ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 11 (510)

УДК 514.763

М.А. МАЛАХАЛЬЦЕВ

ПУЧОК ЛОКАЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ НА СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ С ОСОБЕННОСТЯМИ МАРТИНЕ

1. Введение

Пусть ω_0 есть замкнутая 2-форма на $\mathbb{R}^{2n}$. Симплектическое многообразие с особенностями типа ω_0 есть $2n$-мерное многообразие M, наделенное замкнутой формой ω такой, что для любой точки $p \in M$ существует окрестность $U(p)$ и диффеоморфизм $\phi_p : U(p) \to \mathbb{R}^{2n}$ со свойством $\omega|_{U(p)} = \phi_p^*\omega_0$ (см. [1]).

В [2]–[5] доказано, что на $\mathbb{R}^4$ есть пять типов ростков общего положения замкнутой 2-формы. Из них четыре являются структурно устойчивыми — это ростки следующих форм в начале координат:

тип 0

$$\omega_0 = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4,$$

тип I

$$\omega_0 = x^1 dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4,$$

тип II-e (эллиптический тип)

$$\omega_0 = dx^1 \wedge dx^2 + x^3 dx^1 \wedge dx^4 + x^3 dx^2 \wedge dx^3 + x^4 dx^2 \wedge dx^4 + (x^1 - (x^3)^2) dx^3 \wedge dx^4, \tag{1}$$

тип II-h (гиперболический тип)

$$\omega_0 = dx^1 \wedge dx^2 + x^3 dx^1 \wedge dx^4 + x^3 dx^2 \wedge dx^3 - x^4 dx^2 \wedge dx^4 + (x^1 - (x^3)^2) dx^3 \wedge dx^4. \tag{2}$$

Данные типы можно охарактеризовать следующим образом (подробности см. в [2]). Пусть ω есть замкнутая 2-форма на четырехмерном многообразии M. Предположим, что множество точек, в которых форма ω вырождена, образует трехмерное подмногообразие Σ в M.

Если точка p не лежит в Σ, то по теореме Дарбу в окрестности точки p 2-форма ω приводится к виду 0.

Пусть точка p лежит в Σ и $\omega(p) \neq 0$. Если аннулятор E_p формы $\omega(p)$ трансверсален Σ, то форма ω приводится в некоторой окрестности U точки p к типу I. При этом открытое в Σ множество $V = U \cap \Sigma$ состоит из точек типа I, а всюду плотное в U подмножество $U \setminus V$ состоит из точек типа 0.

Пусть $\Sigma' \subset \Sigma$ — множество точек p таких, что аннулятор $E_p \subset T_p\Sigma$. Если Σ' в окрестности точки p есть подмногообразие и E трансверсально Σ', то форма ω приводится в некоторой окрестности U точки p к типу II-e или II-h. Пусть $V = U \cap \Sigma$, $W = U \cap \Sigma'$. Тогда всюду плотное в U множество $U \setminus \Sigma$ состоит из точек типа 0, всюду плотное в V множество $V \setminus W$ состоит из точек типа I, и множество W состоит из точек типа II.

Пусть на четырехмерном многообразии задана замкнутая 2-форма ω. Тогда если все точки M имеют тип 0, то (M, ω) — симплектическое многообразие. Если любая точка M имеет тип 0 или I, то скажем, что (M, ω) — *симплектическое многообразие с особенностями Мартине* I *типа*. Если любая точка M имеет тип 0, I, или II, то скажем, что (M,ω) — *симплектическое многообразие с особенностями Мартине* II *типа*.

Заметим, что симплектическое многообразие (M,ω) с особенностями Мартине есть симплектическое многообразие с особенностями типа ω_0, где ω_0 задана формулами (1) или (2). Действительно, пусть $\phi(p) = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$. Тогда точка p имеет тип 0 тогда и только тогда, когда $x_0^1 \neq 0$; тип I тогда и только тогда, когда $x_0^1 = 0$ и $(x_0^3)^2 + (x_0^4)^2 \neq 0$; тип II тогда и только тогда, когда $x_0^1 = 0$, $x_0^3 = 0$ и $x_0^4 = 0$. Таким образом, симплектическая структура есть частный случай симплектической структуры с особенностями Мартине типа I, которая, в свою очередь, есть частный случай симплектической структуры с особенностями Мартине типа II.

Симплектические многообразия (M,ω) с особенностями Мартине типа I (под названием "folded symplectic structures") изучались в работе [6], где найдены условия, при которых ω есть прообраз симплектической формы на симплектическом орбифолде и показано, что ω индуцирует единственную с точностью до гомотопии спинорную структуру. Отметим, что в этой работе рассматриваются многообразия произвольной четной размерности, а форма ω_0 имеет вид

$$x^1 dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + \cdots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n}. \tag{3}$$

В [7] показано, что на любом компактном ориентируемом четырехмерном многообразии существует симплектическая структура с особенностями Мартине типа I. В [8] доказаны аналоги теоремы о несжимаемости объема для $\mathbb{R}^{2n}$ с формой (3).

Пусть (M,ω) есть симплектическое многообразие с особенностями типа ω_0. Векторное поле V на открытом подмножестве U называется *гамильтоновым векторным полем*, если $L_V\omega = 0$, где L_V есть производная Ли в направлении V. Пусть $\mathfrak{X}_h(U)$ есть алгебра Ли гамильтоновых векторных полей на U. Ясно, что $U \to \mathfrak{X}(U)$ есть пучок алгебр Ли на M. В данной работе изучается пучок гамильтоновых векторных полей на симплектическом многообразии с особенностями Мартине.

Все рассматриваемые в работе многообразия и отображения предполагаются гладкими. Используются следующие обозначения: C_M^∞ — пучок гладких функций на многообразии M, $\mathfrak{X}_M$ — пучок векторных полей, Ω_M^* — пучок дифференциальных форм. Для пучка $\mathcal{G}$ на многообразии M через $\mathcal{G}_p$ будем обозначать множество ростков этого пучка в точке $p \in M$.

2. Основные результаты

Пусть (M,ω) есть симплектическое многообразие с особенностями типа ω_0. Гладкая функция $f : U \to \mathbb{R}$, где $U \subset M$ — открытое множество, называется *локальным гамильтонианом* (ср. [9]), если существует векторное поле V на U такое, что $i_V\omega = df$. Из свойства производной Ли $L_V = di_V + i_V d$ следует $V \in \mathfrak{X}_h(U)$. Ясно, что локальные гамильтонианы образуют пучок, обозначим его $\mathcal{T}$.

В [1] было показано, что имеет место точная последовательность пучков

$$0 \to \mathbb{R}_M \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{X}_\Gamma \to 0,$$

где $\mathbb{R}_M$ есть пучок локально постоянных функций на M, i — включение $\mathbb{R}_M$ в $\mathcal{T}$, и $\pi(f) = V$, если $df = i_V\omega$, т. е. π отображает гамильтониан в соответствующее гамильтоново векторное поле. Отсюда следует, что существует точная последовательность когомологий многообразия M с коэффициентами в пучках $\mathbb{R}_M$, $\mathcal{T}$ и $\mathfrak{X}_h$:

$$\cdots \to \check{H}^0(M;\mathfrak{X}_\Gamma) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(M;\mathbb{R}_M) \xrightarrow{i_*} \check{H}^1(M;\mathcal{T}) \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^1(M;\mathfrak{X}_\Gamma) \xrightarrow{\delta} \check{H}^2(M;\mathbb{R}_M) \xrightarrow{i_*} \cdots \tag{4}$$

В дальнейшем под симплектической структурой с особенностями Мартине мы будем понимать симплектическую структуру с особенностями типа ω_0, где ω_0 имеет вид (1) или (2), на четырехмерном многообразии. В этом параграфе найдем когомологии пучка локальных гамильтонианов на симплектическом многообразии с особенностями Мартине.

Пусть μ — форма объема на M. Тогда $\omega \wedge \omega = \mathrm{Pf}_\mu(\omega)\mu$, где $\mathrm{Pf}_\mu(\omega)$ называется *пфаффианом формы* ω *относительно* μ. Очевидно, если $\mu' = \lambda\mu$ — другая форма объема, где λ — функция, не обращающаяся в нуль, то $\mathrm{Pf}_\mu(\omega) = \lambda\,\mathrm{Pf}_{\mu'}(\omega)$. Следовательно, в пучке C^∞ колец гладких функций определен *подпучок* $\mathcal{I}$ *главных идеалов, порожденных* $\mathrm{Pf}_\mu(\omega)$:

$$\mathcal{I}(U) = \{\mathrm{Pf}_\mu(\omega)|_U \cdot f \mid f \in C^\infty(U)\},$$

который не зависит от выбора формы объема μ.

Далее заметим, что $\mathcal{I}$ *есть в точности пучок идеалов, сечениями которого являются функции, обращающиеся в нуль на* Σ, *т. е.* $C^\infty/\mathcal{I}$ *есть пучок ростков гладких функций на* Σ.

Лемма. *Пусть* (M,ω) *есть симплектическое многообразие с особенностями Мартине. Пусть ковекторное поле* ξ *определено на открытом множестве* $U \subset M$. *Тогда* $\xi = i_V\omega$ *для некоторого гладкого векторного поля* V *на* U *тогда и только тогда, когда для любой точки* $p \in U$ *ковектор* $\xi(p)$ *обращается в нуль на аннуляторе* $\omega(p)$. *При этом векторное поле* V *определяется единственным образом.*

В частности, f *есть локальный гамильтониан тогда и только тогда, когда* df *обращается в нуль на аннуляторе* ω.

Доказательство. Вначале положим $U = M$. Пусть $\alpha_\omega : TM \to T^*M$, $\alpha(V) = i_V\omega$, — морфизм векторных расслоений, определяемый 2-формой ω. Нам надо доказать, что сечение ξ расслоения T^*M, определенное на U, есть образ сечения V расслоения TM при отображении α_ω тогда и только тогда, когда ξ обращается в нуль на аннуляторе ω.

Если $\xi = \alpha_\omega(V)$, то из определения аннулятора немедленно следует, что ξ обращается на нем в нуль.

Докажем обратное утверждение. Прежде всего построим кососимметричное тензорное поле $\widetilde{\omega} \in \Omega_2(M)$ такое, что

$$\widetilde{\omega}^{sk}\omega_{sm} = \mathrm{Pf}_\mu(\omega)\delta^k_m, \tag{5}$$

где μ — некоторая форма объема. Зафиксируем некоторую метрику g на M и пусть $\mu \in \Omega^4(M)$ — соответствующая форма объема. Тогда, как известно, существует тензорное поле $\widetilde{\mu} \in \Omega_4(M)$ такое, что в локальных координатах $\widetilde{\mu}^{ijkl}\mu_{ijkm} = \delta^l_m$. Положим $\widetilde{\omega}^{kl} = \widetilde{\mu}^{ijkl}\omega_{ij}$. Используя определение $\mathrm{Pf}_\mu(\omega)$, а также кососимметричность формы ω и тензора $\widetilde{\mu}$, запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}_\mu(\omega)\delta^p_m = \mathrm{Pf}_\mu(\omega)\widetilde{\mu}^{ijkp}\mu_{ijkm} = \widetilde{\mu}^{ijkp}\omega_{[ij}\omega_{km]} = \\ = \frac{1}{3}(\widetilde{\mu}^{ijkp}\omega_{ij}\omega_{km} + \widetilde{\mu}^{ijkp}\omega_{ik}\omega_{mj} + \widetilde{\mu}^{ijkp}\omega_{im}\omega_{jk}) = \widetilde{\mu}^{ijkp}\omega_{ij}\omega_{km} = \widetilde{\omega}^{kp}\omega_{km}.\end{aligned}$$

Таким образом, построенное тензорное поле $\widetilde{\omega} \in \Omega_2(M)$ обладает требуемым свойством (5). Тензорное поле $\widetilde{\omega}$ определяет морфизм векторных расслоений $\widetilde{\alpha}_\omega : T^*M \to TM$, причем $\widetilde{\alpha}_\omega\alpha_\omega = \mathrm{Pf}_\mu(\omega)\,\mathrm{Id}_{TM}$.

Пусть $\xi \in \mathcal{I}\cdot\Omega^1(M)$, т. е. $\xi = \mathrm{Pf}_\mu(\omega)\eta$, где $\eta \in \Omega^1(M)$. Положим $V = \widetilde{\alpha}_\omega\eta \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда

$$\alpha_\omega(V) = \alpha_\omega\widetilde{\alpha}_\omega(\eta) = \mathrm{Pf}_\mu(\omega)\eta = \xi.$$

Таким образом, если сечение ξ векторного расслоения T^*M обращается в нуль на Σ, то существует векторное поле V на M такое, что $\alpha_\omega(V) = \xi$.

Пусть теперь ξ есть некоторое ковекторное поле на M, обращающееся в нуль на аннуляторе ω. Так как ω есть симплектическая форма с особенностями Мартине, морфизм векторных расслоений $\alpha_\omega : TM|_\Sigma \to T^*M|_\Sigma$ имеет постоянный ранг 2, и его образ состоит из сечений расслоения $T^*M|_\Sigma$, обращающихся в нуль на аннуляторе ω. Поэтому $\xi|_\Sigma = \alpha_\omega(\widetilde{V})$, где $\widetilde{V}$ есть сечение расслоения $TM|_\Sigma$. Теперь продолжим $\widetilde{V}$ до векторного поля V на M (Σ замкнуто в M), тогда $\xi' = \xi - \alpha_\omega(V)$ обращается в нуль на Σ. По доказанному ранее $\xi' = \alpha_\omega(V'')$ для некоторого векторного поля V'' на M, поэтому

$$\xi = \xi' + \alpha_\omega(V'') = \alpha_\omega(V) + \alpha_\omega(V'') = \alpha_\omega(V + V'').$$

Таким образом, мы показали, что для любого $\xi \in \Omega^1(M)$, обращающегося в нуль на аннуляторе формы ω, существует $V \in \mathfrak{X}(M)$ такое, что $\xi = \alpha_\omega(V)$. Так как α_ω есть изоморфизм на всюду плотном множестве точек, получаем, что векторное поле V определено однозначно.

Осталось заметить, что открытое подмногообразие симплектического многообразия с особенностями Мартине само есть симплектическое многообразие с особенностями Мартине. Таким образом, лемма доказана для открытого подмножества $U \subset M$. $\square$

На подмногообразии Σ определено слоение $\mathcal{F}$ с особенностями, регулярные слои которого суть интегральные кривые одномерного распределения на $\Sigma \setminus \Sigma'$, полученного пересечением аннулятора ω с касательными пространствами к Σ, а особым слоем является кривая Σ'. Обозначим через $\mathcal{F}_b$ пучок базовых функций слоения $\mathcal{F}$, т. е. пучок функций, локально постоянных вдоль слоев $\mathcal{F}$.

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ — замкнутое подпространство, и $\mathcal{G}$ — пучок колец на A. Тогда определен пучок $\mathcal{G}^X$ на X, порожденный предпучком: $U \to 0$, если $U \cap A = \emptyset$, и $U \to \mathcal{G}(U \cap A)$ в противном случае (см. [10]).

Пусть $r : C^\infty_M \to (C^\infty_\Sigma)^M$ есть морфизм пучков, порожденный ограничением функций на Σ, т. е. если $U \cap \Sigma = \emptyset$, то $(C^\infty_\Sigma)^M(U) = 0$ и $r_U : C^\infty_M(U) \to (C^\infty_\Sigma)^M(U)$ есть нулевой гомоморфизм. Если $U \cap \Sigma = U' \neq \emptyset$, то $r_U : C^\infty_M(U) \to C^\infty_\Sigma(U')$ есть ограничение функции $f \in C^\infty(U)$ на U'. По определению $\mathcal{I}^2$ есть подпучок пучка C^∞_M, включение $\mathcal{I}^2 \to C^\infty_M$ обозначим через i, также положим $\widetilde{\mathcal{F}}_b = \mathcal{F}_b^M$.

Утверждение. *Имеет место точная последовательность пучков на M*

$$0 \to \mathcal{I}^2 \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{r} \widetilde{\mathcal{F}}_b \to 0. \tag{6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $f \in \mathcal{I}^2$, то $df = 0$ в точках Σ, поскольку $\mathcal{I}$ есть пучок идеалов функций обращающихся в нуль на Σ. Следовательно, по лемме $df = i_V\omega$, значит, f есть сечение пучка $\mathcal{T}$. Таким образом, $i : \mathcal{I}^2 \to C^\infty_M$ отображает $\mathcal{I}^2$ в $\mathcal{T}$.

Покажем, что морфизм пучков $r : C^\infty_M \to (C^\infty_\Sigma)^M$ отображает подпучок $\mathcal{T}$ пучка C^∞_M в подпучок $\widetilde{\mathcal{F}}_b$ пучка $(C^\infty_\Sigma)^M$. Для этого достаточно показать, что для любой $p \in M$ морфизм пучков r отображает кольцо ростков $\mathcal{T}_p$ в кольцо ростков $(\widetilde{\mathcal{F}}_b)_p$.

Если $p \notin \Sigma$, то требуемое утверждение непосредственно следует из определений. Пусть теперь p лежит в Σ и $\langle f\rangle_p$ лежит в $\mathcal{T}_p$. Так как df обращается в нуль на аннуляторе E формы ω, df равно нулю на $T\Sigma \cap E$, следовательно, функция f постоянна вдоль любого неособого слоя слоения $\mathcal{F}$ на Σ. Таким образом, если $p \notin \Sigma'$, то $\langle f\rangle_p$ есть росток базовой функции слоения $\mathcal{F}$, т. е. $\langle f\rangle_p \in \widetilde{\mathcal{F}}_b$.

Пусть $p \in \Sigma'$. Тогда в окрестности точки p можно взять систему координат, в которой форма ω имеет вид (1) или (2), а точка p имеет нулевые координаты. Рассмотрим эллиптический случай (1). В этой системе координат Σ задается уравнением $x^1 = 0$, а Σ' уравнением $x^1 = x^3 = x^4 = 0$. Далее, аннулятор E натянут на векторы

$$V_1 = x^3\partial_1 + \partial_3, \quad V_2 = x^4\partial_1 - x^3\partial_2 + \partial_4, \tag{7}$$

а слоение $\mathcal{F}$ порождено векторным полем

$$W = -(x^3)^2\partial_2 - x^4\partial_3 + x^3\partial_4.$$

Из условия $df|_E = 0$ следует, что при $x^1 = 0$

$$\begin{aligned} x^3\partial_1 f(0,x^2,x^3,x^4) + \partial_3 f(0,x^2,x^3,x^4) = 0,\\ x^4\partial_1 f(0,x^2,x^3,x^4) - x^3\partial_2 f(0,x^2,x^3,x^4) + \partial_4 f(0,x^2,x^3,x^4) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Дифференцируя первое уравнение из (8) по x^4, а второе по x^3 и используя равенство $\partial_{34} f(0,x^2,x^3,x^4) = \partial_{43} f(0,x^2,x^3,x^4)$, получаем

$$x^3\partial_{14} f(0,x^2,x^3,x^4) = x^4\partial_{13} f(0,x^2,x^3,x^4) - \partial_2 f(0,x^2,x^3,x^4) - x^3\partial_{23} f(0,x^2,x^3,x^4).$$

Подставляя в последнее соотношение $x^3 = 0$, $x^4 = 0$, получим $\partial_2 f(0,x^2,0,0) = 0$, следовательно, функция f постоянна вдоль особого слоя. Таким образом, $\langle f\rangle_p \in \widetilde{\mathcal{F}}_b$.

Гиперболический случай разбирается аналогично. Подмногообразия Σ и Σ' задаются теми же уравнениями, а аннулятор E натянут на векторные поля

$$V_1 = x^3\partial_1 + \partial_3, \quad V_2 = -x^4\partial_1 - x^3\partial_2 + \partial_4. \tag{9}$$

Имеем систему, аналогичную (8), и такими же рассуждениями получаем, что f постоянна вдоль особого слоя. Таким образом, и в этом случае $\langle f\rangle_p \in \widetilde{\mathcal{F}}_b$.

Перейдем к доказательству точности последовательности (6). Нам надо доказать, что для любой точки $p \in M$ последовательность

$$0 \to (\mathcal{I}^2)_p \xrightarrow{i_p} \mathcal{T}_p \xrightarrow{r_p} (\widetilde{\mathcal{F}}_b)_p \to 0 \tag{10}$$

точна. Прежде всего заметим, что для любой $p \notin \Sigma$ эта последовательность точна, т. к. $(\mathcal{I}^2)_p = (C^\infty_M)_p$, $\mathcal{T}_p = (C^\infty_M)_p$, $(\widetilde{\mathcal{F}}_b)_p = 0$, и i_p есть тождественное отображение.

Далее, для любой точки p точность последовательности (10) в члене $(\mathcal{I}^2)_p$ следует из определений. Следовательно, надо доказать ее точность в оставшихся двух членах. Зафиксируем некоторую форму объема и для краткости обозначим $\mathrm{Pf}_\mu(\omega)$ через λ. Заметим, что $d\lambda \neq 0$ в точках Σ.

Точность в члене $\mathcal{T}_p$. Из определений немедленно следует, что $r_p i_p = 0$. Теперь, пусть $\langle f\rangle_p \in \mathcal{T}_p$ и $r_p(\langle f\rangle_p) = 0$. Тогда $\langle f\rangle_p \in \mathcal{I}_p$, следовательно, в некоторой окрестности U точки p имеет место $f = \lambda g$, где $g \in C^\infty(U)$. Тогда на $U' = U \cap \Sigma$ имеем $df = g d\lambda$. Так как $f \in \mathcal{T}(U)$, то $df|_E = 0$. Но в плотном подмножестве точек $U'' = U' \setminus (U \cap \Sigma')$ множества U' аннулятор E трансверсален $T\Sigma$, следовательно, $g|_{U''} = 0$, т. к. $d\lambda \neq 0$. Значит, $g|_{U'} = 0$, следовательно, $g = h\lambda$, откуда $f = g\lambda = h\lambda^2$. Таким образом, $\langle f\rangle_p \in (\mathcal{T}^2)_p$.

Точность в члене $(\widetilde{\mathcal{F}}_b)_p$. Покажем, что для любой точки p в Σ и любого $\langle f\rangle_p \in (\widetilde{\mathcal{F}}_b)_p$ существует $\langle \widehat{f}\rangle_p \in \mathcal{T}_p$ такой, что $r_p(\langle \widehat{f}\rangle_p) = \langle r(\widehat{f})\rangle_p = \langle f\rangle_p$.

Пусть $p \in \Sigma\setminus\Sigma'$. Тогда можно выбрать представителя f ростка $\langle f\rangle_p \in (\widetilde{\mathcal{F}}_b)_p$, определенного на открытом множестве $U' = U\cap\Sigma$, не пересекающем Σ'. Следовательно, на U' аннулятор E формы ω трансверсален $T\Sigma$, и пусть $l = E \cap T\Sigma$ — одномерное распределение, задающее ограничение слоения $\mathcal{F}$ на U'. Выберем поле репера W_1, W_2 расслоения E над U так, чтобы $W_1(q) \in l(q)$ и $d\lambda(W_2(q)) = 1$ для любого $q \in U'$.

Пусть $\widetilde{f}$ есть некоторое продолжение f на U, и пусть $g = d\widetilde{f}(W_2) : U' \to \mathbb{R}$. Обозначим через $\widetilde{g}$ некоторое продолжение g на U и рассмотрим функцию $\widehat{f} = \widetilde{f} - \widetilde{g}\lambda$ на U. Так как $\lambda(q) = 0$ для любой $q \in U'$, то $r(\widehat{f}) = f$. Далее, в точках U' имеем $d\widehat{f} = df + g d\lambda$. Следовательно, $d\widehat{f}(W_1) = 0$, т. к. f — базовая функция слоения $\mathcal{F}$ и $d\lambda(W_1) = 0$, и $d\widehat{f}(W_2) = d\widetilde{f}(W_2) - g d\lambda(W_2) = 0$ в силу выбора W_2 и определения функции g. Таким образом, $d\widehat{f}$ обращается в нуль на E, следовательно, $\widehat{f} \in \mathcal{T}(U)$.

Теперь докажем точность в точках $p \in \Sigma'$. Вначале рассмотрим эллиптический случай. Найдем вид базовых функций слоения $\mathcal{F}$ в канонической системе координат (1), заданной в окрестности U' точки p. Перейдем к цилиндрической системе координат на $U' \setminus (U' \cap \Sigma')$: $x^2 = u$,

$x^3 = \rho\cos\varphi$, $x^4 = \rho\sin\varphi$. Тогда распределение l натянуто на векторное поле $W = \partial_\varphi - \rho^2\cos^2\varphi\,\partial_2$ и из условия $Wf = 0$ получаем, что при $\rho > 0$

$$f(x^2, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = F(x^2 + \tfrac{1}{2}\rho^2(\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi)) + G(\rho),$$

где $F(p)$ — гладкая функция, $G(\rho)$ — гладкая функция, определенная при $\rho > 0$. Подставив в это равенство $\varphi = 0$, получим

$$f(x^2, \rho, 0) = F(x^2) + G(\rho).$$

Отсюда $\partial_2 f(x^2, \rho, 0) = F'(x^2)$. Это равенство имеет место при $\rho > 0$, но $\partial_2 f(x^2, \rho, 0) \to 0$ при $\rho \to 0$, т. к. $\partial_2 f(x^2, 0, 0) = 0$ по определению базовой функции. Таким образом, $F(x^2)$ постоянна и

$$f(x^2, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = G(\rho) + C,$$

где C — постоянная. В силу гладкости $f(x^2, x^3, x^4)$ отсюда следует $f(x^2, x^3, x^4) = g((x^3)^2 + (x^4)^2) + C$ для некоторой гладкой функции $g(u)$. Положим

$$\widehat{f}(x^1, x^2, x^3, x^4) = C + g((x^3)^2 + (x^4)^2) - 2x^1 g'((x^3)^2 + (x^4)^2).$$

Тогда при $x^1 = 0$ имеем $d\widehat{f} = 2g'((x^3)^2 + (x^4)^2)\theta$, где $\theta = dx^1 + x^3dx^3 + x^4dx^4$. Поэтому $d\widehat{f}$ обращается в нуль на векторных полях (7), задающих базис E, следовательно, по лемме $\widehat{f}$ лежит в $\mathcal{T}(U)$. Наконец, ясно, что $r(\widehat{f}) = f$, что доказывает сюръективность r_p. Таким образом, в эллиптическом случае точность в члене $(\widetilde{\mathcal{F}}_b)_p$ для точек $p \in \Sigma'$ доказана.

Гиперболический случай рассматривается аналогично. Вначале находим вид базовых функций слоения $\mathcal{F}$ в канонической системе координат (2), заданной в окрестности U' точки p, для чего переходим к гиперболической цилиндрической системе координат на $U' \setminus (U' \cap \Sigma')$: $x^2 = u$, $x^3 = \rho\,\mathrm{ch}\,\varphi$, $x^4 = \rho\,\mathrm{sh}\,\varphi$. Получаем, что для базовой функции f при $\rho > 0$ имеет место равенство

$$f(x^2, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = F(x^2 + \tfrac{1}{2}\rho^2(\varphi + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2\varphi)) + G(\rho),$$

где $F(p)$ — гладкая функция, $G(\rho)$ — гладкая функция, определенная при $\rho > 0$. Далее, рассуждая аналогично эллиптическому случаю, получаем $f(x^2, x^3, x^4) = g((x^3)^2 - (x^4)^2) + C$. Положим

$$\widehat{f}(x^1, x^2, x^3, x^4) = C + g((x^3)^2 - (x^4)^2) - 2x^1 g'((x^3)^2 - (x^4)^2).$$

Ясно, что $d\widehat{f}$ обращается в нуль на векторных полях (9), задающих базис E, следовательно, по лемме $\widehat{f}$ лежит в $\mathcal{T}(U)$. Кроме того, $r(\widehat{f}) = f$, таким образом, r_p сюръективно. Итак, и в гиперболическом случае точность в члене $(\widetilde{\mathcal{F}}_b)_p$ для точек $p \in \Sigma'$ доказана. $\square$

Следствие 1. Для симплектического многообразия с особенностями Мартине имеет место изоморфизм групп когомологий

$$H^q(M; \mathcal{T}) \cong H^q(\Sigma; \mathcal{F}_b), \quad q > 0,$$

где $\mathcal{T}$ — пучок локальных гамильтонианов на M, $\mathcal{F}_b$ — пучок базовых функций слоения с особенностями, индуцированного на особом подмногообразии Σ аннулятором формы ω.

Доказательство. Заметим, что пучок $\mathcal{I}^2$ тонкий, имеем $H^q(M, \mathcal{I}^2) \cong 0$, $q > 0$. В силу предложения имеет место точная последовательность

$$\cdots \to \check{H}^q(M; \mathcal{I}^2) \xrightarrow{i} \check{H}^q(M; \mathcal{T}) \xrightarrow{r} \check{H}^q(M; \widetilde{F}_b) \to \check{H}^{q+1}(M; \mathcal{I}^2) \to \cdots$$

откуда $H^q(M; \mathcal{T}) \cong H^q(M; \widetilde{\mathcal{F}}_b)$, $q > 0$. Так как $\widetilde{\mathcal{F}}_b = (\mathcal{F}_b)^X$, получаем $H^q(M; \widetilde{\mathcal{F}}_b) \cong H^q(\Sigma, \mathcal{F}_b)$ ([10], теорема 10.1б, с. 59), что доказывает следствие. $\square$

Следствие 2. Для симплектического многообразия с особенностями Мартине такого, что $\Sigma' = \emptyset$, имеет место изоморфизм групп когомологий

$$H^q(M; \mathfrak{X}_h) \cong H^{q+1}_{DR}(M), \quad q > 2,$$

где $\mathfrak{X}_h$ — пучок гамильтоновых векторных полей на M, $H^k_{DR}(M)$ — когомологии де Рама многообразия M.

Доказательство. Если $\Sigma' = \emptyset$, то одномерное слоение $\mathcal{F}$ не имеет особенностей. Тогда для пучка базовых функций $\mathcal{F}_b$ есть тонкая резольвента

$$0 \to \mathcal{F}_b \to \Omega^0_{\mathcal{F}} \to \Omega^1_{\mathcal{F}} \to 0,$$

где $\Omega^k_{\mathcal{F}}$ — пучки форм на $T\mathcal{F}$ [11]. Следовательно, $H^q(M; \mathcal{T}) \cong H^q(M; \mathcal{F}_b) \cong 0$ при $q > 1$. Теперь наше утверждение вытекает из существования точной последовательности (4). $\square$

Следствие 3. Если слоение $\mathcal{F}$ есть расслоение, то $H^q(M; \mathfrak{X}_\Gamma) \cong H^{q+1}_{DR}(M)$ при $q > 0$. В частности, если $H^2_{DR}(M) \cong 0$, то ω инфинитезимально жесткая.

Доказательство. Если $\mathcal{F}$ есть расслоение, то $H^q(M; \mathcal{T}) \cong H^q(M; \mathcal{F}_b) \cong 0$ при $q > 0$. Требуемое утверждение вытекает из существования точной последовательности (4). $\square$

Пример. Пусть $(\widehat{M}, \widehat{\omega})$ — симплектическое многообразие, M — многообразие той же размерности что и $\widehat{M}$, и $\pi : M \to \widehat{M}$ — гладкое отображение. Пусть $\omega = \pi^*\omega$. Тогда ω — замкнутая 2-форма на M и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\alpha_\omega} & T^*M \\ {\scriptstyle d\pi}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle d\pi^*} \\ T\widehat{M} & \xrightarrow{\alpha_{\widehat{\omega}}} & T^*\widehat{M}. \end{array}$$

Из нее следует

$$\mathrm{Ann}(\omega) = \ker \alpha_\omega = d\pi^{-1}(\alpha^{-1}_{\widehat{\omega}} \ker d\pi^*). \tag{11}$$

Пусть теперь $\widehat{M}$ есть $\mathbb{R}^4$ (с координатами y^α, $\alpha = \overline{1,4}$), наделенное стандартной симплектической структурой

$$\widehat{\omega} = dy^1 \wedge dy^2 + dy^3 \wedge dy^4,$$

$M = \mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$ — стандартная сфера с уравнением $\sum\limits_{i=1}^{5} (x^i)^2 = 1$ и $\pi : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{R}^4$ есть ограничение проекции $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $y^\alpha = x^\alpha$, $\alpha = \overline{1,4}$.

Пусть Π есть гиперплоскость в $\mathbb{R}^5$ с уравнением $x^5 = 0$ и $\mathbb{S}^3_0 = \mathbb{S}^4 \cap \Pi$ — экватор сферы $\mathbb{S}^4$. Ясно, что $d\pi_p : T_p\mathbb{S}^4 \to T_p\mathbb{R}^4$ есть изоморфизм для любой $p \in \mathbb{S}^4 \setminus \mathbb{S}^3_0$, поэтому ω невырождена на $\mathbb{S}^4 \setminus \mathbb{S}^3_0$. Далее, вычисление в координатах с использованием (11) показывает, что в точках $\mathbb{S}^3_0$ $\mathrm{Ann}(\omega)$ натянут на векторные поля ∂_5 и $-x^2\partial_1 + x^1\partial_2 - x^4\partial_3 + x^3\partial_4$. Следовательно, $\mathrm{Ann}(\omega) \pitchfork \mathbb{S}^3_0$ и одномерное слоение $\mathcal{F}$, соответствующее распределению $\mathrm{Ann}(\omega) \cap T\mathbb{S}^3_0$ на $\mathbb{S}^3_0$, есть расслоение Хопфа. Поэтому ω есть симплектическая структура с особенностями Мартине типа I, и выполнены условия следствия 3. Значит, структура ω является жесткой.

Литература

1. Малахальцев М.А. *Инфинитезимальные деформации симплектической структуры с особенностями* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 11. – С. 42–50.
2. Martinet J. *Sur les singularités des formes différentielles* // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1970. – V. 20. – № 1. – P. 95–178.
3. Martinet J. *Singularities of smooth functions and maps* // London Math. Soc. Lecture Note Ser. –1982. – № 58. – 256 p.
4. Roussarie R. *Modèles locaux de champs et de formes* // Astérisque. – 1975. – № 30. – 181 p.
5. Golubitsky M., Tischler D. *An example of moduli for singular symplectic forms* // Invent. Math. – 1977. – V. 38. – № 3. – P. 219–225.
6. Cannas da Silva A., Guillemin V., Woodwart C. *On the unfolding of folded symplectic structures* // Math. Res. Lett. – 2000. – V. 7. – № 1. – P. 35–53.
7. Cannas da Silva A. *Fold-forms for four-folds* // Preprint. – 2003. – 16 p.
8. Domitrz W. *Non-local invariants of Martinet's singular symplectic structure* // Banach Center Publ. – 2002. – V. 60. – P. 122–143.
9. Фоменко А.Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения.* – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 414 с.
10. Бредон Г. *Теория пучков.* – М.: Наука, 1988. – 312 с.
11. Vaisman I. *d_f-cohomologies of Lagrangian foliations* // Manatschefte für Mat. – 1988 – V. 106. – P. 221–244.

Казанский государственный университет

Поступила 20.09.2004