррентной формулы в соответствии с формулами (4), (21) и (16) получим

$$\alpha_{n+2}^{(2)} = (-1)^{n-1}\gamma, \quad \lambda_{2n+1}^{(2)} = \alpha+n+1. \tag{22}$$

В [2] доказана теорема, частным случаем которой является следующее утверждение.

Если $f_n(t)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ — многочлены, ортогональные на отрезке $[a_1,b_1]$ с весом $\mu(t)$ и $\rho(x) = |x+\lambda|\mu((b-a)x^2+a)$, причем $a_1 = (b-a)\gamma^2+a$, $b_1 = (b-a)\delta^2+a$, где $a < b$, то

$$\widetilde{\varphi}_{2n}(x) = \frac{\widetilde{f}_n((b-a)x^2+a)}{(b-a)^n} \quad \text{при} \quad n = 0,1,2,\ldots; \tag{23}$$

если

$$\delta_n^2=\int_E\rho(x)\widetilde{\varphi}_n^2(x)dx,\quad \nu_n^2=\int_{a_1}^{b_1}\mu(t)\widetilde{f}_n^2(t)dt,$$

то

$$\delta_{2n}^2=\frac{\nu_n^2}{(b-a)^{2n+1}},\quad \delta_{n+1}^2=\lambda_{n+1}\delta_n^2,\quad \widehat{\varphi}_{2n}(x)=\sqrt{b-a}\,\widehat{f}_n(t), \tag{24}$$

$$\widehat{\varphi}_{2n}(x)=(b-a)^{(2n+1)/2}\frac{\widetilde{\varphi}_{2n}(x)}{\nu_n},\quad \widehat{\varphi}_{2n+1}(x)=(b-a)^{(2n+1)/2}\frac{\widetilde{\varphi}_{2n+1}(x)}{\sqrt{\lambda_{2n1}}\,\nu_n}, \tag{25}$$

где $\widehat{\varphi}_n(x)$ $(n=0,1,2,\dots)$ — ортонормированные многочлены веса $\rho(x)$ на множестве E.

Если в соответствии с приведенным выше утверждением положить $a=-\gamma^2$, $b=1-\gamma^2$, $a_1=0$, $b_1=+\infty$, $\widetilde{f}_n(t)=\widetilde{L}_n(t,\alpha)$ $(n=0,1,2,\dots)$ – многочлены Чебышева–Лагерра, ортогональные на луче $[0,+\infty[$ по весу $\mu(t,\alpha)=t^\alpha e^{-t}$, где $\alpha>-1$, то формула (23) принимает вид (см. также [1]) $\widetilde{\varphi}_{2n}(x,\alpha,\gamma,\lambda)=\widetilde{L}_n(x^2-\gamma^2,\alpha)$.

Известно ([5], сс. 220, 229), что для многочленов Чебышева–Лагерра $\nu_n=\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}$. Поэтому в силу формулы (24) $\delta_{2n}^2=n!\Gamma(\alpha+n+1)$. Тогда, учитывая формулы (22) и (24), получим $\delta_{2n+1}^2=n!\Gamma(\alpha+n+2)$, и из той же формулы (24) следует, что $\lambda_{2n}^{(2)}=n$.

В случае четной весовой функции ($\lambda=0$) для нахождения параметров рекуррентной формулы можно пользоваться формулой (4) и формулой, предшествующей теореме 2. В этом случае $\alpha_{n+2}=0$.

Для λ_{2n} и λ_{2n+1} выведем более простые рекуррентные формулы. Для этого предварительно докажем ряд предложений, имеющих общий характер.

Лемма 1. *Алгебраический многочлен любой ортогональной системы имеет вид*

$$\widetilde{\varphi}_n(x)=x^n-\Big(\sum_{k=1}^n\alpha_k\Big)x^{n-1}+\Big(\sum_{i=2}^n\alpha_i\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_k-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\Big)x^{n-2}+\cdots,$$

где α_k, λ_k — параметры рекуррентной формулы (16).

Доказательство. Положив $\lambda_0=0$ и заметив, что $\widetilde{\varphi}_0(x)=1$, из (16) получим

$$\widetilde{\varphi}_1(x)=x-\alpha_1,$$

$$\widetilde{\varphi}_2(x)=(x-\alpha_2)(x-\alpha_1)-\lambda_1=x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+(\alpha_1\alpha_2-\lambda_1).$$

Математическая индукция завершает доказательство леммы. □

Следствие. Если весовая функция $\rho(x)$ четна, а множество ортогональности E симметрично относительно $x=0$, то

$$\widetilde{\varphi}_{2n}(x)=x^{2n}-\Big(\sum_{k=1}^{2n-1}\lambda_k\Big)x^{2n-2}+\cdots$$

Доказательство. В условиях следствия $\alpha_k=0$.

Лемма 2. *Если весовая функция $\rho(x)$ четна, а множество ортогональности E симметрично относительно $x=0$, то*

$$\widetilde{\varphi}_{2n}(x)=x^{2n}-\cdots+(-1)^n\prod_{k=1}^n\lambda_{2k-1}.$$

Доказательство. При $n=1$

$$\widetilde{\varphi}_2(x)=x\varphi_1(x)-\lambda_1=x^2-\lambda_1.$$

Применяя математическую индукцию, завершим доказательство. □

Теорема 3. *Если четная весовая функция $\rho(x)$ удовлетворяет на множестве* (1) *условиям* (6)–(8), *то для параметра λ_{n+1} рекуррентной формулы соответствующих ортогональных многочленов справедливы равенства*

$$\lambda_{2n} = \left(\gamma^2 - b_{2n} + b_{2n+2} - \frac{\widetilde{\varphi}_{2n+2}(\gamma)}{\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma)}\right)\frac{\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma)}{\lambda_{2n-1}\widetilde{\varphi}_{2n-2}(\gamma)}, \tag{26}$$
$$\lambda_{2n+1} = b_{2n} - b_{2n+2} - \lambda_{2n},$$

где b_{2n} — коэффициент при x^{2n-2} многочлена $\widetilde{\varphi}_{2n}(x) = x^{2n} + \cdots$, γ — граничная точка множества E.

Доказательство. Из следствия леммы 1 получим

$$b_{2n} = -\sum_{k=1}^{2n-1} \lambda_k. \tag{27}$$

В силу формулы (3) ($\lambda = 0$)

$$\widetilde{\varphi}_{2n+1}(\gamma) = \frac{\widetilde{\varphi}_{2n+2}(\gamma) + \lambda_{2n+1}\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma)}{\gamma}. \tag{28}$$

С другой стороны, в силу (16) $\widetilde{\varphi}_{2n+1}(\gamma) = \gamma\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma) - \lambda_{2n}\widetilde{\varphi}_{2n-1}(\gamma)$. Заменяя в последнем равенстве $\widetilde{\varphi}_{2n+1}(\gamma)$ и $\widetilde{\varphi}_{2n-1}(\gamma)$ их значениями по формуле (28), запишем

$$\frac{\widetilde{\varphi}_{2n+2}(\gamma) + \lambda_{2n+1}\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma)}{\gamma} = \gamma\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma) - \lambda_{2n}\frac{\widetilde{\varphi}_{2n+2}(\gamma) + \lambda_{2n+1}\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma)}{\gamma},$$

откуда

$$\lambda_{2n+1} = \gamma^2 - \frac{\widetilde{\varphi}_{2n+2}(\gamma)}{\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma)} - \left(1 - \lambda_{2n-1}\frac{\widetilde{\varphi}_{2n-2}(\gamma)}{\widetilde{\varphi}_{2n}(\gamma)}\right)\lambda_{2n}. \tag{29}$$

Из (27) получим

$$\lambda_{2n} + \lambda_{2n+1} = b_{2n} - b_{2n+2}. \tag{30}$$

Разрешая относительно λ_{2n} и λ_{2n+1} систему уравнений (29) и (30), получим равенства (26). □

Пример 1. В силу теоремы 1 и равенств (13) для многочленов, ортогональных с весом (11) на множестве (12),

$$b_{2n}^{(1)} = -\frac{n[(\alpha + \gamma^2 + \beta) + n(1 + \gamma^2)]}{\alpha + \beta + 2n}.$$

Поэтому, учитывая формулы (26), (15) и (16), получим

$$\lambda_{2n}^{(1)} = \left[\gamma^2 - \frac{(\alpha+\beta)[(\alpha+1)\gamma^2 + \beta + n + 1] + 2n(\alpha+\beta+n+1)(1+\gamma^2)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)} + \right.$$
$$\left.(1-\gamma^2)\frac{(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}\right](\gamma^2 - 1) \times$$
$$\times \frac{(\beta+n)(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)\lambda_{2n-1}^{(1)}},$$
$$\lambda_{2n+1}^{(1)} = \frac{(\alpha+\beta)[(\alpha+1)\gamma^2 + \beta + 1] + 2n(\alpha+\beta+n+1)(1+\gamma^2)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)} - \lambda_{2n}^{(1)}.$$

Пример 2. Для многочленов, ортогональных относительно веса (17) на множестве (18), учитывая формулу (9) и равенства (19), получим

$$b_{2n}^{(2)} = -n(\alpha+\beta+\gamma^2).$$

Поэтому из (26) и (21) имеем

$$\lambda_{2n}^{(2)} = \frac{n(\alpha+n)}{\lambda_{2n-1}^{(2)}}, \quad \lambda_{2n+1}^{(2)} = \alpha+2n+1+\gamma^2-\lambda_{2n}^{(2)}.$$

Из общей теории ортогональных многочленов известно [4]–[6], что их корни вещественны, просты и лежат внутри промежутка ортогональности. Рассмотрим некоторые специфические свойства корней изучаемых здесь ортогональных многочленов.

Пусть x_n — наибольший нуль многочлена $\varphi_{2n}(x)$, ортогонального на множестве (1) относительно обобщенно-четного веса $\rho(x)$. Тогда $-x_n$ — наименьший его нуль.

В силу теоремы Лагерра ([7], отдел 5, задача 118, сс. 16, 248)

$$-\delta < -x_n < 0 < x_n - 2(2n-1)\frac{\varphi_{2n}'(x_n)}{\varphi_{2n}''(x_n)} = x_n - 2(2n-1)\frac{y'(x_n)}{y''(x_n)} < x_n.$$

Предположим, что при $\lambda = 0$ весовая функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям (6)–(8). Тогда многочлены $\varphi_{2n}(x)$ $(n = 0,1,2,\dots)$ являются частными решениями дифференциального уравнения (см. доказательство теоремы 1) и

$$R_5(x_n)y''(x_n)+\left[R_4(x_n)+R_5'(x_n)-\frac{3R_5(x_n)}{x_n}\right] = 0, \quad -2x_n < -2(2n-1)\frac{-R_5(x_n)}{R_4(x_n)+R_5'(x_n)-3R_5(x_n)/x_n},$$

поэтому

$$x_n > -(2n-1)\left(\frac{R_4(x_n)}{R_5(x_n)}+\frac{R_5'(x_n)}{R_5(x_n)}-\frac{3}{x_n}\right)^{-1}. \tag{31}$$

Пример 3. Рассмотрим многочлены $\varphi_{2n}(x,\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$, ортогональные на множестве (12) относительно веса (11). Учитывая равенства (13), получим

$$\frac{R_4}{R_5}+\frac{R_5'}{R_5}-\frac{3}{x} = -\frac{2(\alpha+1)x}{1-x^2}+\frac{2(\beta+1)x}{x^2-\gamma^2}-\frac{1}{x},$$

и неравенство (31) в этом случае принимает вид

$$x_n > \frac{-(2n-1)x_n(1-x_n^2)(x_n^2-\gamma^2)}{-(1-x_n^2)(x_n^2-\gamma^2)-2(\alpha+1)x_n^2(x_n^2-\gamma^2)+2(\beta+1)x_n^2(1-x_n^2)}.$$

Так как $x_n > 0$, то

$$(1-x_n^2)(x_n^2-\gamma^2)+2(\alpha+1)x_n^2(x_n^2-\gamma^2)-2(\beta+1)x_n^2(1-x_n^2) > (2n-1)(1-x_n^2)(x_n^2-\gamma^2).$$

После упрощения приходим к неравенству

$$x_n > \left(\frac{1}{2(\alpha+\beta+n+1)}\{[(\alpha+n)\gamma^2+\beta+n]+\sqrt{[(\alpha+n)\gamma^2+\beta+n]^2-4(n-1)\gamma^2(\alpha+\beta+n+1)}\,\}\right)^{1/2}.$$

Мы получили неравенство для наибольшего из корней многочлена $\varphi_{2n}(x,\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$.

Пример 4. Теперь решим аналогичную задачу для многочленов $\varphi_{2n}(x,\alpha,\gamma,\lambda)$ $(n = 0,1,2,\dots)$, ортогональных на множестве (18) с весом (17). Учитывая равенства (19), получим

$$\frac{R_4}{R_5}+\frac{R_5'}{R_5}-\frac{3}{x} = \frac{2(\alpha+1)x}{x^2-\gamma^2}-2x-\frac{1}{x}.$$

Неравенство (31) в этом случае принимает вид

$$x_n > \frac{-(2n-1)x_n(x_n^2-\gamma^2)}{-(x_n^2-\gamma^2)+2(\alpha+1)x_n^2-2x_n^2(x_n^2-\gamma^2)}.$$

Так как $x_n > 0$, то

$$(x_n^2-\gamma^2)-2(\alpha+1)x_n^2+2x_n^2(x_n^2-\gamma^2) > (2n-1)(x_n^2-\gamma^2)$$

или

$$x_n^4-(n+\alpha+\gamma^2)x_n^2+(n+1)\gamma^2 > 0.$$

Отсюда

$$x_n > \left[\frac{1}{2}(\alpha+n+\gamma^2)+\left(\frac{1}{4}(n+\alpha+\gamma^2)-(n-1)\gamma^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}$$

— неравенство для наибольшего из корней многочлена $\varphi_{2n}(x,\alpha,\gamma,\lambda)$ $(n=0,1,2,\dots)$.

Литература

1. Барков Г.И. *О некоторых системах многочленов, ортогональных на двух симметричных интервалах* // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 4. – С. 3–16.
2. Фадеев Н.П. *О некоторых системах ортогональных многочленов* // Волжск. матем. сб. – 1971. – Вып. 12. – С. 125–134.
3. Фадеев Н.П. *О дифференциальных уравнениях для некоторых ортогональных многочленов* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 5. – С. 99–103.
4. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
5. Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
6. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
7. Полиа Г., Сегё Г. *Задачи и теоремы из анализа.* Ч. 2. – М.–Л.: Техиздат, 1938. – 407 с.

Мордовский государственный
педагогический институт

Поступили
первый вариант 21.05.1998
окончательный вариант 14.04.2000