ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 517.929

Н.В. АЛЕКСЕНКО

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Для автономных систем дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, известен следующий результат, усиливающий теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости: для того чтобы нулевое решение было асимптотически устойчиво, достаточно, чтобы существовала положительно определенная функция $v(x)$ такая, что $\dot{v} \leqslant 0$ и при этом поверхности уровня $v = \mathrm{const} > 0$ не содержали целых траекторий ([1], гл. 1, § 3, с. 19). В [2], [3] этот результат распространяется (с естественным видоизменением в формулировке) на неавтономные системы в предположении, что правая часть системы, функция Ляпунова $v(x,t)$ и ее частные производные первого порядка почти периодичны по t. В данной статье конструкция работы [3] распространена на функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа. В отличие от традиционных подходов ([4]–[6]) здесь рассматриваются лишь гладкие функционалы Ляпунова, производная функционала вдоль траекторий системы определяется в рамках теории гладких отображений банаховых пространств ([7], гл. 1, § 2). Полученный результат является новым и для частных случаев автономных и периодических систем.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Здесь $f(\varphi, t) : C[J] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, $J = [-a, 0]$, $a = \mathrm{const} > 0$, $C[J]$ — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : J \to \mathbb{R}^N$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in J$. Будем предполагать

1) функционал f непрерывен в $C[J] \times \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию Липшица по φ;
2) f почти периодичен по t равномерно по φ на каждом замкнутом шаре в $C[J]$;
3) $f(0, t) = 0$.

Решение $x(t)$ системы (1) однозначно определяется начальным условием $x_0(\theta) = \varphi(\theta) \in C[J]$ и представляет собой гладкую функцию $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ([6], гл. 2, 2.2). Далее будем обозначать через $|\cdot|$ норму в $\mathbb{R}^N$, $\|\cdot\|$ — норму в $C[J]$, $C^*[J]$ — сопряженное к $C[J]$ банахово пространство. С учетом условия 1) нетрудно показать, что для любого решения $x(t)$ системы (1) и любого $T > 0$

$$\sup_{t \in [0;T]} \left| \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} - f(x_t, t) \right| \to 0 \quad (\Delta t \to 0). \tag{2}$$

Пусть $B_r = \{\varphi \in C[J],\ \|\varphi\| \leqslant r\}$, $r > 0$, $v(\varphi, t)$ — функционал $B_r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Производной функционала v по φ в точке (φ, t) будем называть линейный функционал $v'_\varphi \in C^*[J]$ такой, что $v(\varphi + \Delta\varphi, t) = v(\varphi, t) + v'_\varphi(\Delta\varphi) + o(\|\Delta\varphi\|)$ $(\Delta\varphi \to 0)$. Будем называть функционал v гладким, если в каждой точке (φ, t) существуют производные v'_φ, v'_t, непрерывно зависящие от точки (φ, t) (топологические свойства v'_φ здесь и далее понимаются в норме пространства $C^*[J]$). Производная гладкого функционала v вдоль траекторий системы (1) с учетом (2) существует при $t \geqslant a$

и дается формулой

$$\dot{v}(\varphi, t) = v'_t(\varphi, t) + v'_\varphi(f(\varphi, t), t). \tag{3}$$

Заметим, что правая часть (3) определена всюду в $B_r \times \mathbb{R}$. Будем далее называть решение $x(t)$ системы (1) существенно ненулевым, если $\|x_t(\cdot)\| > 0$ при всех $t \geqslant 0$; остальные решения обращаются в нуль, начиная с некоторого момента t.

Теорема. *Пусть для системы* (1) *с правой частью, удовлетворяющей условиям* 1)–3), *существует гладкий функционал* $v : B_r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *со свойствами*

1°. $V_1(\|\varphi\|) \leqslant v(\varphi, t) \leqslant V_2(\|\varphi\|)$ *для некоторой пары* V_1, V_2 *непрерывных неубывающих функций* $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; $V_k(0) = 0$, $V_k > 0$ *в* $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$;
2°. v, v'_φ, v'_t *почти периодичны по* t *равномерно по* $\varphi \in B_r$;
3°. $\dot{v}(\varphi, t) \leqslant 0$, $(\varphi, t) \in B_r \times \mathbb{R}$;
4°. $\dot{v}(x_t, t)$ *отлична от тождественного нуля на каждом существенно ненулевом решении* $x(t)$ *системы* (1) *со значениями в шаре* B_r.

Тогда нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво.*

Неравенства 1° означают, что функционал v положительно определен и допускает бесконечно малый верхний предел ([4], гл. VI, § 30, с. 171).

Доказательству теоремы предшествуют две леммы. Обозначим через $H[f]$ оболочку функционала f: замыкание множества сдвигов $f(\varphi, t+\tau)$ по $\tau \in \mathbb{R}$ в топологии равномерной сходимости на множестве $B_r \times \mathbb{R}$. Нетрудно убедиться, что а) функционалы из $H[f]$ удовлетворяют условиям 1)–3) с той же константой Липшица L; б) $g \in H[f] \Rightarrow f \in H[g]$.

Лемма 1. *Пусть* $x(t) = x(t, x_0)$ — *решение системы*

$$\dot{x}(t) = g(x_t, t), \quad g \in H[f], \tag{4}$$

с начальной функцией $x_0(\theta) \in C[J]$, $x_n(t) = x_n(t, x_{n,0})$ — *решения систем*

$$\dot{x}(t) = g_n(x_t, t), \quad g_n \in H[f], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

с начальными функциями $x_{n,0}(\theta) \in C[J]$. *Если при всех* $t \geqslant 0$ $x(t) \in B_\rho$ *для некоторого* $\rho > 0$ *и*

$$g_n \to g \ \text{ в } \ H[f], \quad x_{n,0} \to x_0 \ \text{ в } \ C[J],$$

то $x_n(t) \to x(t)$ *равномерно на каждом отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Вначале докажем

$$x_n(t) \rightrightarrows x(t) \text{ на } [0, a]. \tag{6}$$

Обозначим

$$\xi_n(t) = \max_{[0,t]} |x_n(s) - x(s)|, \quad \varepsilon_n = \sup_{B_\rho \times \mathbb{R}} |g_n - g|, \quad \delta_n = \|x_{n,0}(\theta) - x_0(\theta)\|.$$

Пусть $0 < \tau \leqslant t \leqslant a$. Интегрируя (4), (5) по отрезку $[0, \tau]$ и затем почленно вычитая, получим

$$|x_n(\tau) - x(\tau)| \leqslant |x_n(0) - x(0)| +$$
$$+ \int_0^\tau (|g_n(x_{n,s}, s) - g_n(x_s, s)| + |g_n(x_s, s) - g(x_s, s)|)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \delta_n + a\varepsilon_n + L \int_0^\tau (\max_{[s-a,0]} |x_{n,s}(\theta) - x_s(\theta)| + \max_{[0,s]} |x_{n,s}(\theta) - x_s(\theta)|)\, ds,$$

откуда следует

$$\xi_n(t) \leqslant a\varepsilon_n + (1 + aL)\delta_n + L \int_0^t \xi_n(s)\, ds. \tag{7}$$

Применяя к (7) лемму Гронуолла, получим оценку

$$\xi_n(t) \leqslant [a\varepsilon_n + (1 + aL)\delta_n]e^{Lt},$$

откуда с учетом $\varepsilon_n, \delta_n \to 0$ вытекает (6). Повторяя рассуждения с заменой $[0, a]$ на $[a, 2a]$, затем на $[2a, 3a]$ и т. д., получим требуемое. $\square$

Обозначим через $H[v]$ оболочку функционала $v(\varphi, t)$, удовлетворяющего условиям теоремы. Будем далее писать $(g, w) \in H[f, v]$, если $g \in H[f]$, $w \in H[v]$ и

$$g(\varphi, t) = \lim f(\varphi, t + \tau_n), \quad w(\varphi, t) = \lim v(\varphi, t + \tau_n) \quad (n \to \infty) \tag{8}$$

для одной и той же последовательности τ_n (в частном случае (g, w) — сдвиг пары (f, v)). Заметим, что можно без ограничения общности считать в (8) $\tau_n \geqslant a$.

Лемма 2. *Для функционалов из $H[v]$ сохраняются свойства $1°$, $2°$ функционала $v(\varphi, t)$ с теми же минорантой и мажорантой V_1, V_2 и той же константой Липшица L. Для функционалов $\dot{w}(\varphi, t) = w'_t + w'_\varphi(g)$, $(g, w) \in H[f, v]$, сохраняются свойства $3°$, $4°$ функционала* (3) : *$\dot{w} \leqslant 0$, $\dot{w}(y_t, t)$ отлична от тождественного нуля на каждом существенно ненулевом решении $y(t)$ системы* (4).

Доказательство. Проверим сохранение свойства $4°$ для всех пар $(g, w) \in H[f, v]$ (сохранение $1°$–$3°$ очевидно). Предположим противное, существуют пара $(g, w) \in H[f, v]$ и существенно ненулевое решение $y(t)$ со значениями в B_r системы (4) такие, что

$$w(y_t, t) = \text{const} > 0 \ (t \geqslant 0). \tag{9}$$

Так как $(f, v) \in H[g, w]$, то существует такая последовательность $t_n \geqslant a$, что $(g_n, w_n) \equiv (g(\varphi, t + t_n), w(\varphi, t + t_n)) \to (f, v)$ в $H[g, w]$. Заметим, что множество $\{y_t(\theta),\ t \geqslant a\}$ — предкомпакт в $C[J]$: имеем $y_t(\theta) \in B_r$ $(t \geqslant 0)$, $|\dot{y}(t)| = |g(y_t, t) - g(0, t)| \leqslant rL$ $(t \geqslant a)$, поэтому $\{y_t(\theta)\}$ удовлетворяет условиям теоремы Арцела–Асколи. Выделяя из последовательности $y_{t_n}(\theta)$ сходящуюся подпоследовательность и сохраняя для нее то же обозначение, будем иметь $y_{t_n}(\theta) \to x_0(\theta)$ в $C[J]$. Так как с учетом (9) и правого неравенства из $1°$ для $w(\varphi, t)$ выполняется $0 < \text{const} = w(y_{t_n}, t_n) \leqslant V_2(\|y_{t_n}\|)$, то $\|x_0\| > 0$. Пусть $x(t) = x(t, x_0)$ — решение (1) с начальной функцией $x_0(\theta)$. Покажем, что

$$x_t(\theta) \in B_r, \quad v(x_t, t) = \text{const} > 0 \quad (t \geqslant 0). \tag{10}$$

Так как $y_n(t) \equiv y(t + t_n)$ — решение системы $\dot{x} = g_n(x_t, t)$ с начальной функцией $y_{t_n}(\theta)$ и $g_n \to f$ в $H[g]$, $y_{t_n}(\theta) \to x_0(\theta)$, то в силу леммы 1 $y_n(t) \rightrightarrows x(t)$ на отрезках $[0, T]$. Отсюда с учетом $y_{n,t}(\theta) \in B_r$ следует первое соотношение (10). Далее имеем

$$v(x_t, t) = \alpha_n(t) + \beta_n(t) + \gamma_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $\alpha_n = v(x_t, t) - w_n(x_t, t)$, $\beta_n = w_n(x_t, t) - w_n(y_{n,t}, t)$, $\gamma_n = w_n(y_{n,t}, t)$. В силу $w_n \to v$ в $H[w]$ $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$. В силу леммы 1 $w_n(\varphi, t)$ удовлетворяет условию Липшица по φ, поэтому $\beta_n(t) \to 0$ $(n \to \infty)$. В силу (9) $\gamma_n = \text{const} > 0$. Переходя в (11) к пределу при $n \to \infty$, получим второе соотношение (10). Так как решение $x(t)$ существенно ненулевое (в противном случае было бы $v(x_t, t) = 0$, начиная с некоторого t), получено противоречие со свойством $4°$ функционала v. $\square$

Доказательство теоремы. В силу условий $1°$, $3°$ теоремы решение $x = 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову ([4], гл. VI, § 31). Пусть число $\Delta \in (0, r]$ таково, что для решений $x(t)$ системы (1) с начальной функцией $x_0(\theta) \in B_\Delta$ имеет место включение $x_t(\theta) \in B_r$ при $t \geqslant 0$. Покажем, что для таких решений $x(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$. В противном случае существуют решение $x(t)$ и последовательность $\tau_n \uparrow +\infty$ такие, что

$$x_t(\theta) \in B_r \quad (t \geqslant 0), \quad x_{\tau_n}(\theta) \underset{[-a,0]}{\rightrightarrows} y_0(\theta) \neq 0 \quad (n \to \infty) \tag{12}$$

и при этом существуют пределы (8); учтено, что $\{x_t(\theta),\ t \geqslant a\}$ — предкомпакт в $C[J]$ (см. выше). Из левого неравенства 1° и 3° с учетом (12) вытекает: последовательность $v(x_{\tau_n}, \tau_n)$ сходится к положительному числу, поэтому $v(x_t, t)$ сходится к тому же числу

$$v(x_t, t) \to v_0 > 0 \ (t \to +\infty). \tag{13}$$

Обозначим через $y(t)$ решение системы (4) с начальной функцией $y_0(\theta)$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2, получим

$$x(t + \tau_n) \underset{[0,T]}{\rightrightarrows} y(t) \quad (n \to \infty) \tag{14}$$

для любого $T > 0$, откуда, в частности, следует $y_t(\theta) \in B_r$, $t \geqslant 0$. Для функционала w из (8) имеем

$$w(y_t, t) = a_n(t) + b_n(t) + c_n(t),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

где $a_n = w(y_t, t) - v(y_t, t + \tau_n)$, $b_n = v(y_t, t + \tau_n) - v(x_{t+\tau_n}, t + \tau_n)$, $c_n = v(x_{t+\tau_n}, t + \tau_n)$. Переходя в (15) к пределу при $n \to \infty$, с учетом 2°, (8), (13), (14) получим $w(y_t, t) = \mathrm{const} > 0$, что противоречит последнему утверждению леммы 2. $\square$

Литература

1. Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова.* – М.: Наука, 1970. – 240 с.
2. Добровольский С.М., Котюргина А.С., Романовский Р.К. *Об устойчивости решений линейных систем с почти периодической матрицей* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52. – № 6. – С. 10–14.
3. Добровольский С.М., Романовский Р.К. *Метод функций Ляпунова для почти периодических систем* // Матем. заметки. – 1997. – Т.62. – № 1. – С. 151–153.
4. Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
5. Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
6. Хейл Д. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
7. Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* – М.: Мир, 1971. – 392 с.

Омский государственный
институт сервиса

Поступила
09.09.1998