ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 517.544

И.А. БИКЧАНТАЕВ

ЗАДАЧА РИМАНА НА УЛЬТРАГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работах [1], [2] было получено в квадратурах решение краевой задачи Римана на компактной римановой поверхности. В работах [3] и [4] на некомпактной римановой поверхности была построена ее нётерова теория и вычислены дефектные числа. На произвольной открытой римановой поверхности эта задача была решена в явном виде лишь в случаях, когда коэффициент задачи равен 1 [3] или -1 [5]. В данной работе получены условия разрешимости и дано явное решение краевой задачи Римана на ультрагиперэллиптической поверхности R в случае произвольного кусочно-гладкого контура Γ. При этом решение (в общем случае) выражается через интегралы, ядрами которых служат аналоги ядра Коши на некоторой вспомогательной гиперэллиптической поверхности. В том случае, когда контур Γ не разбивает поверхность R, оказалось, что можно обойтись более элементарными средствами, чем при решении задачи Римана на компактной поверхности (в частности, гиперэллиптической). А именно, не используется проблема обращения Якоби (или какой-либо ее аналог), вместо аналогов ядра Коши на римановой поверхности используется обычное ядро Коши на комплексной плоскости. Отметим, что на такой поверхности условие Λ_0-поведения искомой функции (которое использовалось в [3]–[5]) означает ее ограниченность в окрестности идеальной границы.

1. Предварительные сведения и обозначения

Пусть (R,z) есть безграничная двулистная накрывающая комплексной плоскости $\mathbb{C}$, точки ветвления которой сгущаются к единственной точке идеальной границы, лежащей над $z=\infty$. Накрывающая (R,z) может быть реализована как риманова поверхность функции $u(z)$, определяемой уравнением $u^2=P(z)$, где $P(z)$ — целая функция с бесконечным числом простых нулей. Риманова поверхность R, допускающая такую реализацию, называется ультрагиперэллиптической. Через j_R обозначим отличное от тождественного преобразование наложения накрывающей (R,z), т.е. конформный автоморфизм поверхности R, удовлетворяющий соотношению $z(j_R(q))=z(q)$ для всех $q\in R$. Пусть Γ — кусочно-гладкая линия на R и $\zeta(q)$ — голоморфная функция в окрестности Γ такая, что $d\zeta$ не имеет нулей на Γ. Тогда ζ является локальной униформизирующей в окрестности любой точки $\tau\in\Gamma$. Если Γ не содержит точек ветвления накрывающей (R,z), то можно взять $\zeta=z$. Если $\tau\in\Gamma$ — точка ветвления, то в ее окрестности z и ζ связаны соотношением вида $z-z(\tau)=(\zeta-\zeta(\tau))^2a(\zeta)$, где $a(\zeta)$ — функция, голоморфная в точке $\zeta=\zeta(\tau)$ и $a(\zeta(\tau))\neq 0$.

Пусть $\alpha:[0,1]\to R$ — путь на R. Его длиной назовем длину плоского пути $z\circ\alpha:[0,1]\to\mathbb{C}$, т.е. $\int\limits_0^1|\mathrm{d}(z\circ\alpha)|$. Расстоянием $\rho(p,q)$ между точками p и q на R назовем точную нижнюю грань длин всех путей, соединяющих p и q. Используя локальную однолистность функции $\zeta(q)$, нетрудно показать, что найдется число $\epsilon>0$ такое, что из неравенств $\rho(t_1,t_2)\le\epsilon$, $t_1\neq t_2$ вытекает неравенство $\zeta(t_1)\neq\zeta(t_2)$, $t_1,t_2\in\Gamma$.

Обозначим через T множество всех узлов контура Γ. На T определим действительнозначную функцию $\lambda=\lambda(\tau)$. По аналогии с [6] введем пространство $H_{\mu,\lambda}(\Gamma,T)$, состоящее из функций на Γ,

H_μ-непрерывных вне любой окрестности множества T и ведущих себя вблизи T как весовая функция

$$\rho_\lambda(t) = \prod_{\tau\in T} |\zeta(t) - \zeta(\tau)|^{\lambda(\tau)}.$$

Пространство $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$ банахово относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mu,\lambda} = \sup_{t\in\Gamma} |\varphi(t)\rho_{-\lambda}(t)| + \{\rho_{\mu-\lambda}\varphi\}_\mu,$$

где

$$\{\varphi\}_\mu = \sup_{t_1,t_2\in\Gamma,\ \rho(t_1,t_2)<\epsilon,\ t_1\neq t_2} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|\zeta(t_1) - \zeta(t_2)|^\mu}.$$

Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы множества

$$\Gamma_\tau = \Gamma \cap \{q \in R : 0 < \rho(q,\tau) \le \delta\}, \quad \tau \in T,$$

попарно не пересекались и распадались на компоненты $\Gamma_{\tau,i}$, $1 \le i \le n_\tau$, $\tau \in T$. Введем класс $H_{\mu,(\lambda)}(\Gamma, T)$ функций $\varphi(t)$, которые H_μ-непрерывны на Γ вне любой окрестности множества T и на каждом Γ_τ, $\tau \in T$, представимы в виде

$$\varphi(t) = p_{\tau,i}(t) + \varphi_\tau(t), \quad t \in \Gamma_{\tau,i},$$

где $p_{\tau,i}$ — многочлен степени меньше, чем $\lambda(\tau)$ (многочлен отрицательной степени условимся считать нулем), $\varphi_\tau \in H_{\mu,\lambda(\tau)}(\Gamma_\tau, \tau)$. Пространство $H_{\mu,(\lambda)}(\Gamma, T)$ банахово относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mu,(\lambda)} = \sum_{\tau\in T}\left(\sum_{i=1}^{n_\tau} \sup_{\Gamma_\tau} |p_{\tau,i}| + \|\varphi_\tau\|_{H_{\mu,\lambda(\tau)}(\Gamma_\tau,\tau)}\right) + \|\varphi\|_{H_\mu(\Gamma')},$$

где $\Gamma' = \Gamma \cap \{q : \rho(q,T) \ge \delta/2\}$, $\rho(q,T) = \min_{\tau\in T}\rho(q,\tau)$ (ср. [6]).

2. Случай неразбивающего контура

1. Пусть Γ — кусочно-гладкий контур на R такой, что множество $R \setminus \Gamma$ связно. Будем предполагать, что $z(\Gamma)$ тоже есть кусочно-гладкий контур на $\mathbb{C}$, причем Γ и $z(\Gamma)$ не имеют точек возврата. Ориентацию на Γ выберем так, чтобы на линейных участках контура, имеющих одинаковые проекции на z-плоскость $\mathbb{C}$, ориентация контура была согласована относительно преобразования наложения j. Тогда ориентацию $z(\Gamma)$ можно определить как индуцированную отображением $z : \Gamma \to z(\Gamma)$.

Зададим дивизор D, носитель которого лежит в $R \setminus \Gamma$, и функции $G \in H_{\mu,(\mu)}(\Gamma, T)$ и $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, причем $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Рассмотрим краевую задачу Римана в следующей постановке.

Найти кусочно-мероморфную функцию F на R с линией скачков Γ, кратную дивизору $1/D$ и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности R, предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, и удовлетворяют соотношению

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

2. Через $q(z)$ будем обозначать точку на R такую, что $z(q(z)) = z$ (поднятие точки $z \in \mathbb{C}$ на накрывающую (R, z)). Если F — решение задачи (1), то функция $(F(j(q(z))) - F(q(z)))^2$ голоморфно продолжима в точку $z = \infty$, являющуюся точкой сгущения ее нулей. Следовательно, $F \circ j = F$ (ср. [7]) и функция $f(z) = F(q(z))$ однозначна в $\mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$ и аналитически продолжима в $\mathbb{C} \setminus \gamma$, где γ есть множество точек на $z(\Gamma)$, имеющих два прообраза при отображении $z : \Gamma \to z(\Gamma)$ (точки ветвления накрывающей (R, z) при этом считаются дважды).

3. Множество M на римановой поверхности или на плоскости называется AB-устранимым, если для некоторой окрестности U множества M любая аналитическая и ограниченная в $U \setminus M$ функция аналитически продолжима в U. Определим в $\mathbb{C}$ дивизор Δ, полагая $\mathrm{ord}_{z(q)}\Delta =$

$\min(\operatorname{ord}_q D,\ \operatorname{ord}_{j(q)} D)$ при $j(q) \neq q$ и $\operatorname{ord}_{z(q)} \Delta = [\frac{1}{2} \operatorname{ord}_q D]$ при $j(q) = q$, где $[\ ]$ означает целую часть числа. Если множество γ является AB-устранимым, то функция f аналитически продолжима на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и является рациональной функцией, кратной дивизору $1/\Delta$. Из условия (1) вытекает, что в случае разрешимости задачи Римана функции G и g удовлетворяют соотношению

$$g(t) = (1 - G(t)) f(z(t)), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

где f — рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. Если это соотношение выполняется, то функция $F(q) = f(z(q))$ является решением краевой задачи Римана (1). Отсюда вытекает

Теорема 1. *Пусть γ — AB-устранимое множество. Тогда для разрешимости краевой задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно, чтобы функции G и g были связаны соотношением* (2), *где f — рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$.*

Следствие 1. При $\operatorname{ord} \Delta < 0$ задача (1) имеет решение (равное нулю) только при $g = 0$.

Следствие 2. Если $G = 1$, то для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы $g = 0$. При этом любое решение задачи (1) имеет вид $F(q) = f(z(q))$, где f — рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. Число линейно независимых решений равно $\max(0,\ \operatorname{ord} \Delta + 1)$.

Следствие 3. Если $G(t) \not\equiv 1$, то задача (1) не может иметь более одного решения.

Действительно, при $g = 0$ условие (2) может выполняться только при $f = 0$. Поэтому соответствующая однородная задача (1) имеет лишь нулевое решение.

4. Предположим теперь, что множество γ не является AB-устранимым; при этом его линейная мера будет положительной. Обозначим через Γ_1 кривую на R, гомеоморфную $z(\Gamma)$ относительно отображения $z : \Gamma_1 \to z(\Gamma)$. Тогда $\Gamma_2 := j(\Gamma_1)$ тоже гомеоморфна $z(\Gamma)$ относительно отображения z и $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = z^{-1}(z(\Gamma))$. Через $\rho_k : z(\Gamma) \to \Gamma_k$, $k = 1,\ 2$, обозначим гомеоморфизм $z(\Gamma)$ на Γ_k такой, что $z(\rho_k(\xi)) = \xi$ при $\xi \in z(\Gamma)$. Ориентацию на Γ_k выберем таким образом, чтобы индуцированная ею при проектировании $z : R \to \mathbb{C}$ ориентация на $z(\Gamma)$ совпадала с уже выбранной в п. 1.

Доопределим G и g на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, полагая $G = 1, g = 0$ в точках, не принадлежащих Γ. Тогда функция f на $z(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$f^+(\xi) = G(\rho_k(\xi)) f^-(\xi) + g(\rho_k(\xi)), \quad \xi \in z(\Gamma), \quad \Delta^{-1} | (f), \quad k = 1,\ 2. \tag{3_k}$$

Здесь функции $G(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,(\mu')}(z(\Gamma), z(T))$, где

$$\mu'(z(\tau)) = \begin{cases} \mu, & \tau \in T,\ \ j(\tau) \neq \tau; \\ \frac{1}{2}\mu, & \tau \in T,\ \ j(\tau) = \tau. \end{cases}$$

Функции $g(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$, где

$$\nu(z(\tau)) = \begin{cases} \min(\lambda(\tau), \lambda(j(\tau))), & \tau, j(\tau) \in T,\ \ j(\tau) \neq \tau; \\ \lambda(\tau), & \tau \in T,\ \ j(\tau) \notin T; \\ \frac{1}{2}\lambda(\tau), & j(\tau) = \tau \in T. \end{cases}$$

Решение задачи (3_k) будем отыскивать в классе функций, предельные значения которых на $z(\Gamma)$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$.

Таким образом, функция f является одновременно решением двух краевых задач Римана на контуре $z(\Gamma)$. Из связности $R \setminus \Gamma$ следует связность множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$. В точки множества $z(\Gamma) \setminus \gamma$ функция f аналитически продолжима и, следовательно, является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \gamma$ за исключением, возможно, конечного числа полюсов. Поэтому для совпадения решений краевых задач (3_1) и (3_2) достаточно потребовать их совпадения в окрестности некоторой точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$.

5. Если $G \circ j = G$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то, поскольку $F \circ j = F$, для разрешимости задачи (1) необходимо, чтобы $g \circ j = g$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда задачи (3_1) и (3_2) совпадают. Если f — решение задачи (3_k), то $F(q) = f(z(q))$ будет решением задачи (1).

Обозначим через $X(z)$ каноническую функцию задачи (3_k), предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$ и которая имеет максимально возможный порядок κ на бесконечности. Тогда при $\kappa + \operatorname{ord}\Delta \geq -1$ задача (3_k) разрешима при любой функции $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, и ее общее решение имеет вид

$$f(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))d\xi}{X^+(\xi)(\xi - z)} + X(z)\delta(z), \tag{4}$$

где δ — произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\kappa}$.

При $\kappa + \operatorname{ord}\Delta < -1$ необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (3_k), а следовательно, и задачи (1) имеют вид

$$\int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))\omega_j(\xi)d\xi}{X^+(\xi)} = 0, \quad j = 1, \ldots, -\kappa - \operatorname{ord}\Delta - 1, \tag{5}$$

где ω_j — базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\kappa+2}$. При выполнении условий (5) задача (3_k) имеет единственное решение вида (4), где $\delta = 0$.

Условия (5) можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma\cap\Gamma_k} g\theta_j = 0, \quad j = 1, \ldots, -\kappa - \operatorname{ord}\Delta - 1, \tag{6}$$

где $\theta_j(t) = (X^+(z(t)))^{-1}\omega_j(z(t))dz(t)$. Общее решение задачи (1) имеет вид

$$F(q) = \frac{X(z(q))}{2\pi i} \int_{\Gamma\cap\Gamma_k} \frac{g(t)dz(t)}{X^+(z(t))(z(t) - z(q))} + X(z(q))\delta(z(q)). \tag{7}$$

В формулах (6) и (7) k может принимать любое из значений 1 или 2. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть γ имеет положительную линейную меру и коэффициент G задачи* (1) *удовлетворяет соотношению $G \circ j = G$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда для разрешимости задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы функция g удовлетворяла условиям $g \circ j = g$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и* (6)*. При их выполнении общее решение задачи* (1) *имеет вид* (7)*, где δ — произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\kappa}$. Однородная* ($g = 0$) *задача* (1) *имеет $l = \max(0,\ \operatorname{ord}\Delta + \kappa + 1)$ линейно независимых решений.*

6. Пусть γ такое же, как в предыдущем пункте. Здесь будем предполагать, что $G \circ j \neq G$. Ясно, что при этом однородная ($g = 0$) задача Римана (1) имеет лишь нулевое решение, а неоднородная может иметь не более одного решения. В рассматриваемом случае функция f является решением одновременно двух различных краевых задач Римана (3_1) и (3_2). Обозначим через $X_k(z)$ каноническую функцию (того же класса, что и в п. 5) задачи (3_k), $\kappa_k = \operatorname{ord}_\infty X_k(z)$. При $\kappa_k + \operatorname{ord}\Delta \geq -1$ задача (3_k) безусловно разрешима, и ее общее решение имеет вид

$$f_k(z) = \frac{X_k(z)}{2\pi i} \int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))d\xi}{X_k^+(\xi)(\xi - z)} + X_k(z)\delta_k(z), \tag{8}$$

где $\delta_k(z)$ — произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\kappa_k}$. При $\kappa_k + \operatorname{ord}\Delta < -1$ для разрешимости задачи (3_k) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))}{X_k^+(\xi)}\omega_{kj}(\xi)d\xi = 0, \quad j = 1, \ldots, -\kappa_k - \operatorname{ord}\Delta - 1, \tag{9}$$

где ω_{kj} — базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\kappa_k+2}$. Полагая

$$\theta_{kj}(t) = \frac{\omega_{kj}(z(t))dz(t)}{X_k^+(z(t))},$$

условие (9) перепишем в виде

$$\int_{\Gamma\cap\Gamma_k} g\theta_{kj} = 0, \quad j = 1, \ldots, -\kappa_k - \operatorname{ord}\Delta - 1, \quad k = 1,\, 2. \tag{10}$$

При выполнении условий (10) задача (3_k) имеет единственное решение вида (8), где $\delta_k = 0$. Для того чтобы функции f_k определяли решение исходной задачи (1), должно выполняться равенство $f_1 = f_2$. В силу сказанного в п. 4 достаточно потребовать выполнения этого равенства в окрестности некоторой точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$.

Пусть z_0 — точка из $\mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$, в которой функции X_k и f_k голоморфны. Используем ряд Тейлора в окрестности точки z_0

$$\frac{X_k(z)}{2\pi i X_k^+(\eta)(\eta - z)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj}(\eta)(z - z_0)^j.$$

Пусть δ_{kj}, $j = 1, \ldots, \kappa_k + \operatorname{ord}\Delta + 1$, — базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\kappa_k}$, $k = 1,\, 2$. Тогда

$$X_k(z)\delta_k(z) = \sum_{n=1}^{\kappa_k+\operatorname{ord}\Delta+1} a_{kn} X_k(z)\delta_{kn}(z),$$

где a_{kn} — комплексные числа. Запишем для функции $X_k\delta_{kn}$ ряд Тейлора

$$X_k(z)\delta_{kn}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{knj}(z - z_0)^j.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций f_1 и f_2, получим соотношения, эквивалентные равенству $f_1 = f_2$,

$$\sum_{n=1}^{\kappa_1+\operatorname{ord}\Delta+1} a_{1n}a_{1nj} - \sum_{n=1}^{\kappa_2+\operatorname{ord}\Delta+1} a_{2n}a_{2nj} = -\int_{z(\Gamma)} (g(\rho_1(\eta))c_{1j}(\eta) - g(\rho_2(\eta))c_{2j}(\eta))d\eta, \ \ j = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Обозначим через A матрицу системы (11) и положим

$$\alpha_j(t) = \begin{cases} -c_{1j}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma\cap\Gamma_1; \\ c_{2j}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma\cap\Gamma_2, \end{cases}$$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t),\ \alpha_2(t), \ldots)^t,$$

$$a = (a_{11}, \ldots, a_{1,\,\kappa_1+\operatorname{ord}\Delta+1},\ a_{21}, \ldots, a_{2,\,\kappa_2+\operatorname{ord}\Delta+1})^t.$$

Тогда система (11) запишется в виде

$$Aa = \int_\Gamma g\alpha. \tag{12}$$

В силу единственности решения задачи Римана (1) ранг r матрицы A должен быть равен числу неизвестных a_{kn}, т. е. $r = \kappa_1 + \kappa_2 + 2\operatorname{ord}\Delta + 2$.

Пусть B — невырожденная квадратная матрица порядка r, составленная из строк матрицы A с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_r$ ($j_1 < j_2 < \cdots < j_r$), B_j — квадратная матрица порядка $r+1$, составленная из $r+1$ строк расширенной матрицы $(A,\ \int_\Gamma g\alpha)$ с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_r, j$. Тогда

$$\det B_j = \int_\Gamma g\beta_j,$$

где

$$\beta_j = \sum_{n=1}^{r} B_{j,j_n}\alpha_{j_n} + B_{j,j}\alpha_j,$$

$B_{j,k}$ — алгебраическое дополнение элемента $\int\limits_\Gamma g\alpha_k$ матрицы B_j; очевидно, $B_{j,j} = \det B \neq 0$. Если j принимает одно из значений $j_1, j_2, \ldots, j_r$, то $\beta_j = 0$. Условия разрешимости системы (11) (или (12)) имеют вид

$$\int_\Gamma g\beta_j = 0, \quad j \in \mathbf{Z},\ \ j \geq 0,\ \ j \neq j_1, j_2, \ldots, j_r. \tag{13}$$

Совокупность условий (10) и (13) необходима и достаточна для разрешимости задачи (1). При их выполнении единственное решение задачи (1) определяется равенством $F(q) = f_k(z(q))$, где функция $f_1 = f_2$ определена формулой (8). Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть γ имеет положительную линейную меру и коэффициент G задачи* (1) *удовлетворяет неравенству $G(j(t)) \not\equiv G(t)$, $t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда для разрешимости задачи Римана* (1) *необходимы и достаточны условия* (10) *и* (13). *При их выполнении задача* (1) *имеет единственное решение, определяемое равенством $F(q) = f_k(z(q))$, где совпадающие между собой функции f_k, $k = 1,\, 2$, определяются равенством* (8).

3. Случай произвольного кусочно-гладкого контура

1. Пусть теперь Γ — произвольный кусочно-гладкий контур на R. Зададим дивизор D, носитель которого лежит в $R \setminus \Gamma$, и функции $G \in H_{\mu,(\mu)}(\Gamma, T)$ и $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, причем $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Рассмотрим краевую задачу Римана в следующей постановке.

Найти кусочно-мероморфную функцию F на R с линией скачков Γ, кратную дивизору $1/D$ и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности R, предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, и удовлетворяют соотношению

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma. \tag{14}$$

2. Обозначим через E относительно компактное открытое множество на R, обладающее следующими свойствами: 1) граница ∂E множества E есть аналитическая жорданова кривая, состоящая из двух компонент, гомеоморфных окружности; 2) ∂E не содержит точек ветвления накрывающей (R, z); 3) $j_R(E) = E$; 4) $\Gamma \subset E$; 5) E содержит четное число точек ветвления накрывающей (R, z); 6) среди множеств, обладающих свойствами 1)–5), E содержит минимальное число точек ветвления накрывающей (R, z).

Обозначим через α_k, $k = 1,\ 2, \ldots, 2h+2$, точки ветвления накрывающей (R, z), лежащие в E. В случае $h = -1$ E состоит из двух односвязных компонент, каждая из которых однолистно и конформно отображается в $\mathbb{C}$ функцией $z : E \to \mathbb{C}$. В случае $h \geq 0$ E есть область рода h.

3. Рассмотрим сначала случай, когда $h \geq 0$. Через (S, z) обозначим двулистную накрывающую замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, определяемую уравнением

$$w^2 = \prod_{k=1}^{2h+2} (z - r_k), \tag{15}$$

где $r_k = z(\alpha_k)$. S есть гиперэллиптическая риманова поверхность рода h. Через E_0 обозначим область на S, являющуюся полным прообразом области $z(E) \subset \mathbb{C}$ относительно отображения $z : S \to \overline{\mathbb{C}}$. Ясно, что E_0 содержит все точки ветвления накрывающей (S, z) и существует конформный гомеоморфизм $\alpha : E_0 \to E$ такой, что $z \circ \alpha = z$ и $\alpha \circ j_S = j_R \circ \alpha$. $S \setminus \overline{E}_0$ состоит из двух односвязных компонент E_1 и E_2. Отображение $z : E_k \to \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1,\, 2$, однолистно и конформно; обратное к нему отображение обозначим через $\rho_k : z(E_k) \to E_k$. Очевидно, $\rho_2 = j_S \circ \rho_1$.

Положим $\Gamma_0 = \alpha^{-1}(\Gamma)$ и определим на Γ_0 ориентацию, индуцированную отображением $\alpha^{-1} : \Gamma \to \Gamma_0$. Пусть F — решение задачи Римана (14). Легко видеть, что $F \circ j_R = F$ в $R \setminus E$. Поэтому на S определена однозначная кусочно-мероморфная функция

$$F_0(q) = \begin{cases} F(\alpha(q)), & q \in E_0; \\ F(p), & z(p) = z(q),\ q \in S \setminus E_0,\ p \in R \setminus E, \end{cases}$$

с линией скачков Γ_0. Определим на S дивизор D_0, полагая

$$\operatorname{ord}_q D_0 = \begin{cases} \operatorname{ord}_{\alpha(q)} D, & q \in E_0; \\ \min(\operatorname{ord}_p D, \operatorname{ord}_{j_R(p)} D), & z(p) = z(q),\ q \in S \setminus E_0,\ p \in R \setminus E,\ j_R(p) \neq p; \\ [\frac{1}{2} \operatorname{ord}_p D], & z(p) = z(q),\ q \in S \setminus E_0,\ p \in R \setminus E,\ j_R(p) = p. \end{cases}$$

Пусть $T_0 = \alpha^{-1}(T)$ и доопределим на T_0 функцию λ, полагая $\lambda|T_0 = \lambda \circ \alpha|T_0$. Функция F_0 мероморфна в $S \setminus \Gamma_0$, кратна дивизору $1/D_0$, а ее предельные значения на Γ_0 принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_0, T_0)$ и удовлетворяют соотношению вида

$$F_0^+(t) = G(\alpha(t))F_0^-(t) + g(\alpha(t)), \quad t \in \Gamma_0. \tag{16}$$

Кроме того, в $S \setminus E_0$ она удовлетворяет соотношению

$$F_0 \circ j_S = F_0. \tag{17}$$

Функции $G \circ \alpha$ и $g \circ \alpha$ принадлежат классам $H_{\mu,(\mu)}(\Gamma_0, T_0)$ и $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_0, T_0)$ соответственно.

Существует взаимнооднозначное соответствие между точками q поверхности S и парами чисел $(z, w) = (z(q), w(z(q)))$, связанными соотношением (15). Точку q обычно отождествляют с парой (z, w). Тогда точке $j_S(q)$ соответствует пара $(z, -w)$. Точке ветвления α_k соответствует пара $(r_k, 0)$.

Выберем на S канонические циклы $\{a_k, b_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, h$, как в [2]. Тогда комплексно нормированный базис пространства абелевых дифференциалов первого рода на S имеет вид [2]

$$\varphi_j(q) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{dz}{w} & \frac{z\,dz}{w} & \cdots & \frac{z^{h-1}dz}{w} \\ -\delta_{j1} & \int\limits_{a_1} \frac{d\tau}{\zeta} & \int\limits_{a_1} \frac{\tau\,d\tau}{\zeta} & \cdots & \int\limits_{a_1} \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\delta_{jh} & \int\limits_{a_h} \frac{d\tau}{\zeta} & \int\limits_{a_h} \frac{\tau\,d\tau}{\zeta} & \cdots & \int\limits_{a_h} \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \int\limits_{a_1} \frac{d\tau}{\zeta} & \int\limits_{a_1} \frac{\tau\,d\tau}{\zeta} & \cdots & \int\limits_{a_1} \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int\limits_{a_h} \frac{d\tau}{\zeta} & \int\limits_{a_h} \frac{\tau\,d\tau}{\zeta} & \cdots & \int\limits_{a_h} \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta} \end{vmatrix}},$$

$$j = 1, 2, \ldots, h, \quad q = (z, w), \quad t = (\tau, \zeta) \in S.$$

Нормированный абелев интеграл третьего рода, служащий разрывным аналогом ядра Коши, имеет вид [2]

$$\omega_{qq_0}(t) = \omega_q(t) - \omega_{q_0}(t),$$

где

$$\omega_q(t)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{(w+\zeta)d\tau}{2\zeta(\tau-z)} & \frac{d\tau}{\zeta} & \frac{\tau d\tau}{\zeta} & \cdots & \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta}\\ \int\limits_{a_1}\frac{(w+\zeta)d\tau}{2\zeta(\tau-z)} & \int\limits_{a_1}\frac{d\tau}{\zeta} & \int\limits_{a_1}\frac{\tau d\tau}{\zeta} & \cdots & \int\limits_{a_1}\frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \int\limits_{a_h}\frac{(w+\zeta)d\tau}{2\zeta(\tau-z)} & \int\limits_{a_h}\frac{d\tau}{\zeta} & \int\limits_{a_h}\frac{\tau d\tau}{\zeta} & \cdots & \int\limits_{a_h}\frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\int\limits_{a_1}\frac{d\tau}{\zeta} & \int\limits_{a_1}\frac{\tau d\tau}{\zeta} & \cdots & \int\limits_{a_1}\frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \int\limits_{a_h}\frac{d\tau}{\zeta} & \int\limits_{a_h}\frac{\tau d\tau}{\zeta} & \cdots & \int\limits_{a_h}\frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta}\end{vmatrix}}.$$

Положим

$$X(q)=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\ln G(\alpha(t))\omega_{qq_0}(t)\right),\quad q\in S.$$

Нули и бесконечности функции $X(q)$ образуют квазидивизор $(X)=\tau_1^{\kappa_1}\tau_2^{\kappa_2}\cdots\tau_r^{\kappa_r}$, где $\tau_k=\alpha^{-1}(t_k)$, $t_k\in T$, — узлы линии Γ_0, κ_k — числа, определяемые коэффициентом G и выбором ветви функции $\ln G(\alpha(t))$ [2]. Положим $\kappa=\sum\limits_{k=1}^{r}[\kappa_k-\lambda(\tau_k)]$, где [ ] означает целую часть числа. Число κ, не зависящее от выбора ветви $\ln G\circ\alpha$, назовем индексом коэффициента задачи (16) в классе $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_0,T_0)$. Положим $A=t_1^{[\kappa_1-\lambda(\tau_1)]}t_2^{[\kappa_2-\lambda(\tau_2)]}\cdots t_r^{[\kappa_r-\lambda(\tau_r)]}$, $B=(q')^hq_1^{-1}\cdots q_h^{-1}$, где $q'\in S$ — произвольно фиксированная точка, не совпадающая с q_0, точки $q_1,q_2,\dots,q_h$ образуют решение проблемы обращения Якоби вида

$$\sum_{j=1}^{h}\int_{q'}^{q_j}\varphi_\nu\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\ln G(\alpha(t))\varphi_\nu(t)\ \ \text{(по модулю периодов)},\quad \nu=1,\ 2,\dots,h.$$

Тогда общее решение однородной ($g=0$) задачи Римана (16) имеет вид

$$f(q)\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\ln G(\alpha(t))\omega_{qq_0}(t)-\sum_{j=1}^{h}\Big(\int_{q'}^{q_j}\omega_{qq_0}-2\pi i m_j\int_{q'}^{q}\varphi_j\Big)\right),\tag{18}$$

где в последних двух интегралах путь интегрирования не пересекает канонических сечений $a_1,a_2,\dots,a_h$, m_j — вполне определенные целые числа, f — произвольная мероморфная функция, кратная дивизору $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$. У функции (по переменной q) ω_{qq_0} выбрана фиксированная в $S\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{h}a_k$ ветвь, исчезающая в точке q_0.

Обозначим через l_0 и l_0' число линейно независимых мероморфных функций и дифференциалов на S, кратных соответственно дивизорам $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$ и D_0AB. Через P обозначим целый дивизор порядка l_0' с носителем в $S\setminus\Gamma_0$ и такой, что не существует абелевых дифференциалов на S, кратных дивизору D_0ABP и отличных от тождественного нуля. Для построения решения неоднородной задачи (16) найдем сначала частное решение этой задачи в классе функций, кратных дивизору $D_0^{-1}P^{-1}$. Такая задача безусловно разрешима в силу выбора дивизора P. Ее частным решением является функция вида [2]

$$\frac{X_0(q)}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)}A_1(t,q),\tag{19}$$

где X_0 — функция вида (18) при $f=1$, $A_1(t,q)$ — мероморфный аналог ядра Коши на S с характеристическим дивизором Δ_1, который получается делением дивизора D_0ABP на некоторый целый дивизор. Функция (19) будет решением задачи (16) в том и только том случае, если g удовлетворяет l_0' условиям, обеспечивающим кратность функции (19) дивизору D^{-1}. Эти условия равносильны условиям разрешимости задачи (16) и имеют вид

$$\int_{\Gamma_0} g \circ \alpha \frac{\psi_j}{X_0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l_0', \tag{20}$$

где ψ_j, $j = 1, 2, \dots, l_0'$, — базис пространства абелевых дифференциалов на S, кратных дивизору $D_0 AB$.

При выполнении условия (20) общее решение задачи (16) имеет вид

$$F_0(q) = f(q) \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t))\omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^{h}\Big(\int_{q'}^{q_j}\omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^{q}\varphi_j\Big)\right) + \\ + \frac{X_0(q)}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)}A_1(t,q), \quad q \in S. \tag{21}$$

Чтобы эта функция определяла решение задачи (14), необходимо и достаточно условия (17).

Обозначим через $f_1, f_2, \dots, f_{l_0}$ базис пространства мероморфных функций на S, кратных дивизору $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$. Тогда функция F_0 может быть записана в виде

$$F_0(q) = X_0(q)\sum_{k=1}^{l_0} c_k f_k(q) + \frac{X_0(q)}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)}A_1(t,q), \tag{22}$$

где c_k — произвольные комплексные числа.

Пусть s есть фиксированная точка в $S \setminus E_0$ такая, что $z(s) \neq \infty$ и функции $X_0(q)$, $f_k(q)$, $A_1(t,q)$ голоморфны по q в точках s и $j_S(s)$. Используем ряды Тейлора

$$X_0(q)f_k(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik}(z(q) - z(s))^i, \quad X_0(j_S(q))f_k(j_S(q)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ik}(z(q) - z(s))^i.$$

Аналогично в окрестности точки $q = s$ имеем

$$\frac{X_0(q)A_1(t,q)}{2\pi i X_0^+(t)} = \sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i(t)(z(q) - z(s))^i, \quad \frac{X_0(j_S(q))A_1(t, j_S(q))}{2\pi i X_0^+(t)} = \sum_{i=0}^{\infty}\delta_i(t)(z(q) - z(s))^i.$$

В силу этих разложений равенство (17) равносильно системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{l_0}(a_{ik} - b_{ik})c_k = -\int_{\Gamma_0} g(\alpha(t))(\gamma_i(t) - \delta_i(t)), \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{23}$$

Полагая $U = a_{ik} - b_{ik}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, l_0$, $\beta_i = -(\gamma_i - \delta_i) \circ \alpha^{-1}$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots)^t$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_{l_0})^t$, перепишем систему (23) в виде

$$Uc = \int_{\Gamma} g\beta. \tag{24}$$

Обозначим через r ранг матрицы U. Пусть V — невырожденная квадратная матрица порядка r, составленная из элементов матрицы U, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_r$), V_i — квадратная матрица порядка $r + 1$, состоящая из элементов расширенной матрицы $(U, \int\limits_{\Gamma} g\beta)$, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r, i$ и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r$, $l_0 + 1$. Тогда $\det V_i = \int\limits_{\Gamma} g\lambda_i$, где

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^{r} V_{i,i_n}\beta_{i_n} + V_{i,i}\beta_i,$$

$V_{i,j}$ — алгебраическое дополнение элемента $\int\limits_\Gamma g\beta_j$ матрицы V_i, $V_{i,i} = \det V$. Условия разрешимости системы (24) имеют вид

$$\int_\Gamma g\lambda_i = 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad i \geq 0, \quad i \neq i_1, i_2, \ldots, i_r. \tag{25}$$

При выполнении условий (25) числа $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_r}$ выражаются линейно через $\int\limits_\Gamma g\beta_i$, $i = i_1, i_2, \ldots, i_r$, т. е. являются ограниченными линейными функционалами в пространстве $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, а остальные числа c_k остаются произвольными.

Условия (20) перепишем в виде

$$\int_\Gamma g\frac{\psi_j \circ \alpha^{-1}}{X_0 \circ \alpha^{-1}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l_0'. \tag{26}$$

Если функция g удовлетворяет условиям (25) и (26), то функция F_0 из соотношения (22) определяет решение F задачи (14) по формуле

$$F(q) = \begin{cases} F_0(\alpha^{-1}(q)), & q \in E; \\ F_0(p), & z(p) = z(q), \ q \in R \setminus E, \ p \in S \setminus E_0. \end{cases} \tag{27}$$

Полученные результаты формулируются как

Теорема 4. *Пусть $h \geq 0$. Тогда для разрешимости задачи Римана* (14) *необходимы и достаточны условия* (25) *и* (26). *При их выполнении решение задачи определяется равенствами* (22) *и* (27), *причем в равенстве* (22) *r из чисел c_k являются линейными ограниченными функционалами от $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, а остальные произвольны. Однородная* ($g = 0$) *задача Римана* (14) *имеет $l_0 - r$ линейно независимых решений.*

4. Рассмотрим теперь случай, когда $h = -1$, т. е. E состоит из двух компонент O_1 и $O_2 = j_R(O_1)$, гомеоморфных открытому кругу, S есть дизъюнктное объединение двух экземпляров замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Положим $\Gamma_k = \Gamma \cap O_k$, $\Gamma_{0k} = z(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$. Тогда задача (16) распадается на две задачи Римана на $\overline{\mathbb{C}}$ с краевыми условиями на контурах Γ_{0k}. Отображение $z : O_k \to \overline{\mathbb{C}}$ однолистно и конформно. Обратное к нему отображение обозначим через ρ_k. Краевые условия соответствующих задач будут иметь вид

$$F_{0k}^+(t) = G(\rho_k(t))F_{0k}^-(t) + g(\rho_k(t)), \quad t \in \Gamma_{0k}, \quad k = 1,\ 2. \tag{28_k}$$

Решение задачи (28_k) ищется в классе кусочно-мероморфных функций, кратных дивизору $1/D_{0k}$, где

$$\operatorname{ord}_{z(q)} D_{0k} = \begin{cases} \operatorname{ord}_q D, & q \in O_k; \\ \min(\operatorname{ord}_q D, \operatorname{ord}_{j_R(q)} D), & q \in R \setminus E, \ j_R(q) \neq q; \\ [\frac{1}{2} \operatorname{ord}_q D], & q \in R \setminus E, \ j_R(q) = q. \end{cases}$$

На Γ_{0k} решение задачи (15_k) должно принадлежать классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_{0k}, T_{0k})$, где $T_{0k} = z(T \cap O_k)$, $k = 1, 2$. Предположим для определенности, что $T \cap O_1 = \{t_1, \ldots, t_m\}$, $T \cap O_2 = \{t_{m+1}, \ldots, t_r\}$. Чтобы функции F_{01} и F_{02} определяли решение задачи (14), они должны удовлетворять условию

$$F_{01}(z) = F_{02}(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus z(E). \tag{29}$$

Положим

$$X_k(z)=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{0k}}\frac{\ln G(\rho_k(\tau))d\tau}{\tau-z}\right),$$

$$\kappa_{ki}=\operatorname{ord}_{z(t_i)}X_k\quad (i=1,\dots,m \ \text{ при } \ k=1 \ \text{ и } \ i=m+1,\dots,r \ \text{ при } \ k=2),$$

$$Y_1=\prod_{i=1}^{m}(z-z(t_i))^{[\kappa_{1i}-\lambda(t_i)]},\quad Y_2=\prod_{i=m+1}^{r}(z-z(t_i))^{[\kappa_{2i}-\lambda(t_i)]},$$

$$X_{0k}=X_k/Y_k,\quad k=1,\,2.$$

Функция X_{0k} удовлетворяет однородному краевому условию (28_k), а ее нули и бесконечности в $\mathbb{C}$ образуют квазидивизор

$$\prod_{i=1}^{m}(z(t_i))^{\kappa_{1i}-[\kappa_{1i}-\lambda(t_i)]}\ \text{ при } \ k=1 \quad \text{и} \quad \prod_{i=m+1}^{r}(z(t_i))^{\kappa_{2i}-[\kappa_{2i}-\lambda(t_i)]}\ \text{ при } \ k=2.$$

Общее решение однородной задачи (28_k) имеет вид $X_{0k}P_k$, где P_k — произвольный многочлен степени не выше, чем $\kappa^{(k)}=-\operatorname{ord}_\infty Y_k$ (многочлен отрицательной степени считаем равным нулю).

Решение неоднородной задачи (28_k) при $\kappa^{(k)}\geq -1$ существует при любой функции $g\in H_{\mu,\lambda}(\Gamma,T)$ и может быть записано в виде

$$F_{0k}(z)=\frac{X_{0k}(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma_{0k}}\frac{g(\rho_k(\tau))d\tau}{X_{0k}^{+}(\tau)(\tau-z)}+X_{0k}(z)P_k(z),\quad k=1,\,2. \tag{30}$$

При $\kappa^{(k)}<-1$ для разрешимости задачи (28_k) необходимо и достаточно, чтобы функция g удовлетворяла условиям

$$\int_{\Gamma_{0k}}\frac{\tau^i g(\rho_k(\tau))d\tau}{X_{0k}^{+}(\tau)}=0,\quad i=0,\ 1,\dots,-\kappa^{(k)}-2. \tag{31}$$

При их выполнении задача (28_k) имеет единственное решение, определяемое формулой (30).

Чтобы функции (30) определяли решение задачи (14), они должны удовлетворять соотношению (29). Для выполнения этих условий разложим функцию F_{0k} в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки $a\in\mathbb{C}\setminus z(E)$ голоморфности X_{0k}.

Запишем ряд Тейлора

$$\frac{X_{0k}(z)}{2\pi i X_{0k}^{+}(\tau)(\tau-z)}=\sum_{j=0}^{\infty}c_{kj}(\tau)(z-a)^j$$

и положим

$$P_k(z)=\sum_{n=0}^{\kappa^{(k)}}a_{kn}z^n$$

(если верхний индекс суммирования меньше нижнего, то сумма считается пустой). Разлагая функции $X_{0k}(z)z^n$ в ряды Тейлора, получим

$$X_{0k}(z)z^n=\sum_{j=0}^{\infty}a_{kjn}(z-a)^j.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций F_{01} и F_{02}, получим соотношения, эквивалентные равенству (29),

$$\sum_{n=0}^{\kappa^{(1)}}a_{1jn}a_{1n}-\sum_{n=0}^{\kappa^{(2)}}a_{2jn}a_{2n}=-\int_{\Gamma_{01}}g(\rho_1(\tau))c_{1j}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{\Gamma_{02}}g(\rho_2(\tau))c_{2j}(\tau)\mathrm{d}\tau,\ \ j=0,1,2,\dots \tag{32}$$

Положим

$$A=\begin{pmatrix} a_{100} & a_{101} & \cdots & a_{10\kappa^{(1)}} & -a_{200} & -a_{201} & \cdots & -a_{20\kappa^{(2)}} \\ a_{110} & a_{111} & \cdots & a_{11\kappa^{(1)}} & -a_{210} & -a_{211} & \cdots & -a_{21\kappa^{(2)}} \\ a_{120} & a_{121} & \cdots & a_{12\kappa^{(1)}} & -a_{220} & -a_{221} & \cdots & -a_{22\kappa^{(2)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

(если $\kappa^{(k)} < 0$, то столбцы, содержащие a_{kij}, в матрице A отсутствуют),

$$\alpha_j(t)=\begin{cases} -c_{1j}(z(t))dz(t), & t\in\Gamma_1; \\ \ \ c_{2j}(z(t))dz(t), & t\in\Gamma_2, \end{cases}$$

$$\alpha(t)=(\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\dots)^t,$$

$$a=(a_{10},\,a_{11},\dots,a_{1\,\kappa^{(1)}},\,a_{20},\,a_{21},\dots,a_{2\,\kappa^{(2)}})^t.$$

Тогда система (32) запишется в виде

$$Aa=\int_\Gamma g\alpha. \tag{33}$$

Обозначим через r ранг матрицы A. Пусть B — невырожденная квадратная матрица порядка r, составленная из элементов матрицы A, стоящих на пересечении строк с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$ ($j_1 < j_2 < \dots < j_r$) и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_r$), B_j — квадратная матрица порядка $r+1$, состоящая из элементов расширенной матрицы $(A, \int\limits_\Gamma g\beta)$, стоящих на пересечении строк с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$, j и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r$, $\kappa_+^{(1)}+\kappa_+^{(2)}+3$, где $\kappa_+^{(k)} := \max\{-1, \kappa^{(k)}\}$. Тогда

$$\det B_j=\int_\Gamma g\beta_j, \quad \text{где} \quad \beta_j=\sum_{n=1}^{r} B_{j,j_n}\alpha_{j_n}+B_{j,j}\alpha_j,$$

$B_{j,k}$ — алгебраическое дополнение элемента $\int\limits_\Gamma g\alpha_k$ матрицы B_j; очевидно, $B_{j,j}=\det B\neq 0$. Если j принимает одно из значений $j_1, j_2, \dots, j_r$, то $\beta_j = 0$. Условия разрешимости системы (32) (или (33)) имеют вид

$$\int_\Gamma g\beta_j=0, \quad j\in\mathbb{Z}, \ \ j\geq 0, \ \ j\neq j_1, j_2, \dots, j_r. \tag{34}$$

Условия (31) перепишем в виде

$$\int_{\Gamma_k}\frac{(z(t))^i g(t)dz(t)}{X_{0k}^+(z(t))}=0, \quad i=0,1,\dots,-\kappa^{(k)}-2, \quad k=1,\,2. \tag{35}$$

Совокупность условий (34) и (35) необходима и достаточна для разрешимости задачи (14). При их выполнении общее решение задачи (14) определяется равенством

$$F(q)=\begin{cases} F_{01}(z(q))=F_{02}(z(q)), & q\in R\setminus E; \\ F_{0k}(z(q)), & q\in O_k, \ \ k=1,\,2, \end{cases} \tag{36}$$

где F_{0k} определена формулой (30).

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Пусть $h=-1$. Тогда для разрешимости задачи Римана (14) необходимы и достаточны условия (34) и (35). При их выполнении общее решение задачи (14) определяется формулами (30) и (36), где коэффициенты a_{kn} многочленов P_k удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (32). Число линейно независимых решений однородной задачи Римана (14) равно $\kappa_+^{(1)}+\kappa_+^{(2)}-r+2$.*

Литература

1. Чибрикова Л.И. *Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Матем. анализ. – 1980. – Т. 18. – С. 3–66.
2. Зверович Э.И. *Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях* // УМН. – 1971. – Т. 26. – Вып. 1. – С. 113–179.
3. Бикчантаев И.А. *Аналоги ядра Коши на римановой поверхности и некоторые их приложения* // Матем. сб. – 1980. – Т. 112. – № 2. – С. 256–282.
4. Бикчантаев И.А. *О числе решений краевой задачи Римана на некомпактной римановой поверхности* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 9. – С. 10–13.
5. Бикчантаев И.А. *Обращение сингулярных интегралов на кусочно-гладком контуре на римановой поверхности* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 5. – С. 882–888.
6. Солдатов А.П. *Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций.* – М.: Высш. школа, 1991. – 208 с.
7. Sario L., Nakai M. *Classification theory of open Rietmann surfaces.* – Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer–Verlag, 1970. – 446 p.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 11.04.1996
окончательный вариант 05.05.1998