РАЗДЕЛ N 2.
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Абсолютно твердым телом называется система материальных точек, взаимные расстояния между которыми не изменяются.

Любое движение абсолютно твердого тела можно разложить на поступательное и вращательное. Поступательное движение твердого тела описывается теми же уравнениями, что и движение материальной точки. Целью работ этого раздела является экспериментальное изучение законов динамики вращательного движения. Основное уравнение динамики вращательного движения в случае неподвижной оси вращения z удобно спроектировать на эту ось:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z . \tag{1}$$

Здесь L_z - проекция момента импульса, M_z - момент внешних сил относительно оси (см. предыдущий раздел).

Проекция момента импульса L_z связана с угловой скоростью ω и моментом инерции I относительно этой оси:

$$L_z = I\omega . \tag{2}$$

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела в этом случае определяется выражением:

$$E=I\omega^2/2 \tag{3}$$

Свойства момента инерции.

Момент инерции тела определяется формулой:

$$I = \sum m_i r_i^2 , \tag{4}$$

где суммирование проводится по всем материальным точкам тела с массами m_i, r_i - расстояния от материальных точек до оси вращения. В случае непрерывного распределения масс эту формулу можно записать в интегральном виде:

$$I = \int r^2 dm \tag{5}$$

Момент инерции величина аддитивная $I=\Sigma I_i$.

Момент инерции I тела относительно любой оси AA' можно найти, зная момент инерции I_0 относительно оси BB', проходящей через центр масс тела параллельно оси AA' при помощи теоремы Гюйгенса-Штейнера:

$$I=I_0+md^2, \tag{6}$$

где m - масса тела, d - расстояние между осями.

Моменты инерции однородных тел правильной геометрической формы относительно осей, проходящих через центры масс, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Тело	Ось	Момент инерции
Шар радиуса r	любая ось	$\frac{2}{5}mr^2$
Диск радиуса r	ось перпендикулярная плоскости диска	$\frac{1}{2}mr^2$
Цилиндр радиуса r и высотой l	ось перпендикулярная оси симметрии	$\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
Цилиндр радиуса r и высотой l	ось симметрии	$\frac{1}{2}mr^2$
Тонкий стержень длиной l	ось перпендикулярная стержню	$\frac{1}{12}ml^2$
Куб с длиной ребра l	любая ось	$\frac{1}{6}ml^2$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ

1. Что такое угловая скорость и угловое ускорение? Как они направлены по отношению к оси вращения? В чем преимущества описания вращательного движения твердого тела с помощью угловых величин, а не линейных?
2. Как связаны между собой угол поворота и путь, угловая и линейная скорости, угловая скорость и угловое ускорение с ускорением?
3. Что такое момент импульса и момент силы?
4. Что такое плечо силы?
5. Получите выражения для моментов инерции, приведенные в таблице 1.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 21.

ПРОВЕРКА УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ДИНАМИКИ НА ПРИБОРЕ ОБЕРБЕКА

Целью работы является проверка уравнения вращательной динамики при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I\beta=M, \tag{7}$$

где I – момент инерции тела относительно оси, β – угловое ускорение, M - момент силы относительно оси вращения.

Уравнение (7) отражает линейную зависимость β от M. Эту зависимость и предстоит проверить на опыте.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Приборы и принадлежности: прибор Обербека, секундомер, измерительная линейка (рулетка).

На рисунке 1 схематически показан прибор Обербека, с помощью которого удобно исследовать динамику вращательного движения. Четыре стержня укреплены на втулке под прямым углом друг к другу. На стержни нанизаны грузы одинаковой массы. Втулка и три шкива, с радиусами r_i, указанными на установке, насажены на общую ось. Ось горизонтально закреплена в подшипниках, так что вся система может вращаться вокруг нее. Передвигая грузы по стержням, можно менять момент инерции системы. На шкив наматывается нить, к концу которой привязана гиря известной массы m. При падении гири сила натяжения нити T создает момент относительно оси вращения

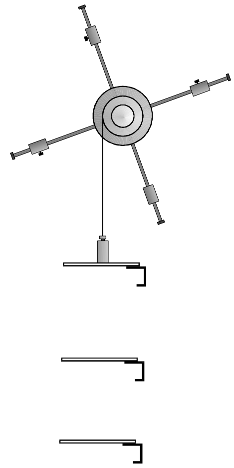

Рис. 1.

$$M = T r_i, \tag{8}$$

который приводит к вращению системы.

Силу T можно найти из уравнения поступательного движения гири:

$$ma = mg - T, \tag{9}$$

где m – масса гири, a – его ускорение. Из этих уравнений получаем, что момент силы натяжения нити

$$M = m(g - a)r. \tag{10}$$

Варьируя массу гири и радиус шкива, можно менять момент этой силы. В случае плотной намотки нерастяжимой нити ускорение a связано с угловым ускорением β соотношением $\beta = a/r$. Ускорение a можно определить, измеряя время t_i, в течение которого груз опускается на расстояние h_i:

$$a = \frac{2h_i}{t_i^2}. \tag{11}$$

Тогда

$$\beta = \frac{2h_i}{r t_i^2}. \tag{12}$$

ХОД РАБОТЫ

Задание 1. Исследование характера движения колеса Обербека.

1. Сбалансируйте прибор Обербека. Для этого установите грузы на одинаковом расстоянии от центра, и затем, перемещая их вдоль стержней, добейтесь безразличного равновесия системы (крестовина остается в состоянии покоя при любом повороте).
2. Намотайте нить на один из шкивов и установите гирю на самой верхней площадке. Проследите, чтобы нить была натянута вертикально.
3. Опустите все нижние площадки кроме одной, и измерьте расстояние от нее до верхней площадки.
4. Резко выбейте площадку из-под гири и измерьте время падения гири между этими площадками.
5. Найдите ускорение гири a и угловое ускорение β колеса по формулам (11) и (12).
6. Повторите пункты 3-5 меняя площадки, на которые падает гиря. Убедитесь в том, что ускорения гири и колеса не изменяются.

Задание 2. Исследование зависимости β колеса от величины M .

1. Установите грузы, нанизанные на спицы колеса, на максимально возможном удалении d от его оси вращения. Сбалансируйте прибор и измерьте расстояние d.
2. Измерьте времена падения гири на самую нижнюю площадку (на пол), поочередно наматывая нить на разные шкивы. Рассчитайте соответствующее каждому шкиву ускорение β по формуле (12) и момент силы M по формуле (10).
3. Постройте график зависимости углового ускорения β колеса от момента приложенной силы M. Сделайте вывод о выполнении (невыполнении) уравнения (7).
4. По тангенсу угла наклона графика найдите момент инерции I вращающейся части прибора Обербека относительно оси вращения.

Задание 3. Исследование зависимости β колеса от его момента инерции I

1. Измерьте времена падения гири на самую нижнюю площадку (на пол), для разных положений грузов на спицах. При этом нить наматывайте все время на один шкив. Рассчитайте соответствующее каждому положению грузов ускорение β по формуле (12).
2. Постройте график зависимости углового ускорения β колеса от расстояния грузов до оси вращения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К РАБОТЕ.

1. Опишите экспериментальную установку и способ проверки уравнения (7).
2. Почему полученный график не проходит через начало координат?
3. После того, как гирька упадет на пол, прибор продолжает вращаться. На какую высоту он может поднять груз?
4. Почему стержни сориентированы под прямым углом?
5. Как зависит момент инерции вращающейся части прибора Обербека от положений грузов на его стержнях?
6. Каким образом можно регулировать момент силы действующий на вращающуюся часть прибора Обербека?
7. *Как изменится график зависимости $\beta(M)$, если повторить опыт с гирькой другой массы?
8. **Как можно измерить массу грузов на стержнях прибора? Оцените точность. Проделайте опыт.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 22.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВОГО КОЛЕСА СПОСОБОМ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: измерение момента инерции махового колеса методом колебаний.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И ВЫВОД РАБОЧИХ ФОРМУЛ

Приборы и принадлежности: маховое колесо на станине, вспомогательные тела, штангенциркуль, секундомер, весы.

Экспериментальная установка (см. рис. 2) представляет собой массивное маховое колесо *1*, которое может вращаться с малым трением вокруг горизонтальной оси. Ось вращения проходит через центр тяжести махового колеса, поэтому оно находится в безразличном равновесии. Если на ободе махового колеса закрепить вспомогательное тело *2*, система переходит в состояние устойчивого равновесия. Если теперь повернуть маховое колесо на угол α_m и а затем отпустить, оно начнет совершать колебания с некоторым периодом T. При малых углах α_m колебания махового колеса можно считать гармоническими: $\alpha = \alpha_m \sin\omega_0 t$.

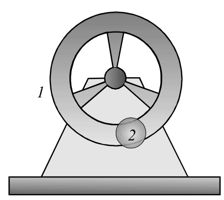

Рис. 2.

При прохождении положения равновесия угловая скорость системы достигает максимального значения $\alpha_m\omega_0$, и следовательно, ее максимальная кинетическая энергия равна:

$$E_m = \frac{I\alpha_m^2\omega_0^2}{2}.$$

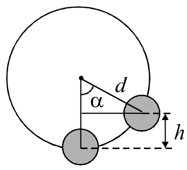

Рис. 3.

В данном случае момент инерции системы I складывается из момента инерции махового колеса $I_к$ и момента инерции вспомогательного тела $I_т$.

С другой стороны, потенциальная энергия системы равна: $E = mgh$, где m - масса вспомогательного тела, h - высота его подъема из положения равновесия. Из рис. 3 очевидно, что

$$h = d - d\cos\alpha = 2d\sin^2\alpha/2\,,$$

где d расстояние от центра махового колеса до центра масс вспомогательного тела.

В случае малых колебаний (в нашем случае только их можно считать гармоническими) можно заменить $\sin\alpha$ на α. Если пренебречь силами трения, то на основании закона сохранения механической энергии, мы можем приравнять максимальные значения кинетической и потенциальной энергий. Выразив ω_0 через период колебаний, для момента инерции махового колеса получим:

$$I_к = mgd\,\frac{T^2}{4\pi^2} - I_т\,. \tag{13}$$

Все величины в правой части этого выражения доступны непосредственному измерению, что касается величины $I_т$, ее можно рассчитать на основании теоремы Гюйгенса-Штейнера:

$$I_т = I_0 + md^2. \tag{14}$$

Момент инерции вспомогательного тела I_0 относительно оси параллельной оси вращения и проходящей через его центр масс можно найти, зная геометрические размеры тела, по формулам из таблицы 1.

ХОД РАБОТЫ

1. Взвесьте вспомогательное тело.
2. Определите штангенциркулем размеры вспомогательного тела и расстояние d.

3. По формуле (14), используя таблицу (1), рассчитайте момент инерции вспомогательного тела $I_т$.
4. Закрепите тело на ободе махового колеса.
5. Отклоните маховое колесо на небольшой угол и отпустите его: колесо будет совершать колебания.
6. Определите по секундомеру время t, как можно большего числа полных колебаний. Рассчитайте среднее значение периода одного колебания T.
7. Рассчитайте момент инерции махового колеса по формуле (13). Оцените погрешность эксперимента.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К РАБОТЕ.

1. Запишите уравнение движения махового колеса с грузом, оцените при каких углах решение этого уравнения можно считать гармонической функцией в рамках точности имеющихся приборов.
2. Получите формулу (13).
3. Как влияет сила трения на результаты измерения? Какие конструктивные особенности установки позволяют пренебрегать силой трения?
4. Как влияют момент инерции и масса вспомогательного тела на точность измерения? Какие условия накладываются на вспомогательное тело?
5. Сравните этот метод определения момента инерции, использованный в работе, с другими вам известными.
6. Изобразите примерные графики зависимости угловой координаты, угловой скорости, углового ускорения колеса с шариком и момента силы тяжести относительно оси вращения от времени.
7. *Оцените по порядку величины момент инерции махового колеса, измеряя его размеры и делая предположения о плотности материала, из которого оно сделано.
8. *Как, зная момент инерции махового колеса, определить момент инерции тела, которое можно укрепить на нем? Проведите опыт с одним из вспомогательных тел. Оцените точность.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 23.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Цель работы – определение момента инерции тела способом крутильных колебаний.

Если тело, подвешенное на упругой нити, вывести из положения равновесия путем поворота вокруг вертикальной оси на угол α_m и предоставить самому себе, то в системе возникнут крутильные колебания. При малых α_m эти колебания можно считать гармоническими:

$$\alpha = \alpha_m \sin\omega_0 t.$$

При прохождении положения равновесия угловая скорость тела достигает максимального значения $\alpha_m\omega_0$, и, следовательно, его максимальная кинетическая энергия может быть записана в виде:

$$E_к = \frac{I\alpha_m^2\omega_0^2}{2}. \qquad (15)$$