ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 8 (507)

УДК 517.968

Н.Я. ТИХОНЕНКО

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

Работа посвящена построению и обоснованию методов приближенного решения линейных уравнений типа свертки, в частности, уравнений вида

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k_1(x-t)\varphi(t)dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(x-t)\varphi(t)dt = h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

где $k_1(x), k_2(x) \in L$, $h(x) \in L_2$ — известные, а $\varphi(x)$ — неизвестная функции.

Теория разрешимости линейных уравнений типа свертки достаточно полно разработана при самых широких предположениях относительно их ядер и правых частей. Основные результаты, полученные в этом направлении, можно найти в [1]–[3]. Что же касается разработки методов приближенного решения линейных уравнений типа свертки, то в 1954 г. W.T. Koiter [4] предложил метод их приближенного решения, который впоследствии получил наименование метода приближенной факторизации. В дальнейшем этот метод получил развитие в работах [5]–[11]. Метод приближенной факторизации состоит в том, что коэффициенты задачи Римана на вещественной оси, к которой приводится соответствующее уравнение типа свертки, приближаются рациональными функциями. Известно [1], что задача Римана с рациональными коэффициентами решается элементарным образом на основании теории вычетов, что позволяет построить приближенные решения уравнений типа свертки в замкнутом виде.

Однако метод приближенной факторизации решения уравнений типа свертки оказался малоэффективным при его практической реализации, т. к. коэффициенты соответствующих задач Римана приближались рациональными функциями наилучшего равномерного приближения, что является очень сложной задачей. Ниже предложен новый метод приближенного решения линейных уравнений типа свертки, основанный на приближенном решении соответствующей задачи Римана проекционными методами Галёркина и коллокаций. Отметим также, что в работах [12], [13] к приближенному решению нормального случая уравнений типа свертки был применен метод Галёркина, в котором в качестве базисных функций брались функции Лагерра двойного аргумента. В этих работах была установлена осуществимость и сходимость метода. К определению оценок его погрешностей и скоростей сходимости приближенных решений к точным было рекомендовано применить принцип Рунге.

Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная ось, разделяющая комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на две области: верхнюю полуплоскость $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и нижнюю полуплоскость $D^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$.

1. Уравнение с двумя ядрами. Согласно работе [1] уравнение (1) эквивалентно задаче Римана

$$K\Phi \equiv [1 + K_1(x)]\Phi^+(x) - [1 + K_2(x)]\Phi^-(x) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

где $K_1(x), K_2(x) \in C$, $\lim\limits_{x\to\infty} K_1(x) = \lim\limits_{x\to\infty} K_2(x) = 0$, $H(x) \in L_2$ — преобразования Фурье соответственно функций $k_1(x)$, $k_2(x)$, $h(x)$, а $\Phi^\pm(x)$ — краевое значение на вещественной оси неизвестной функции $\Phi^{\pm}(z)$, аналитической в области $D^{\pm}$. При этом решения уравнения (1) выражаются через решения задачи Римана (2) по формуле

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} [\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t)] e^{-ixt} dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $K_1(x), K_2(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$, а функция $H(x) \in L_2^{(r)}$ либо $H(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$ (определение пространства $\overset{\circ}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$ и других необходимых пространств можно найти в [14]).

а) Метод Галёркина. Приближенные решения задачи Римана (2) ищем в виде $\Phi_n(x) = \Phi_n^{+}(x) - \Phi_n^{-}(x)$, где

$$\begin{gathered} \Phi_n^{+}(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k \psi_k(x), \quad \Phi_n^{-}(x) = -\sum_{k=-n}^{-1} \varphi_k \psi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \psi_j(x) = \frac{2i}{x+i} \left(\frac{x-1}{x+i} \right)^{j}, \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \end{gathered} \tag{4}$$

а неизвестные постоянные φ_k определим из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} A_{jk} \varphi_k + \sum_{k=-n}^{-1} B_{jk} \varphi_k = H_j, \quad j = \overline{-n, n}, \tag{5}$$

где A_{jk}, B_{jk}, H_j — коэффициенты Фурье [14] соответственно функций $[1 + K_1(x)]\psi_k(x)$, $[1 + K_2(x)]\psi_k(x)$, $H(x)$ по системе функций $\psi_j(x)$. Тогда приближенные решения уравнения (1) строим по формуле

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} [\Phi_n^{+}(t) - \Phi_n^{-}(t)] e^{-ixt} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

или в развернутом виде

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2\pi} e^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k \sum\limits_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j \dfrac{2^j}{j!} x^j, & x > 0; \\ 2\sqrt{2\pi} e^{x} \sum\limits_{k=-n}^{-1} \varphi_k \sum\limits_{j=0}^{-k-1} C_{-k-1}^j \dfrac{2^j}{j!} x^j, & x < 0, \end{cases}$$

где φ_k — решение системы уравнений (5).

Обозначим через P_n оператор, который ставит в соответствие функции $f(x) \in L_2$ отрезок ее ряда Фурье [14] по системе функций $\psi_j(x)$, т. е.

$$(P_n f)(x) = \sum_{j=-n}^{n} f_j \psi_j(x), \quad f_j = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_j(x)} dx. \tag{7}$$

Тогда согласно работе [15] систему уравнений (5) можно записать в операторном виде

$$K_n \Phi_n \equiv P_n K \Phi_n = P_n H, \tag{8}$$

где $K_n = P_n K$ — приближенный оператор, а оператор K определен равенством (2).

Рассмотрим сначала нормальный случай уравнения (1), т. е. если выполняются условия

$$1 + K_1(x) \neq 0, \quad 1 + K_2(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Обозначим через $X(Y)$ пространство решений (правых частей) задачи Римана (2) и положим $X = Y = L_2$. Пусть X_n — множество функций вида $\Phi_n(x) = \Phi_n^{+}(x) - \Phi_n^{-}(x)$, где $\Phi_n^{\pm}(x)$ имеют вид (4), а Y_n – множество функций вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} a_k \psi_k(x)$. Ясно, что $X_n \subset X_{n+1} \subset X$, $Y_n \subset Y_{n+1} \subset Y$,

$\dim X_n = \dim Y_n = 2n+1$, а определенный равенством (7) оператор $P_n : Y \to Y_n$ обладает, как известно [14], свойствами $P_n^2 = P_n$ и $\|P_n\|_{L_2 \to L_2} = 1$.

Теорема 1. *Пусть функции $k_1(x), k_2(x) \in L$, $h(x) \in L_2$; функции $K_1(x), K_2(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$, выполнены условия* (9) *и* $\operatorname{ind}[1+K_1(x)] = \operatorname{ind}[1+K_2(x)]$. *Если, кроме того, функция $H(x) \in L_2^{(r)}$, то система уравнений* (5) *однозначно разрешима хотя бы при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, а приближенные решения $\varphi_n(x)$ уравнения* (1) *при $r = 0$ сходятся в пространстве L_2 к его точному решению $\varphi(x)$, т. е.*

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_{L_2} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{10}$$

а при $r \geqslant 1$ приближенные решения уравнения (1) *сходятся к его точному решению со скоростью*

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_{L_2} = O(n^{-r}). \tag{11}$$

Доказательство. Согласно [1] в условиях теоремы определенный формулой (2) оператор $K : X \to Y$ непрерывно обратим. Так как выполнены условия (9), то в условиях теоремы справедлива факторизация [1]

$$[1+K_2(x)]/[1+K_1(x)] = \Xi^+(x)/\Xi^-(x),$$

где функция $\Xi^\pm(x)$ аналитически продолжима в область $D^\pm$. При этом [1] функция $\Xi^\pm(x) \in H_\alpha^{(r)}$, если $0 < \alpha < 1$, и $\Xi^\pm(x) \in H_{1-\varepsilon}^{(r)}$, если $\alpha = 1$, где ε — здесь и ниже сколь угодно малое положительное число. Тогда оператор K можно записать в виде

$$K\Phi \equiv \Xi^-(x)\Phi^+(x) - \Xi^+(x)\Phi^-(x) : X \to Y. \tag{12}$$

Пусть $\Xi_n^+(x)$, $\Xi_n^-(x)$ — отрезки рядов Фурье соответственно функций $\Xi^+(x)$, $\Xi^-(x)$ по системе функций $\omega_k(x) = [(x-i)/(x+i)]^k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Согласно [14] они имеют вид

$$\Xi_n^+(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k^+ \omega_k(x), \quad \Xi_n^-(x) = \sum_{k=-n}^{0} c_k^- \omega_k(x) \tag{13}$$

и справедливы оценки

$$\|\Xi^\pm(x) - \Xi_n^\pm(x)\|_C \leqslant d_1 n^{-r-1} \ln n, \tag{14}$$

если $0 < \alpha < 1$;

$$\|\Xi^\pm(x) - \Xi_n^\pm(x)\|_C \leqslant d_2 n^{-r-1+\varepsilon} \ln n, \tag{15}$$

если $\alpha = 1$, где d_i — здесь и ниже вполне определенные постоянные, не зависящие от n. Введем вспомогательный оператор

$$K_1\Phi = \Xi_n^-(x)\Phi^+(x) - \Xi_n^+(x)\Phi^-(x) : X \to Y. \tag{16}$$

Известно (напр., [16]), что справедливо равенство $\|\Phi(x)\|_{L_2} = \|\Phi^+(x)\|_{L_2} + \|\Phi^-(x)\|_{L_2}$, где $\Phi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x)$. Из этого факта и представлений (12), (16) следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
\|(K - K_1)\Phi\|_Y &= \|[\Xi^-(x) - \Xi_n^-(x)]\Phi^+(x) - [\Xi^+(x) - \Xi_n^+(x)]\Phi^-(x)\|_{L_2} \leqslant \\
&\leqslant \max_{+,-} \|\Xi^\pm(x) - \Xi_n^\pm(x)\|_C \, [\|\Phi^+(x)\|_{L_2} + \|\Phi^-(x)\|_{L_2}] = \\
&= \max_{+,-} \|\Xi^\pm(x) - \Xi_n^\pm(x)\|_C \|\Phi(x)\|_X, \quad \Phi \in X.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\|K - K_1\|_{X \to Y} \leqslant \max_{+,-} \|\Xi^\pm(x) - \Xi_n^\pm(x)\|_C. \tag{17}$$

Из этой оценки на основании оценок (14) и (15) следует существование хотя бы при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ ограниченного оператора $K_1^{-1} : Y \to X$. Нетрудно проверить, что оператор $K_1 : X_n \to Y_n$. Поэтому хотя бы при достаточно больших n существует ограниченный оператор $K_1^{-1} : Y_n \to X_n$.

В силу сказанного выше нетрудно проверить, что на пространстве X_n операторы K_1 и $K_n = P_n K$ совпадают. Тогда при достаточно больших n существует ограниченный оператор $K_n^{-1} : Y_n \to X_n$. Это означает, что уравнение (8), а вместе с ним система уравнений (5), однозначно разрешимы хотя бы при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$.

Так как функция $H(x) \in L_2^{(r)}$, то согласно [14] справедливы оценки

$$\|H(x) - (P_n H)(x)\|_{L_2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

если $r = 0$, и

$$\|H(x) - (P_n H)(x)\|_{L_2} \leqslant d_3 n^{-r},$$

если $r \geqslant 1$. Тогда из этих оценок и оценок (17), (14), (15) на основании теоремы 7 ([15], с. 19) для приближенных решений задачи Римана (2) справедливы оценки

$$\|\Phi^{\pm}(x) - \Phi_n^{\pm}(x)\|_{L_2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

если $r = 0$, и

$$\|\Phi^{\pm}(x) - \Phi_n^{\pm}(x)\|_{L_2} \leqslant d_4 n^{-r},$$

если $r \geqslant 1$. Из этих оценок на основании представлений (3), (6) и интегрального равенства Парсеваля следуют соответственно оценки (10) и (11). $\square$

Следствие. Если функция $H(x) \in \overset{\circ}{H}{}_{\alpha 1}^{(r)}$, то в условиях теоремы 1 приближенные решения уравнения (1) сходятся к его точному решению со скоростью

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_{L_2} = O(n^{-r-\alpha} \ln n)$$

при $0 < \alpha < 1$, а при $\alpha = 1$ — со скоростью

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_{L_2} = O(n^{-r-1+\varepsilon} \ln n).$$

Рассмотрим теперь исключительный случай уравнения (1), т. е. если условия (9) не выполнены. В этом случае будем предпологать, что функции $1 + K_1(x)$ и $1 + K_2(x)$ имеют на вещественной оси нули в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_s$ соответственно целых порядков $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$. Тогда согласно ([3], с. 207) справедливы представления

$$1 + K_1(x) = M(x)\rho_-(x), \quad 1 + K_2(x) = N(x)\rho_+(x), \tag{18}$$

где $M(x) \neq 0$, $N(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$; $M(x), N(x) \in H_\alpha^{(r)}$, а

$$\rho_+(x) = \prod_{k=1}^{s} \left(\frac{x - b_k}{x + i}\right)^{\mu_k}, \quad \rho_-(x) = \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{x - a_k}{x - i}\right)^{\nu_k}. \tag{19}$$

Обозначим

$$r_0 = \max\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m;\ \mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_s\}. \tag{20}$$

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра элементов $a(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$ ($0{,}75 < \alpha < 1$, $r \geqslant r_0$), где число r_0 определено в (19), и таких, что $a(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$ и $\operatorname{ind} a(x) = 0$. Тогда согласно [1], [3] справедливы факторизации $a(x) = a_+(x)a_-(x)$, $b(x) = b_+(x)b_-(x)$, $a_\pm(x), b_\pm(x) \in \mathcal{A}$ и функции $a_\pm(x)$, $b_\pm(x)$ являются аналитически продолжимыми в $D^\pm$.

Теорема 2. *Пусть функции* $k_1(x), k_2(x) \in L$, $h(x) \in L_2$; *функции* $K_1(x), K_2(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$ $(0{,}75 < \alpha < 1,\ r \geqslant r_0)$, *где число* r_0 *определено в* (20); *не выполнены условия* (9) *и справедливы представления* (18), *где* $M(x) \neq 0$, $N(x) \neq 0$ *на* $\mathbb{R}$ *и* $\operatorname{ind} M(x) = \operatorname{ind} N(x)$. *Если функция* $H(x) \in L_2^{(r)}$, $r \geqslant r_0$, *то система уравнений* (5) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения* $\varphi_n(x)$ *уравнения* (1) *сходятся в пространстве* L_2 *к его точному решению* $\varphi(x)$ *со скоростью*

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_{L_2} = O(n^{-r}), \quad r \geqslant r_0. \tag{21}$$

При доказательстве этого утверждения воспользуемся схемой теоремы 2.2 работы ([3], с. 442). Полагаем $X = L_2$. Тогда согласно [1], [3] определенный формулой (2) оператор K непрерывно обратим. Покажем теперь, что в этом случае к оператору K применим естественный проекционный процесс $\{P_n, P_n\}$ ([3], с. 430). Рассмотрим уравнение $DF = (P\rho_- + Q\rho_+)F = 0$, где $P = 0{,}5(I + S)$, $Q = 0{,}5(S - I)$ — проекторы Рисса, I — единичный оператор, а $S : L_2 \to L_2$, где $(S\varphi)(x) = (\pi i)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} (t - x)^{-1}\varphi(t)dt$ — сингулярный оператор Коши. Легко видеть, что $\dim\ker D = 0$. Рассмотрим теперь пространства $Z = L_2$, $Z_0 = C_{01}^{(r)}$, $r \geqslant r_0$, где число r_0 определено в (20), и построим пространство $\overline{X} = \{F(x) : F(x) \in X,\ (DF)(x) \in Z\}$, которое становится банаховым, если в нем ввести норму $\|F(x)\|_{\overline{X}} = \|(DF)(x)\|_X$. Легко видеть, что операторы P и Q ограничены в пространстве Z и оператор умножения элементов пространства Z_0 на элеметы алгебры $\mathcal{A}$ также ограничен, а поэтому следует включение $Z \subset \overline{X}$. Следовательно, сужение $\overline{D}$ оператора D на пространство $\overline{X}$ взаимно однозначно и непрерывно отображает пространство $\overline{X}$ на пространство Z, т. е. оператор $\overline{D} : \overline{X} \to Z$ непрерывно обратим. Так как функции $M(x), N(x) \in \mathcal{A}$, то справедливы факторизации

$$M(x) = A_+(x)A_-(x), \quad N(x) = B_-(x)B_+(x),$$

где функции $A_\pm(x)$, $B_\pm(x) \in \mathcal{A}$ и являются аналитически продолжимыми в $D^\pm$. Пусть $E : \overline{X} \to X$ — оператор вложения, очевидно, что он ограничен. Тогда сужение $\overline{K}$ оператора K представимо в виде $\overline{K} = K_1 + T$, где $K_1 = (A_+P + B_-Q)(PA_- + QB_+)\overline{D}$, $T = (A_+QA_-\rho_-P + B_-PB_+\rho_+Q)E$. На основании [1], [3] операторы $A_+P + B_-Q$ и $PA_- + QB_+$ обратимы. Следовательно, оператор $K_1 : \overline{X} \to Z$ непрерывно обратим как произведение непрерывно обратимых операторов. В силу условий теоремы на основании [17] оператор $T : \overline{X} \to Z_0$ компактен. Пусть функции $\Xi^\pm(x) \in \mathcal{A}$ и аналитически продолжимы в $D^\pm$. Тогда на основании [14] они представимы в виде

$$\Xi^+(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^+ \omega_k(x), \quad \Xi^-(x) = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k^- \omega_k(x). \tag{22}$$

Поэтому из представлений (4) и (22) следует цепочка равенств

$$\begin{aligned}
P_n[P\Xi^- + Q\Xi^+]P_n\Phi &= P_n[P\Xi^- + Q\Xi^+]\Phi_n = P_n[P\Xi^-\Phi_n + Q\Xi^+\Phi_n] = \\
&= P_n\left[P\sum_{k=-\infty}^{0} c_k\omega_k(x)\sum_{k=-n}^{n}\varphi_k\psi_k(x) + Q\sum_{k=0}^{\infty} c_k^+\omega_k(x)\sum_{k=-n}^{n}\varphi_k\psi_k(x)\right] = \\
&= P_n\left[P\sum_{k=-\infty}^{n} A_k\Psi_k(x) + Q\sum_{k=-n}^{+\infty} B_k\Psi_k(x)\right] = \\
&= P_n\left[\sum_{k=0}^{n} A_k\Psi_k(x) - \sum_{k=-n}^{-1} B_k\Psi_k(x)\right] = \sum_{k=0}^{n} A_k\Psi_k(x) - \sum_{k=-n}^{-1} B_k\Psi_k(x).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство $P_n[P\Xi^- + Q\Xi^+]P_n = [P\Xi^- + Q\Xi^+]P_n$, из которого в силу конечномерности оператора P_n следует включение $\operatorname{Im} P_n \subset D(\operatorname{Im} P_n)$. Легко видеть, что $\operatorname{Im} P_n \subset Z$. Тогда на основании теоремы о непрерывном графике сужение $\overline{P_n}$ оператора P_n на пространство $\overline{X}$ является непрерывным проектором в пространстве X. При этом в силу определения пространств

Z_0 и Z оператор $P_n : Z_0 \to Z$ ограничен [14]. В качестве Z_1 возьмем постранство $L_2^{(r)}$, $r \geqslant r_0$. Тогда очевидно включение $Z_0 \subset Z_1 \subset D(P_n)$. При этом на основании [14] для любого $\varphi(x) \in Z_1$ имеем $(P_n\varphi)(x) \to \varphi(x)$ в пространстве Z. Рассмотрим оператор $C = \Xi^+ P + \Xi^- Q$, где функции $\Xi^\pm(x) \in \mathcal{A}$ и имеют вид (22). Легко проверяются включения $C(Z_1) \subset Z_1$, $C(Z_0) \subset Z_0$, а на основании представлений (4) и (21) легко проверяется равенство $P_n C P_n = P_n C$. Тогда на основании теоремы 1.4 ([3], с. 437) пространство Z_1 принадлежит многообразию сходимости оператора K_1 по системе проекторов P_n и $\overline{P_n}$. Это означает, что при достаточно больших n существуют ограниченные операторы $(P_n K_1 \overline{P_n})^{-1}$ и последовательность элементов $x_n = (P_n K_1 \overline{P_n}) P_n y$, $y \in Y$, сходится по норме пространства X к некоторому элементу из пространства X, т. е. к оператору K_1 применим проекционный процесс $\{P_n, \overline{P_n}\}$. Так как оператор T компактен, а оператор $\overline{K}$ обратим, то согласно теореме 1.1 ([3], с. 432) к оператору $\overline{K} : \overline{X} \to Z$ также применим проекционный процесс $\{P_n, \overline{P_n}\}$, т. е. уравнение (8), а вместе с ним и система уравнений (5), однозначно разрешимы при достаточно больших n.

Рассмотрим теперь элемент $y_0(x) = (A_+^{-1} P + B_-^{-1} Q)(H - T_1 \Phi)(x)$. Так как функция $\Phi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) \in L_2$, то согласно [17] функция $(T_1\Phi)(x) \in C_{01}^{(r)}$, $r \geqslant r_0$. Тогда в силу [14] справедлива оценка

$$\|y_0(x) - (P_n y_0)(x)\|_{L_2} \leqslant d_5 n^{-r}.$$

Теперь на основании теоремы 2.2 ([3], с. 442) для приближенных решений задачи Римана (2) справедлива оценка

$$\|\Phi^\pm(x) - \Phi_n^\pm(x)\|_{L_2} \leqslant d_6 n^{-r}, \quad r \geqslant r_0,$$

из которой в силу представлений (3), (6) и интегрального равенства Парсеваля следует оценка (21).

б) Метод коллокаций. Положим $X = L_2$, $Y = C_{01}$ с нормой из пространства L_2. Приближенные решения задачи Римана (2) ищем в виде $\Phi_n(x) = \Phi_n^+(x) - \Phi_n^-(x)$, где

$$\Phi_n^+(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \omega_k(x), \quad \Phi_n^-(x) = -\sum_{k=-n}^{-1} c_k \omega_k(x). \tag{23}$$

Поэтому [18] справедливы представления

$$\Phi_n^+(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \Psi_k(x), \quad \Phi_n^-(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \gamma_k \Psi_k(x), \tag{24}$$

где $\gamma_k = c_n + c_{n-1} + \dots + c_{k+1}$. Неизвестные постоянные c_k определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} [1 + K_1(x_j)] \omega_k(x_j) c_k + \sum_{k=-n}^{-1} [1 + K_2(x_j)] \omega_k(x_j) c_k = H(x_j), \quad j = \overline{-n, n}, \tag{25}$$

где узлы коллокаций x_j имеют вид

$$x_j = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} j, \quad j = \overline{-n, n}. \tag{26}$$

Теперь приближенные решения уравнения (1), учитывая представления (24), строим по формуле (6).

Пусть $X_n = Y_n$ — множество функций вида (23), для которых справедливы представления (24). Ясно, что $X_n \subset X_{n+1} \subset X$ и $Y_n \subset Y_{n+1} \subset Y$, где $\dim X_n = \dim Y_n = 2n + 1$. Пусть $\mathcal{L}_n$ — оператор, который ставит в соответствие каждой функции $f(x) \in C_{01}$ ее интерполяционный многочлен Лагранжа [18] по узлам x_j (26)

$$(\mathcal{L}_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \omega_k(x), \quad a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} f(x_j) e^{-\frac{2\pi i}{2n+1} jk}. \tag{27}$$

Согласно [18] имеем $(L_n f)(x) \in C_{01}$ и оператор $\mathcal{L}_n$ обладает свойствами $\mathcal{L}_n : Y \to Y_n$, $\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n$, $\|L_n\|_{C_{01}\to L_2} \leqslant d_7$. Тогда в силу [15] систему уравнений (24) можно записать в виде эквивалентного операторного уравнения $K_n\Phi_n = \mathcal{L}_n K\Phi_n = \mathcal{L}_n H$.

Теорема 3. *Пусть функции* $k_1(x), k_2(x) \in L$, $h(x) \in L_2$; *функции* $K_1(x), K_2(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$; *выполнены условия* (9) *и* $\operatorname{ind}[1 + K_1(x)] = \operatorname{ind}[1 + K_2(x)]$. *Если функция* $H(x) \in C_{01}^{(r)}$, *то система уравнений* (25) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения уравнения* (1) *сходятся в пространстве* L_2 *к его точному решению со скоростью* (10) *при* $r = 0$, *а при* $r \geqslant 1$ — *со скоростью* (11).

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1. Отметим также, что в условиях теоремы 3 имеет место утверждение, аналогичное следствию 1.

В исключительном случае уравнения (1) для метода коллокаций имеет место

Теорема 4. *Пусть функции* $k_1(x), k_2(x) \in L$, $h(x) \in L_2$; *функции* $K_1(x), K_2(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(r+1)}_{\alpha 1}$ $(0{,}5 < \alpha < 1;\ r \geqslant r_0)$, *где число* r_0 *определено в* (20); *не выполнены условия* (9) *и справедливы представления* (19), *где* $M(x) \neq 0$, $N(x) \neq 0$ *на* $\mathbb{R}$ *и* $\operatorname{ind} M(x) = \operatorname{ind} N(x)$. *Если функции* $H(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$, $r \geqslant r_0$, *то система уравнений* (25) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения уравнения* (1) *сходятся в пространстве* L_2 *к его точному решению со скоростью* (21).

Доказательство этого утверждения проводится по схеме доказательства теоремы 2. Однако в этом случае алгебре $\mathcal{A}$ соответствует случай $0{,}5 < \alpha < 1$, а пространства $Z = C_{01}$, $Z_0 = C_{01}^{(r)}$, $Z_1 = C_{01}^{(r)}$, где число r_0 определено в (20).

Замечание 1. Утверждения теорем 1–4 сохраняют свою силу, если функции $K_1(x), K_2(x) \in H_\alpha^{(r)}$ и такие, что $\lim\limits_{x\to\infty} K_1(x) = \lim\limits_{x\to\infty} K_2(x) = 0$.

2. Уравнение Винера–Хопфа. Пусть функции $k(x) \in L$, $h(x) \in L_2$. Тогда согласно [1] уравнение

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k(x - t)\varphi(t)dt = h(x), \quad x > 0, \tag{28}$$

эквивалентно задаче Римана

$$[1 + K(x)]\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = H^+(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

где $K(x)$, $H^+(x)$ — преобразования Фурье соответственно функций $k(x)$ и $h(x)$, $\Phi^\pm(x)$ — краевое значение на $\mathbb{R}$ неизвестной функции $\Phi^\pm(z)$, аналитической в области $D^\pm$. При этом решения уравнения Винера–Хопфа (27) выражаются через решения задачи Римана (29) по формуле

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Phi^+(t)e^{-ixt}dt, \quad x > 0. \tag{30}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функция $K(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$, а функция $H^+(x) \in L_2^{(r)}$.

В случае метода Галёркина приближенные решения задачи Римана (29) ищем в виде (4), а неизвестные постоянные φ_k определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} A_{jk}\varphi_k + \gamma_0\varphi_j = H_j, \quad j = \overline{-n, n}, \tag{31}$$

где $\gamma_0 = 0$ при $j \geqslant 0$ и $\gamma_0 = 1$ при $j < 0$, а A_{jk} и H_j — коэффициенты Фурье соответственно функций $[1 + K(x)]\Psi_k(x)$ и $H^+(x)$ по системе функций $\Psi_j(x)$. Тогда приближенные решения уравнения (27) строятся по формуле

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \Phi_n^+(t) e^{-ixt} dt, \quad x > 0, \tag{32}$$

или в развернутом виде

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2\pi} e^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k \sum\limits_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j \dfrac{2^j}{j!} x^j, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{33}$$

где $\{\varphi_k\}$ — решение системы уравнений (31).

Как и в случае уравнения (1), пространства X, Y, X_n, Y_n и оператор P_n имеют тот же смысл. Тогда систему уравнений (31) можно записать в операторной форме $K_n \Phi_n \equiv P_n K \Phi_n = \Phi_n H^+$. В нормальном случае уравнения (28) имеет место

Теорема 5. *Пусть функции* $k(x) \in L$, $h(x) \in L_2$; *функция* $K(x) \in \overset{\circ}{H}{}_{\alpha 1}^{(r)}$; $1 + K(x) \neq 0$ *на* $\mathbb{R}$ *и* $\operatorname{ind}[1 + K(x)] = 0$. *Если функция* $H^+(x_j) \in L_2^{(r)}$, *то система уравнений* (31) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения* $\varphi_n(x)$ *уравнения* (28) *при* $r = 0$ *сходятся в пространстве* L_2 *к его точному решению* $\varphi(x)$ *со скоростью* (10), *а при* $r \geqslant 1$ *— со скоростью* (11).

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1, однако в этом случае необходимо воспользоваться представлениями (30) и (32). Заметим, что и в случае уравнения (28) утверждения следствия 1 сохраняют свою силу.

В исключительном случае уравнения (28) будем предполагать, что функция $1 + K(x)$ имеет на вещественной оси нули в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$ соответственно целых порядков $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$. Тогда справедливо представление

$$1 + K(x) = M(x)\rho_-(x), \tag{34}$$

где функции $M(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$, $M(x) \in H_\alpha^{(r)}$, а функции $\rho_-(x)$ имеют вид (19). Обозначим

$$r_0 = \max\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m\}. \tag{35}$$

Теорема 6. *Пусть функции* $k(x) \in L$, $h(x) \in L_2$; *функция* $K(x) \in \overset{\circ}{H}{}_{\alpha 1}^{(r+1)}$; $1 + K(x) \neq 0$ $(0{,}75 < \alpha < 1,\ r \geqslant r_0)$, *где число* r_0 *определено соотношением* (35); *не выполнено условие* $1 + K(x) \neq 0$ *на* $\mathbb{R}$ *и справедливо представление* (34), *где функция* $M(x) \neq 0$ *на* $\mathbb{R}$ *и* $\operatorname{ind} M(x) = 0$. *Если функция* $H(x) \in \overset{\circ}{H}{}_{\alpha 1}^{(r)}$, $r \geqslant r_0$, *то система уравнений* (31) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения уравнения* (28) *сходятся в пространстве* L_2 *к его точному решению со скоростью* (21).

В случае метода коллокаций приближенные решения задачи Римана (29) ищем в виде (23), а неизвестные постоянные c_k определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} [1 + K(x_j)] \omega_k(x_j) c_k + \sum_{k=-n}^{-1} \omega_k(x_j) c_k = H^+(x_j), \quad j = \overline{-n, n},$$

где x_j — узлы коллокаций (26), а приближенные решения (28), учитывая (24), строим по формуле (32).

Отметим, что в этом случае пространства X, Y, X_n, Y_n, оператор $\mathcal{L}_n$, а также пространства Z, Z_0, Z_1 и алгебра $\mathcal{A}$ имеют тот же смысл, что и в случае метода коллокаций для задачи Римана (2). При этом будут справедливы утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4.

Замечание 2. По приведенной выше схеме строятся приближенные решения нормального случая "парного" уравнения

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)dt = h_1(x), \quad x > 0;$$
$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\varphi(t)dt = h_2(x), \quad x < 0,$$

решение которого согласно [1] приводится к решению соответствующей задачи Римана на вещественной оси.

3. Уравнение Гринберга–Фока. Задача береговой рефракции плоской электромагнитной волны приводится [19] к решению уравнения Гринберга–Фока

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} k_0(|x-t|)\varphi(t)dt = e^{-x}, \quad x > 0, \tag{36}$$

где $0 < \lambda < 1$ — параметр, который характеризует физические свойства среды над поверхностью воды, а

$$k_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos\omega x}{\sqrt{1+\omega^2}}d\omega, \quad x > 0.$$

С помощью преобразования Фурье уравнение Гринберга–Фока приводится к задаче Римана

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}\right)\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}(x+i)}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{37}$$

При этом решения уравнения (36) выражаются через решения задачи Римана (37) по формуле (32). Приближенные решения уравнения Гринберга–Фока (36) строим на основе приближенного решения задачи Римана (37) методом Галёркина. Ее приближенные решения ищем в виде (4), а неизвестные постоянные φ_k определяем из системы уравнений

$$\gamma_0\varphi_j + \frac{2\lambda}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4(k-j)^2-1}\varphi_k + \gamma_1\varphi_j = H_j, \quad j = \overline{-n,n}, \tag{38}$$

где $\gamma_0 = 1$ при $j \geqslant 0$ и $\gamma_0 = 0$ при $j < 0$; $\gamma_1 = 1$ при $j < 0$ и $\gamma_1 = 0$ при $j \geqslant 0$; $H_0 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$, $H_j = 0$ при $j \neq 0$. Приближенные решения уравнения Гринберга–Фока (36) согласно (32) строим по формуле (33), где φ_k — решение системы уравнений (38). Так как коэффициенты и правая часть задачи Римана (37) являются бесконечно дифференцируемыми функциями на вещественной оси, то все условия теоремы 5 выполняются. Поэтому система уравнений (38) разрешима при всех n, а приближенные решения уравнения Гринберга–Фока сходятся в пространстве L_2 к его точному решению с достаточно высокой скоростью.

В заключение отметим, что система уравнений (38) была реализована на ЭВМ для различных значений параметра λ при различных значениях n. Результаты численных экспериментов хорошо согласуются с теоретическими.

Литература

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1998. – 295 с.
2. Крейн М.Г. *Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов* // УМН. – 1958. – Т. 13. – № 5. – С. 3–120.
3. Прёсдорф З. *Некоторые классы сингулярных уравнений.* – М.: Мир, 1979. – 493 с.
4. Koiter W.T. *Approximate solution of Wiener–Hopf type integrale equations with applications* // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. wetenschap. – 1954. – V .57. – № 5. – S. 568–579.
5. Попов Г.Я. *К решению задач теории упругости методом факторизации* // ПММ. – 1974. – Т. 38. – № 1. – С. 178–183.

6. Попов Г.Я., Керекеша П.В., Круглов В.Е. *Метод факторизации и его численная реализация.* – Одесса: Изд-во Одесск. ун-та, 1976. – 82 с.
7. Черский Ю.И. *Две теоремы об оценке погрешности и некоторые их приложения* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 150. – № 2. – С. 271–274.
8. Черский Ю.И. *Про наближене розв'язання рівняння Вінера–Хопфа першого роду* // ДАН УРСР. – 1966. – № 8. – С. 992–995.
9. Черский Ю.И. *Приближенное решение уравнения Винера–Хопфа в одном исключительном случае* // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2. – № 8. – С. 1093–1100.
10. Тихоненко М.Я. *До наближеного розв'язку інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь з різницевими ядрами в узагальнених функціях* // ДАН УРСР. – 1972. – № 6. – С. 536–539.
11. Тихоненко Н.Я. *О методе приближенной факторизации* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 4. – С. 74–86.
12. Иванов В.В., Карагодова Э.А. *Приближенное решение интегральных уравнений типа свертки методом Галёркина* // Укр. матем. журн. – 1961. – Т. 13. – № 1. – С. 28–38.
13. Карагодова Е.А. *К приближенному решению уравнений типа свертки* // Вычисл. матем. – Киев: Изд-во КГУ. – 1965. – Вып. 1. – С. 146–152.
14. Тихоненко Н.Я. *О рядах Фурье по системе рациональных функций на вещественной оси и некоторые приложения* // Вiсник Київськ. ун-ту. Сер. фiз.-матем. наук. – 1998. – Вип. 2. – С. 127–137.
15. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
16. Иванов В.В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1968. – 287 с.
17. Тихоненко Н.Я., Свяжина Н.Н. *О компактности коммутатора на вещественной оси* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 10. – С. 83–87.
18. Тихоненко Н.Я., Лисицина И.Н. *Интерполяция функций на вещественной оси и приложения* // Вiсник Київськ. ун-ту. Сер. фiз.-матем. наук. – 1998. – Вип. 2. – С. 77–86.
19. Гринберг Г.А., Фок В.А. *Исследования по распространению радиоволн.* – М.: Гостехиздат, 1948. – Т. 2. – С. 42–58.

Одесский национальный университет

Поступила 26.12.2003