И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 10 (461)

УДК 517.538

Ф.Г. НАСИБОВ

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ В КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

1. Введение

1. Следуя ([1], с. 182), обозначим через B_σ класс целых функций конечной степени $\leq \sigma$, ограниченных на оси $R = (-\infty, \infty)$. С.Н. Бернштейн впервые ввел этот класс [2] и доказал, что $\forall f \in B_\sigma$ имеет место неулучшаемое неравенство

$$|f'(x)| \leq \sigma \|f\|_C = \sigma \sup_{x\in R} |f(x)| \quad \forall x \in R.$$

В дальнейшем появились многочисленные исследования, в которых это неравенство обобщалось в различных направлениях, переносилось на другие классы функций с разнообразными применениями ([1], [3]–[5]).

В данной работе сделана попытка рассмотреть с единой точки зрения все такие частные задачи и показать, что все они укладываются в единую схему (с частичным анонсом в [6]). В классах целых функций $W_{\sigma,2}$ (порядка $\rho = 1$ и принадлежащих к L_2), $D_{\sigma,1/2}$ и $B_{\sigma,1/2}$ (D, B — классы целых функций порядка $\rho = 1/2$) такие общие исследования проводились автором ранее ([7]–[10]). Исследования в равномерной метрике осложняются отсутствием общего вида линейного функционала в пространстве $C(-\infty, \infty)$.

К экстремальным задачам в различных классах аналитических функций такой общий подход сделан на основе теоремы Хана–Банаха давно, начиная с 1949 г. [11], поставлены и исследованы достаточно общие экстремальные задачи в различных классах аналитических функций.

Основные результаты здесь принадлежат С.Я. Хавинсону, Г.Ц. Тумаркину, В. Рогозинскому, А. Макинтайру, Г. Шапиро и др. Обзор результатов в этом направлении можно найти в статьях [12]–[14], которым предшествовали основополагающие работы М.Г. Крейна [15] и С.М. Никольского [16]. Отметим также работу Е.А. Горина [17], где неравенство С.Н. Бернштейна исследуется с точки зрения теории операторов.

Наш подход основан на описании аннуляторов некоторых классов целых функций, которые позволяют устанавливать соотношения двойственности, выявлять ряд особенностей исследуемых задач, устанавливать связь экстремальных задач с проблемой наилучшего приближения.

2. Введем обозначения и определения классов, которые являются объектом наших исследований [6].

1) Через H_σ обозначаем класс целых функций степени $\leq \sigma$.

2) $V[-\sigma,\sigma] \overset{\text{def}}{\equiv} \Big\{\nu : \operatorname{var}(\nu : [-\sigma,\sigma]) \equiv \overset{\sigma}{\underset{-\sigma}{V}}(\nu) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |d\nu| < +\infty\Big\}$ — класс мер $\nu(t)$ с ограниченным изменением на $[-\sigma,\sigma]$.

В случае $V(-\infty,\infty)$ будем употреблять обозначение $V \equiv V_R$.

3) $\mathcal{M}_\sigma \overset{\text{def}}{=} \Big\{f \in H_\sigma : f(z) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt}\varphi(t)dt \ \forall\varphi \in L_1(-\sigma,\sigma)\Big\}$.

4) $\mathcal{N}_\sigma \overset{\text{def}}{=} \Big\{ f \in H_\sigma : f(z) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt} d\nu(t) \ \forall \nu \in V(-\sigma, \sigma) \Big\}$.

5) $\mathcal{N}_\sigma^+ \overset{\text{def}}{=} \{ f \in \mathcal{N}_\sigma : \nu \uparrow \}$.

6) $\mathcal{N}_{\sigma,0} \overset{\text{def}}{=} \{ f \in \mathcal{N}_\sigma : f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty \}$.

Отметим очевидные вложения

$$W_{\sigma,2} \subset \mathcal{M}_\sigma \subset \mathcal{N}_{\sigma,0} \subset \mathcal{N}_\sigma \subset B_\sigma.$$

Здесь нетривиальным является то, что $\mathcal{M}_\sigma \not\equiv \mathcal{N}_{\sigma,0}$, а точнее, $\mathcal{N}_{\sigma,0} \setminus \mathcal{M}_\sigma$ не пусто. Для класса $\mathcal{N}_{\sigma,0}$ можно утверждать, что меры $\nu(t)$, входящие в интегральные представления функций $f \in \mathcal{N}_{\sigma,0}$, являются непрерывными функциями ([18], с. 35).

Величина

$$L = \overline{\lim_{|x| \to \infty}} |f(x)| \quad \left(f(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt} d\nu(t) \right)$$

в принципе может быть любым числом между 0 и 1. Известны примеры, когда $L = 0$, $L = 1$. Сингулярные меры, для которых L равно заданному числу из отрезка $[0,1]$, были построены Шварцем еще в 1941 г. ([18], с. 35). Следовательно, для некоторой сингулярной меры $\nu \quad f(x) \to 0$ $(|x| \to \infty)$. Это показывает, что существует функция $f_0(x) \in \mathcal{N}_{\sigma,0}$, которая не входит в $\mathcal{M}_\sigma$.

В свое время на семинаре в МИАН проф. С.Б. Стечкин указал на то, что этот факт можно вывести еще из ранних работ Д.Е. Меньшова о нуль-тригонометрических рядах.

Теперь установим два утверждения, которые понадобятся далее.

Лемма 1. $\forall f(z) \in B_\sigma$ *существует последовательность* $\{g_n(z)\} \subset \mathcal{N}_\sigma$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $\{g_n(z)\}$ *равномерно ограничена на* $R = (-\infty, \infty)$;

2) $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x)$ $\forall x \in R$, *причем сходимость равномерная на каждом конечном отрезке оси* R.

Доказательство. Пусть $\Lambda_n(f;x)$ — полиномы Левитана функции $f \in B_\sigma$,

$$\Lambda_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sigma}{n} E_{\sigma/n}\left(\frac{k\sigma}{n}\right) \exp\left\{ i \frac{k\sigma}{n} x \right\},$$

$$E_\delta(x) = E_\delta(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \left(\frac{\sin \delta t/2}{t/2} \right)^2 f(t) dt,$$

а функция $\nu_n(t)$ с ограниченным изменением на $[-\sigma, \sigma]$ делает скачки $\lambda_k = \frac{\sigma}{n} E_{\sigma/n}(t_k)$ в точках $t_k = \frac{k\sigma}{n}$ $(\pm k = 0, 1, \ldots, n)$ и эти t_k — единственные точки роста $\nu_n(t)$. Тогда получаем

$$g_n(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt} d\nu_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sigma}{n} E_{\sigma/n}(t_k) \exp(ixt_k) \equiv \Lambda_n(f;x).$$

Остается учесть теорему Б.М. Левитана ([17], с. 193), что приводит к утверждению 2). Справедливость же 1) следует из того свойства полиномов $\Lambda_n(f;x)$, что если на R $|f(x)| \le M$, то $|\Lambda_n(f;x)| \le M$. $\square$

Замечание. В книге [19] Р. Боаса имеется утверждение 2), но для нас важным добавлением является п. 1) (у Боаса другой метод доказательства).

Лемма 2. *Класс* $\mathcal{N}_\sigma^+$ *замкнут относительно равномерной сходимости на* $R = (-\infty, \infty)$.

Доказательство. В самом деле, пусть последовательность $\{f_n(x)\} \subset \mathcal{N}_\sigma^+$ и $\{\nu_n(t)\}$ — соответствующая ей последовательность мер по формуле

$$f_n(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt} d\nu_n(t), \quad \nu_n(t) \uparrow \quad (\forall n).$$

Если $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на R, то $\{\nu_n(t)\}$ слабо сходится к мере $\nu(t)$ ([18], сс. 62, 73), причем $\nu(t) \uparrow$ и

$$f(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt} d\nu(t) \in \mathcal{N}_\sigma^+. \quad \Box$$

2. Описание аннуляторов и некоторые их свойства

1. Пусть E — некоторое линейное пространство и $F \subset E$, E^* — сопряженное с E пространство.

Множество всех линейных функционалов $l \in E^*$, каждый из которых обращается в нуль на каждом элементе $x \in F$, называется *аннулятором* класса F и обозначается через $F^\perp$.

Теорема 1 ([6]). *Аннуляторы классов $\mathcal{M}_\sigma$ и $\mathcal{N}_{\sigma,0}$ совпадают и каждый из них состоит из мер $\mu(t)$ с ограниченным изменением на R, преобразование Фурье–Стильтьеса которых равно нулю на отрезке $[-\sigma, \sigma]$ (и только из таких функций)* :

$$\mathcal{M}_\sigma^\perp \equiv \mathcal{N}_{\sigma,0}^\perp = \Big\{ \mu \in V : \widehat{\mu}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\mu(t) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \le \sigma \Big\}.$$

Доказательство. Вначале рассмотрим класс $\mathcal{M}_\sigma$. Из определения этого класса следует, что $\forall f \in \mathcal{M}_\sigma : f(x) \to 0$ $(|x| \to \infty)$ (теорема Римана–Лебега). Следовательно, $\mathcal{M}_\sigma$ является подпространством пространства C_0-функций, непрерывных на R и стремящихся к нулю при $|x| \to \infty$. По теореме М.Г. Крейна ([4], с. 123) всякий линейный функционал l над C_0 представим в виде

$$l(f) = \int_R f(t) d\mu(t), \quad \mu \in V_r, \quad \|l\| = \int_R |d\mu|.$$

Тогда получим, что $\mathcal{M}_\sigma^\perp$ состоит из тех и только тех мер $\mu \in V_R$, для которых $l(f) = 0$ $(\forall f \in \mathcal{M}_\sigma)$.

Пользуясь определением класса $\mathcal{M}_\sigma$, приходим к заключению, что

$$l(f) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(x) \widehat{\mu}(x) dx, \quad \widehat{\mu}(x) = \int_R e^{ixt} d\mu(t).$$

Поэтому $l(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $\widehat{\mu}(x) = 0$ при $-\sigma \le x \le \sigma$.

Теперь покажем, что $\mathcal{N}_{\sigma,0}^\perp \equiv \mathcal{M}_\sigma^\perp$. Пусть $\mu(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$ и $f \in \mathcal{N}_{\sigma,0}$. В силу представления $f \in \mathcal{N}_{\sigma,0}$ находим

$$l(f) = \int_R f(t) d\mu(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{\mu}(x) d\nu(x) = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{N}_{\sigma,0}),$$

т. е. $\mu \in \mathcal{N}_{\sigma,0}^\perp$. Таким образом, $\mathcal{M}_\sigma^\perp \subset \mathcal{N}_{\sigma,0}^\perp$. Обратное вложение $\mathcal{N}_{\sigma,0}^\perp \subset \mathcal{M}_\sigma^\perp$ является следствием вложения $\mathcal{M}_\sigma \subset \mathcal{N}_{\sigma,0}$. $\Box$

2. Теперь рассмотрим самый широкий класс $B_\sigma \subset C_M(R)$, причем $C_M(R)$ обозначает пространство всех непрерывных и ограниченных на R функций.

Так как общий вид линейного функционала над $C_M(R)$ неизвестен, то мы не можем дать полное описание аннулятора $B_\sigma^\perp$. Поэтому, несколько отступая от общего определения аннулятора $B_\sigma^\perp$ (также $\mathcal{N}_\sigma^\perp$), будем подразумевать под $B_\sigma^\perp$ множество функционалов вида

$$l(f) = \int_R f(t) d\mu(t), \quad \mu \in V_R,$$

обращающихся в нуль на каждом элементе из $B_\sigma(N_\sigma)$. (Возможно, в $C_M(R)$ существуют и другие функционалы, аннулирующие $B_\sigma(N_\sigma)$.) С таким уточнением имеет место

Теорема 2. *Справедливы следующие равенства*:

$$B_\sigma^\perp = \mathcal{N}_\sigma^\perp = \mathcal{M}_\sigma^\perp = \mathcal{N}_{\sigma,0}^\perp.$$

Доказательство. С одной стороны, ясно, что $B_\sigma^\perp \subset \mathcal{N}_\sigma^\perp \subset \mathcal{N}_{\sigma,0}^\perp$. С другой стороны, $\forall \mu \in \mathcal{N}_{\sigma,0}^\perp$ и $\forall f \in B_\sigma$ (в силу леммы 1) найдутся такие $\nu_n(x)$, для которых

$$\int_R f(t)d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int_R \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt} d\nu_n(x) \right\} d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{\mu}(x) d\nu_n(x) = 0,$$

т.е. $\mathcal{N}_{\sigma,0}^\perp \subset \mathcal{N}_\sigma^\perp \subset B_\sigma^\perp$, что и завершает доказательство. $\square$

3. Отметим некоторые свойства этих аннуляторов.

1) Если $\mu(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$, то $\forall t_0 \in R \;\; \pm\mu(t \pm t_0) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$. Это следует из того, что $\pm f(t \pm t_0) \in \mathcal{M}_\sigma$, если $f(t) \in \mathcal{M}_\sigma$.

2) Если $\mu(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$ и $\mu(t) \uparrow$, то $\widehat{\mu}(x) = 0$ при любом $x \in R$, т. к. $\forall x \in R : |\widehat{\mu}(x)| \le \widehat{\mu}(0) = 0$.

3) Если $\mu(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$ и $\mu(t) \uparrow$, то $\mu(t) \equiv \mathrm{const}$.

В самом деле, по формуле обращения $\forall x \in R$ имеем

$$\mu(x+0) - \mu(x-0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \widehat{\mu}(t) e^{-ixt} dt = 0.$$

Кроме того, в силу монотонности меры $\mu(x)$, $\mu(x-0) \le \mu(x) \le \mu(x+0)$, т. е. $\mu(x)$ непрерывна во всех точках $x \in R$.

Далее, из $\widehat{\mu}(0) = 0$ следует, что $\mu(-\infty) = \mu(+\infty)$. Отсюда и в силу того, что $\forall x \in R : \mu(-\infty) \le \mu(x) \le \mu(+\infty)$, получаем $\forall x \in R : \mu(x) = \mu(+\infty) = \mathrm{const}$.

4) Если $\mu(t) = \mu_1(t) + i\mu_2(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$, $\mu_j(t) \uparrow$ $(j = 1, 2)$, то $\mu(t) \equiv \mathrm{const}$.

5) Если $\mu(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$ и $\sigma \ge \pi$, то она не может быть чистой функцией скачков в точках $t_k = k$ $(\pm k = 0, 1, 2, \dots)$, если только функционал $\not\equiv 0$.

В самом деле, допуская обратное, получим

$$\widehat{\mu}(x) = \int_R e^{ixt} d\mu(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k \exp(ikx).$$

Отсюда видно, что $\widehat{\mu}(x)$ является 2π-периодической функцией и ряд справа сходится абсолютно. Кроме того, $\widehat{\mu}(x) = 0$ $(|x| \le \sigma)$, $\sigma \ge \pi$, поэтому $\mu(x) = 0$ и во всех точках периода $[-\pi, \pi]$, т. е. $\widehat{\mu}(x) = 0 \; \forall x \in R$. Тогда

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\mu}(x) e^{ikx} dx = 0 \quad (\pm k = 0, 1, 2, \dots),$$

но $\lambda_k = d_k$ — скачки функции $\mu(t)$ в точках $t = k$. Значит, все скачки $\mu(t)$ равны нулю ($d_k = \lambda_k = 0$), а это возможно лишь тогда, когда $\mu(t) = \mathrm{const}$, — противоречие условию, что функционал $\not\equiv 0$.

6) Если непостоянная функция $\mu(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$, то не существует никакого конечного интервала (a, b) $(-\infty < a < b < +\infty)$, вне которого $\mu(t) = \mathrm{const}$.

В самом деле, если бы существовал такой интервал, то

$$\widehat{\mu}(x) = \int_R e^{ixt} d\mu(t) = \int_a^b e^{ixt} d\mu(t).$$

Поэтому $\widehat{\mu}(z)$ будет целой функцией конечной степени $\le \sigma \le \max(|a|, |b|)$. Поскольку $\widehat{\mu}(x) = 0$ при $|x| \le \sigma$, то $\widehat{\mu}(z) \equiv 0$, т. е. $\mu(x) = \mathrm{const}$.

7) Если $\mu(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$ и непостоянна, то какова бы ни была $M > 0$, существует точка роста $t_0 \in R$ функции $\mu(t)$, удовлетворяющая условию $|t_0| > M$. (Другая формулировка 6).)

8) Если непостоянная $\mu(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$, то она не может иметь конечное число точек роста. Это утверждение является следствием 6) и 7).

4. На примере покажем, что существует мера $\mu(t) \in \mathcal{M}_\sigma^\perp$, которая сосредоточена на некоторой последовательности $\{t_k\}$, т. е. является чистой функцией скачков с бесконечным числом точек роста.

Пусть $\{\lambda_k\}$ — некоторая последовательность вещественных чисел таких, что $\inf\limits_{n\neq m}|\lambda_n-\lambda_m|\geq\delta>0$ и $\psi(z)$ — целая функция, обладающая свойствами

а) $\psi(i\lambda_n)=0$ $(\forall n)$, $\psi'(i\lambda_n)\neq 0$ $(\forall n)$;

б) вне кружков Γ_n с центрами в точках $i\lambda_n$ и радиусами δ

$$0<m<|\psi(z)|\{e^{\sigma|x|}(1+|x|^{\gamma})\}^{-1}<M \quad (\gamma>1).$$

Положим

$$\widehat{\mu}(x)=\int_R \exp(ixt)d\mu(t),$$

где $\mu(t)$ — чистая функция скачков со скачками $d_n=[\psi'(i\lambda_n)]^{-1}$ в точках $t_n=\lambda_n$. Тогда будем иметь

$$\widehat{\mu}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\lambda_n x}[\psi'(i\lambda_n)]^{-1}.$$

Остается сослаться на теорему Б.Я. Левина ([20], с. 516), в силу которой $\widehat{\mu}(x)=0$ при $-\sigma\leq x\leq\sigma$.

Замечание. Из $\widehat{\mu}_1(x)=\widehat{\mu}_2(x)=0$ при $-\sigma\leq x\leq\sigma$ не следует совпадение $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ $\forall x\in R$. Действительно, если положить

$$\widehat{\mu}_1=\begin{cases}0, & |x|\leq\sigma;\\ x^{-2}, & |x|>\sigma,\end{cases} \qquad \text{и} \qquad \widehat{\mu}_2=\begin{cases}0, & |x|\leq\sigma;\\ x^{-4}, & |x|>\sigma \quad (\sigma>0),\end{cases}$$

то соответствующие им меры $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ определяются формулами

$$\mu_1'(x)=\frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty\frac{\cos xt}{t^2}dt, \quad \mu_2'(x)=\frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty\frac{\cos xt}{t^4}dt.$$

Отсюда видно, что $\mu_1(x)\neq\mu_2(x)$ $\forall x\in R$.

3. Соотношения двойственности

1. Пусть E_σ обозначает $\mathcal{M}_\sigma$ или $\mathcal{N}_{\sigma,0}$, $E_{\sigma,1}$ — единичная сфера в E_σ, $E_\sigma^\perp$ — аннулятор E_σ, $B_{\sigma,1}$ — единичная сфера в B_σ.

Теорема 3. *Пусть $\mu_0(t)$ — любая мера из V_R. Тогда справедливо соотношение двойственности*

$$\sup_{f\in E_{\sigma,1}}\left|\int_R f(t)d\mu_0(t)\right|=\inf_{\mu\in E_\sigma^\perp}\int_R|d\mu_0-d\mu|=\sup_{f\in B_{\sigma,1}}\left|\int_R f(t)d\mu_0(t)\right|, \tag{1}$$

причем существуют $f_0(t)\in B_{\sigma,1}$ и $\mu^*(t)\in E_\sigma^\perp$, которые реализуют sup *и* inf *в этом соотношении.*

Доказательство. Первое равенство следует из того, что E_σ является подпространством C_0, а $\mu_0(t)$ определяет некоторый функционал l_0 из C_0^*. Докажем последнее равенство.

Пусть $\mu(t)\in E_\sigma^\perp$. В силу теоремы 2 $\mu(t)\perp B_\sigma$. Поэтому имеем

$$l_0(f)=\int_R f(t)d\mu_0(t)=\int_R f(t)[d\mu_0(t)-d\mu(t)],$$

$$\sup_{f\in B_{\sigma,1}}|l_0(f)|\leq\inf_{\mu\in E_\sigma^\perp}\int_R|d\mu_0(t)-d\mu(t)|. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$\sup_{f\in B_{\sigma,1}}|l_0(f)|\geq\sup_{f\in E_{\sigma,1}}|l_0(f)|=\inf_{f\in E_\sigma^\perp}\int_R|d\mu_0(t)-d\mu(t)|, \tag{3}$$

т. к. $\mathcal{M}_\sigma\subset B_\sigma$. Из (2) и (3) следует (1). $\square$

Теперь рассмотрим вопрос существования экстремальных элементов. По определению точной верхней грани $\exists\{f_n(t)\} \subset B_{\sigma,1}$ такая, что

$$\lambda = \sup_{f \in B_{\sigma,1}} |l_0(f)| = \sup_{f \in B_{\sigma,1}} \left| \int_R f(t) d\mu_0(t) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_R f_n(t) d\mu_0(t) \right|.$$

С другой стороны, пространство $B_{\sigma,1}$ замкнутое, выпуклое и компактное (в смысле равномерной сходимости на каждом конечном отрезке). Поэтому можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, которая сходится равномерно на R к некоторой $f_0(t) \in B_{\sigma,1} : \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t) = f_0(t)$. Тогда по теореме Лебега будем иметь

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \left| \int_R f_{n_k}(t) d\mu_0(t) \right| = \left| \int_R f_0(t) d\mu_0(t) \right|.$$

Остается доказать существование меры $\mu^*(t) \in E_\sigma^\perp$, на которой реализуется inf в левой части равенства (1).

Пусть $l_0 \in C_0^*$ и $\mu_0(t) \in V_R$ — мера, соответствующая l_0 ($\mu_0 \leftrightarrow l_0$). Тогда для любого функционала $l \in E_\sigma^\perp$ имеем

$$|l_0(f)| = |(l_0 - l)f| = \left| \int_R f(t)[d\mu_0(t) - d\mu(t)] \right|,$$

$$\|l_0\| \le \inf_{l \in E_\sigma^\perp} \|l_0 - l\| = \inf_{\mu \in E_\sigma^\perp} \int_R |d\mu_0 - d\mu|. \tag{4}$$

С другой стороны, по теореме Хана–Банаха существует функционал $L \in C_0^*$, для которого выполняются условия

$$\forall f \in E_\sigma \ \ L(f) = l_0(f) \ \text{ и } \ \|L\| = \|l_0\|.$$

Если теперь положим $l^* = L - l_0$, то будем иметь

$$l^*(f) = 0 \quad (\forall f \in E_\sigma \ \text{ и } \ \forall f \in B_\sigma),$$

т. е. $l^* \in E_\sigma^\perp$. Таким образом, получаем равенства

$$\|l_0\| = \|L\| = \|l_0 - l^*\| = \int_R |d\mu_0 - d\mu^*|,$$

которые показывают, что для функционала $l^* \leftrightarrow \mu^*$ неравенство (4) обращается в равенство и l^* является экстремальным функционалом (т. е. $\mu^* \in E_\sigma^\perp$ — экстремальная мера).

2. Теорема 4. *Пусть $x(t) \in C_0 \setminus B_\sigma$ — любая заданная функция. Тогда справедливо соотношение двойственности*

$$A_\sigma(x; C) = \inf_{y \in B_\sigma} \|x - y\|_C = \inf_{y \in E_\sigma} \|x - y\|_C = \sup_{\mu \in E_{\sigma,1}^\perp} \left| \int_R x(t) d\mu(t) \right|, \tag{5}$$

где $E_{\sigma,1}^\perp$ — единичная сфера в $E_\sigma^\perp$. Существуют $y_0 \in B_\sigma$ и $\mu^* \in E_{\sigma,1}^\perp$, на которых достигаются inf *и* sup *в соотношении* (5).

Доказательство. Достаточно показать, что справедливо соотношение

$$\inf_{y \in B_\sigma} \|x - y\|_C = \sup_{\mu \in E_{\sigma,1}^\perp} \left| \int_R x(t) d\mu(t) \right|.$$

Для этого заметим, что любая мера $\mu(t) \in E_\sigma^\perp$ ортогональна B_σ, поэтому $\forall y \in B_\sigma$

$$\left|\int_R x(t)d\mu(t)\right| = \left|\int_R [x(t) - y(t)]d\mu(t)\right| \le \|x - y\|_C \int_R |d\mu|,$$

$$\sup_{\mu \in E_{\sigma,1}^\perp} \left|\int_R x(t)d\mu(t)\right| \le \inf_{y \in B_\sigma} \|x - y\|_C. \tag{6}$$

С другой стороны, $E_\sigma \subset B_\sigma$, поэтому

$$\inf_{y \in B_\sigma} \|x - y\|_C \le \inf_{y \in B_\sigma} \|x - y\|_C = \sup_{\mu \in E_{\sigma,1}^\perp} \left|\int_R x(t)d\mu(t)\right|. \tag{7}$$

Сопоставление (6) и (7) приводит к (5). $\square$

Существование целой функции $y^*(t) \in B_\sigma$, наименее уклоняющейся от заданной непрерывной функции, является известным фактом (напр., [3], [4]).

Существование $\mu^*(t) \in E_{\sigma,1}^\perp$ следует из того, что $E_{\sigma,1}^\perp$ — выпуклое и замкнутое пространство. Пусть $\{\mu_n\} \subset E_{\sigma,1}^\perp$ и $\mu_n \to \mu^*$. Тогда в силу того, что $E_\sigma \subset C_0$, имеем $\forall y \in E_\sigma$

$$\int_R y(t)d\mu_n(t) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_R y(t)d\mu_n(t) = 0, \quad \int_R y(t)d\mu^*(t) = 0.$$

Это означает, что $\mu^* \in E_\sigma^\perp$. Далее,

$$\lambda = \sup_{\mu \in E_{\sigma,1}^\perp} \left|\int_R x(t)d\mu(t)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_R x(t)d\mu_n(t)\right| = \left|\int_R x(t)d\mu^*(t)\right|,$$

т. к. $x(t) \in C_0$. $\square$

3. В конце заметим, что выбором меры $\mu_0(t)$ можно решать задачи о нахождении таких величин, как

$$\max_f \left|f\left(x_0 + \frac{\pi}{2\sigma}\right) - f\left(x_0 - \frac{\pi}{2\sigma}\right)\right|, \qquad \max_f \left|\sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)\right|$$

при заданных λ_k и x_k;

$$\max_f |f'(x_0)|, \quad \max_f |Af(x_1) + Bf'(x_2)|, \quad \max_f |\sin\alpha f'(x) - \sigma\cos\alpha f(x)| \ \text{ и т. п.},$$

которые были предметом специальных исследований.

Например, если $\mu_0(t)$ будет функцией скачков со скачками $d_k = \frac{4\sigma}{\pi^2}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^2}$ в точках $t_k = x_0 + \frac{(2k+1)\pi}{2\sigma}$ $(\pm k = 0, 1, 2, \dots)$, $x_0 \in R$, то

$$l_0(f) = \frac{4\sigma}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^2} f\left(x_0 + \frac{2k+1}{2\sigma}\pi\right) \equiv f'(x_0).$$

Тем самым получена задача С.Н. Бернштейна о нахождении $\max\limits_{f \in B_{\sigma,1}} |f'(x_0)|$ ([2]; [4], с. 74) и ее решение

$$\max_{f \in B_{\sigma,1}} |f'(x_0)| = \sigma.$$

Литература

1. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
2. Bernstein S.N. Sur une propriété des fonctions entières // Compt. Rend. Acad. Sci. – 1923. – № 176. – P. 1603–1605.
3. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. Ибрагимов И.И. *Экстремальные свойства целых функций конечной степени.* – Баку: Изд.-во АН АзербССР, 1962. – 373 с.
5. Ибрагимов И.И. *Теория приближения целыми функциями.* – Баку: Изд-во "Элм", 1979. – 468 с.
6. Насибов Ф.Г. *Об экстремальных задачах в классе B_σ* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 294. – № 2. – С. 268–271.
7. Насибов Ф.Г. *Аннулятор класса $W_{\sigma,2}$ и некоторые его применения.* – Азер. гос. нефт. акад. – Баку, 1982. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1671-82.
8. Насибов Ф.Г. *О приближении в L_2 целыми функциями* // ДАН АзербССР. – 1986. – Т. 42. – № 4. – С. 3–6.
9. Насибов Ф.Г. *О приближении функций в равномерной метрике и в среднем* // Исследов. по некоторым вопр. конструктивной теории функций и дифференц. уравнений. – Баку: Аз. ИНЕФТЕХИМ, 1983. – С. 23–31.
10. Насибов Ф.Г. *Описание аннулятора одного класса целых функций конечной полустепени и некоторые приложения* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 2. – С. 29–33.
11. Хавинсон С.Я. *Об одной экстремальной задаче теории аналитических функций* // УМН. – 1949. – Т. IV. – Вып. 4. – С. 158–159.
12. Хавинсон С.Я. *Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях* // Матем. сб. – 1955. – № 36. – С. 445–478.
13. Хавинсон С.Я. *Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области* // УМН. – 1963. – Т. XVIII. – Вып. 2. – С. 23–98.
14. Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я. *Исследование свойств экстремальных функций с помощью соотношений двойственности в экстремальных задачах для классов аналитических функций в многосвязных областях* // Матем. сб. – 1959. – Т. 46. – Вып. 2. – С. 195–228.
15. Ахиезер Н.И., Крейн М.Г. *О некоторых вопросах теории моментов.* – Харьков: ОНТИ, 1938. – 253 с.
16. Никольский С.М. *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1946. – № 10. – С. 207–256.
17. Горин Е.А. *Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов* // Вестн. Харьковск. ун-та. – 1980. – № 205. – С. 77–105.
18. Лукач Е. *Характеристические функции.* – М.: Наука, 1979. – 423 с.
19. Boas R. *Entire functions.* – New York: Acad. Press, 1954. – 276 p.
20. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

Азербайджанская государственная нефтяная академия

Поступили
первый вариант 10.06.1997
окончательный вариант 16.08.2000