ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

УДК 517.982

Г.Ш. СКВОРЦОВА, О.Е. ТИХОНОВ

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА В НЕКОММУТАТИВНЫХ L_1-ПРОСТРАНСТВАХ, ЗАМКНУТЫЕ В ТОПОЛОГИИ ЛОКАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ

Введение

В 1973 г. А.В. Бухвалов и Г.Я. Лозановский показали [1], что ограниченные по норме выпуклые множества, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере в "хороших" банаховых решетках измеримых функций, обладают рядом свойств, близких к свойствам компактных множеств (см. также [2] и [3], гл. X, § 5). Эти результаты получили многочисленные полезные приложения в таких областях, как теория оптимального управления, минимаксные теоремы, геометрия банаховых пространств и др. (см. [2] и обзор [4]). В 1992 г. А.В. Бухвалов поставил вопрос о возможности получения "некоммутативной" версии этой теории. Данная работа дает на этот вопрос положительный ответ, а именно, доказывается, что упомянутые выше результаты Бухвалова и Лозановского переносятся на случай пространства самосопряженных интегрируемых по Сигалу операторов, т. е. вещественного L_1-пространства, ассоциированного с точным нормальным полуконечным следом на алгебре Неймана. Для случая конечного следа это утверждение было анонсировано в [5].

Оказалось, что на некоммутативный случай переносится основная схема доказательства из [2]. Естественно, потребовались изменения, связанные со спецификой рассматриваемой ситуации. Так, вместо теоремы Иосиды–Хьюита используется теорема Такесаки о разложении функционала на алгебре Неймана на нормальную и сингулярную составляющие. В § 1 доказывается ряд утверждений для упорядоченных пространств и алгебр Неймана, которые, на взгляд авторов, представляют и определенный самостоятельный интерес. В § 2 приводится ряд понятий и фактов теории интегрирования относительно следа на алгебре Неймана. Параграфы 3 и 4 посвящены получению основного результата. Отметим, что доказательство теоремы в § 4 в своих существенных чертах аналогично доказательству теоремы 1.1 [2].

1. Предварительные результаты

Пусть X — упорядоченное вещественное линейное пространство с конусом положительных элементов X^+, порождающееся этим конусом. Через X^{al} будем обозначать алгебраически сопряженное к X пространство, $(X^{\mathrm{al}})^+$ — дуальный к X^+ конус положительных функционалов. Для $x \in X$ и $f \in (X^{\mathrm{al}})^+$ положим

$$r_f(x) = \inf\{f(x_1) + f(x_2) \mid x_1, x_2 \in X^+,\ x = x_1 - x_2\}.$$

Ясно, что r_f — полунорма на X. Пусть $B_f = \{x \in X \mid r_f(x) \le 1\}$ и B_f° — поляра B_f в X^{al}.

Предложение 1. $B_f^\circ = \{g \in X^{\mathrm{al}} \mid -f \le g \le f\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 95-01-00025 и № 96-01-01256).

Доказательство. Пусть $-f \le g \le f$, $x \in B_f$, $x_1, x_2 \in X^+$, $x = x_1 - x_2$ и $f(x_1) + f(x_2) < 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|g(x)| = |g(x_1 - x_2)| \le |g(x_1)| + |g(x_2)| \le f(x_1) + f(x_2) < 1 + \varepsilon;$$

отсюда заключаем, что $|g(x)| \le 1$, т. е. $g \in B_f^\circ$. Пусть теперь $g \in B_f^\circ$. Если $x \in X^+ \cap B_f$, то $|g(x)| \le f(x)$, следовательно, $-f(x) \le g(x) \le f(x)$ для любого $x \in X^+$, т. е. $-f \le g \le f$. $\square$

Заметим, что

$$r_f(x) = \sup\{|g(x)| \mid g \in B_f^\circ\} \tag{1}$$

для любого $x \in X$, и в случае, когда X является решеткой, $r_f(x) = f(|x|)$.

Далее под порядковым идеалом будем понимать такое линейное подпространство Y пространства X^{al}, что условия $f \in Y$ и $-f \le g \le f$ влекут $g \in Y$. Порядковый идеал Y называется положительно порожденным, если $Y = Y^+ - Y^+$, где $Y^+ = Y \cap (X^{\mathrm{al}})^+$. Через $|\sigma|(X, Y)$ будем обозначать локально выпуклую топологию на X, порожденную семейством полунорм $\{r_f \mid f \in Y^+\}$.

Предложение 2. *Пусть Y — положительно порожденный порядковый идеал в X^{al}, тотальный на X. Тогда топология $|\sigma|(X, Y)$ согласуется с двойственностью $\langle X, Y\rangle$.*

Доказательство. Из равенства (1) следует, что $|\sigma|(X, Y)$ есть топология равномерной сходимости на порядковых интервалах $[-f, f]$, совпадающих с B_f° $(f \in Y^+)$; из положительной порожденности Y следует, что $|\sigma|(X, Y)$ не слабее топологии $\sigma(X, Y)$. Рассмотрим на X локально выпуклую топологию, порожденную семейством всех возможных полунорм на X. По теореме Алаоглу–Бурбаки для любого $f \in Y^+$ порядковый интервал $[-f, f]$ компактен в топологии $\sigma(X^{\mathrm{al}}, X)$. Но Y — порядковый идеал, поэтому $[-f, f] \subset Y$ для любого $f \in Y^+$, откуда следует, что $[-f, f]$ — $\sigma(Y, X)$-компактное абсолютно уравновешенное множество в Y и по теореме Макки–Аренса топология $|\sigma|(X, Y)$ согласуется с двойственностью $\langle X, Y\rangle$. $\square$

Далее в качестве X будет рассматриваться множество эрмитовых ультраслабо непрерывных функционалов на алгебре Неймана, а в качестве положительных функционалов на X — положительные операторы из алгебры.

Введем некоторые обозначения: M — алгебра Неймана операторов, действующих в гильбертовом пространстве H; $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^+$ и M^{pr} — множества самосопряженных операторов, положительных операторов и проекторов из M; $\mathfrak{M}_*$ — вещественное банахово пространство эрмитовых ультраслабо непрерывных функционалов на M, $\mathfrak{M}_*^+$ — конус его положительных элементов. Символом $\|\cdot\|_\infty$ будем обозначать обычную операторную норму на M. Для подмножества $Y \subset M$ через Y^{pr} обозначаем $Y \cap M^{\mathrm{pr}}$, через Y^+ обозначаем $Y \cap \mathfrak{M}^+$.

Предложение 3. *Для $a \in \mathfrak{M}^+$ и $\varphi \in \mathfrak{M}_*$ имеет место соотношение*

$$r_a(\varphi) = \|\varphi(a^{1/2} \cdot a^{1/2})\|. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{M}_*^+$. Тогда

$$\varphi(a^{1/2} \cdot a^{1/2}) = \varphi_1(a^{1/2} \cdot a^{1/2}) - \varphi_2(a^{1/2} \cdot a^{1/2})$$

и

$$\|\varphi(a^{1/2} \cdot a^{1/2})\| \le \|\varphi_1(a^{1/2} \cdot a^{1/2})\| + \|\varphi_2(a^{1/2} \cdot a^{1/2})\| = \varphi_1(a) + \varphi_2(a),$$

откуда $r_a(\varphi) \ge \|\varphi(a^{1/2} \cdot a^{1/2})\|$. Докажем обратное неравенство, воспользовавшись предложением 1 и соотношением (1). Возьмем оператор b такой, что $-a \le b \le a$. Обозначив $c_1 = (a + b)/2$, $c_2 = (a - b)/2$, имеем $a = c_1 + c_2$, $b = c_1 - c_2$, где $c_1, c_2 \in \mathfrak{M}^+$. Хорошо известно, что в этом случае имеют место представления $c_k^{1/2} = u_k a^{1/2}$ $(k = 1, 2)$, где $u_1^* u_1 + u_2^* u_2 \in M^{\mathrm{pr}}$. Тогда

$$\begin{aligned}|\varphi(b)| = |\varphi(c_1 - c_2)| &= |\varphi(a^{1/2} u_1^* u_1 a^{1/2} - a^{1/2} u_2^* u_2 a^{1/2})| \le \\ &\le \|\varphi(a^{1/2} \cdot a^{1/2})\| \, \|u_1^* u_1 - u_2^* u_2\|_\infty \le \|\varphi(a^{1/2} \cdot a^{1/2})\|.\end{aligned}$$

Отсюда $r_a(\varphi) \le \|\varphi(a^{1/2} \cdot a^{1/2})\|$. $\square$

Во избежание неясностей отметим, что положительно порожденный порядковый идеал в $\mathfrak{M}$ автоматически будет и порядковым идеалом в $\mathfrak{M}_*^{\mathrm{al}}$.

Предложение 4. *Для положительно порожденного порядкового идеала Y в $\mathfrak{M}$ эквивалентны следующие условия*:

(i) $\forall b \in \mathfrak{M}^+ \setminus \{0\}\ \ \exists a \in Y^+\ \ (0 \ne a \le b)$;

(ii) $\forall b \in \mathfrak{M}^+\ \ \exists$ *семейство* $\{a_i\}_{i\in I} \subset Y^+\ \ (b = \sum_I a_i)$;

(iii) $\forall b \in \mathfrak{M}^+\ \ \exists$ *сеть* $\{a_\alpha\} \subset Y^+\ \ (a_\alpha \nearrow b)$;

(iv) $\forall q \in M^{\mathrm{pr}} \setminus \{0\}\ \ \exists p \in Y^{\mathrm{pr}}\ \ (0 \ne p \le q)$;

(v) $\forall q \in M^{\mathrm{pr}}\ \ \exists$ *семейство* $\{p_i\}_{i\in I} \subset Y^{\mathrm{pr}}\ \ (q = \sum_I p_i)$;

(vi) $\forall q \in M^{\mathrm{pr}}\ \ \exists$ *сеть* $\{p_\alpha\} \subset Y^{\mathrm{pr}}\ \ (p_\alpha \nearrow q)$,

где сходимость рядов и сетей можно понимать в смысле сильной операторной топологии.

Доказательство. Импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и (iv) $\Rightarrow$ (v) доказываются стандартным образом. Импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) и (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (iv) тривиальны. Остается доказать (i) $\Leftrightarrow$ (iv).

Докажем (i) $\Rightarrow$ (iv). Пусть $q \in M^{\mathrm{pr}} \setminus \{0\}$, $a \in Y^+$ и $0 \ne a \le q$. Тогда для носителя оператора a выполняется соотношение $0 \ne \mathrm{supp}(a) \le q$. Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы спектральный проектор p оператора a, соответствующий интервалу $[\lambda, +\infty)$, был отличен от нуля. Тогда $p \in Y^{\mathrm{pr}}$ и $0 \ne p \le \mathrm{supp}(a) \le q$.

Докажем, наконец, (iv) $\Rightarrow$ (i). Пусть $b \in \mathfrak{M}^+ \setminus \{0\}$. В $\mathfrak{M}$ найдется ненулевой проектор q такой, что $q \le \lambda b$ при некотором $\lambda > 0$. Возьмем $p \in Y^{\mathrm{pr}}$ такой, что $0 \ne p \le q$. Тогда $\lambda^{-1}p \in Y^+$ и $0 \ne \lambda^{-1}p \le b$. $\square$

Определение. Фундаментом в эрмитовой части $\mathfrak{M}$ алгебры Неймана M назовем положительно порожденный порядковый идеал Y в $\mathfrak{M}$, для которого выполнено одно из эквивалентных условий (i)–(vi) предложения 4.

Замечание 1. Фундамент всегда ультраслабо плотен в $\mathfrak{M}$ и поэтому тотален на $\mathfrak{M}_*$.

Замечание 2. Пусть Y_1, Y_2 — два фундамента. Нетрудно видеть, что вещественная линейная оболочка пересечения $Y_1^+ \cap Y_2^+$ является фундаментом. Таким образом, пересечение двух фундаментов всегда содержит некоторый фундамент.

2. Некоторые сведения из теории некоммутативного интегрирования

Далее будем работать в рамках теории некоммутативного интегрирования (см., напр., [6]). Всюду ниже предполагаем, что на алгебре Неймана M, действующей в гильбертовом пространстве H, выделен точный нормальный полуконечный след τ. Символом $\mathcal{P}$ обозначаем множество $\{p \in M^{\mathrm{pr}} \mid \tau(p) < \infty\}$.

Пусть x — замкнутый плотно определенный оператор в H, присоединенный к M, $|x|$ — его модуль, $e_\lambda^{|x|}$ — спектральный проектор оператора $|x|$, соответствующий отрезку $[0, \lambda]$. Оператор x называется вполне измеримым, если $\tau(1 - e_\lambda^{|x|}) < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$. Через $\mathcal{K}$ обозначим множество всех вполне измеримых операторов, через $\mathcal{K}^h$ — его подмножество самосопряженных операторов. $\mathcal{K}$ является кольцом относительно сильных алгебраических операций (сумма и произведение двух операторов из $\mathcal{K}$ определяются как замыкания обычных операторных суммы и произведения). Совокупность множеств

$$K(\varepsilon, \delta, p) = \{x \in \mathcal{K} \mid \exists q \in M^{\mathrm{pr}}\ \ (q \le p,\ \|qxq\|_\infty \le \varepsilon \text{ и } \tau(p - q) \le \delta)\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$, $p \in \mathcal{P}$, образует базис окрестностей нуля отделимой топологии в $\mathcal{K}$, согласованной с линейной структурой. Будем называть эту топологию топологией локальной сходимости по мере (см., напр., [7]). Символ $\xrightarrow{\tau}$ будем использовать для обозначения сходимости в этой топологии.

Если след τ, вдобавок, конечен, то, очевидно, любой замкнутый плотно определенный оператор в H, присоединенный к M, принадлежит $\mathcal{K}$. В этом случае топология локальной сходимости по мере суть топология двусторонней сходимости по мере, и несложно доказывается [8], что она совпадает с топологией сходимости по мере, т. е. с топологией, определяемой базисом окрестностей нуля

$$N(\varepsilon, \delta) = \{x \in \mathcal{K} \mid \exists q \in M^{\mathrm{pr}} \ \ (\|xq\|_\infty \le \varepsilon \text{ и } \tau(1-q) \le \delta)\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$.

Основным объектом дальнейшего исследования является $L_1^h(\tau)$ — пространство самосопряженных операторов, интегрируемых относительно точного нормального полуконечного следа τ, т. е. множество самосопряженных операторов x, присоединенных к M, для которых корректно определена по спектральной теореме и конечна величина $\tau(x)$. Символом $\|\cdot\|_1$ далее обозначается норма в пространстве $L_1^h(\tau)$, определяемая равенством $\|x\|_1 = \tau(|x|)$. Ясно, что $L_1^h(\tau) \subset \mathcal{K}^h$. Отметим, что для $x \in L_1^h(\tau)$ и $a \in \mathfrak{M}$ корректно определено выражение $\tau(xa)$ и что отображение $x \mapsto \tau(x\cdot)$ осуществляет изометрический изоморфизм между $L_1^h(\tau)$ и $\mathfrak{M}_*$. Соотношение (2) можно теперь записать в виде

$$r_a(x) = \tau(|a^{1/2}xa^{1/2}|) = \|a^{1/2}xa^{1/2}\|_1. \tag{3}$$

Можно показать (напр., это следует из результатов работы [7]), что для ограниченного множества D в $L_1^h(\tau)$ эквивалентны следующие условия:

(i) D замкнуто в $\mathcal{K}$ в топологии локальной сходимости по мере;

(ii) D замкнуто в $L_1^h(\tau)$ в топологии локальной сходимости по мере, индуцированной из $\mathcal{K}$.

Пусть след τ полуконечен и $p \in \mathcal{P}$. Каждому оператору x из $\mathcal{K}$ сопоставим оператор x_p, действующий в гильбертовом пространстве pH: областью определения $\mathcal{D}(x_p)$ оператора x_p считаем $\mathcal{D}(px) \cap pH$ и полагаем $x_p\xi = px\xi$ $(\xi \in \mathcal{D}(x_p))$. Ясно, что $x_p = y_p \Leftrightarrow pxp = pyp$ $(x, y \in \mathcal{K})$. Для произвольного подмножества $S \subset \mathcal{K}$ положим $S_p = \{x_p \mid x \in S\}$. Таким образом, M_p есть редуцированная алгебра Неймана операторов в гильбертовом пространстве pH, а ее эрмитова часть есть $\mathfrak{M}_p$. Соотношением $\tau_p(x_p) = \tau(pxp)$ $(x \in \mathfrak{M}^+)$ на M_p выделяется точный нормальный конечный след τ_p. Ясно, что множество всех замкнутых плотно определенных операторов в pH, присоединенных к M_p, совпадает с $\mathcal{K}_p$. Топологию сходимости по мере в $\mathcal{K}_p$ будем связывать со следом τ_p. Пространство самосопряженных операторов, интегрируемых относительно следа τ_p, будем обозначать через $L_1^h(\tau_p)$. Как легко видеть, $L_1^h(\tau_p) = (L_1^h(\tau))_p$. Отметим еще, что если Y — фундамент в $\mathfrak{M}$, то вещественная линейная оболочка множества $\{y_p \mid y \in Y^+, \ y = pyp\}$ является фундаментом в $\mathfrak{M}_p$. Этот фундамент будем обозначать через $Y^{(p)}$. Нетрудно видеть, что если $x_\alpha \to x$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau), Y)$, то $(x_\alpha)_p \to x_p$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau_p), Y^{(p)})$.

Из определения топологии локальной сходимости по мере и замечаний, сделанных выше для алгебры Неймана с конечным следом, нетрудно заключить, что сеть $\{x_\alpha\} \subset \mathcal{K}$ сходится локально по мере к $x \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathcal{P}$ сеть $\{(x_\alpha)_p\}$ сходится по мере к x_p в $\mathcal{K}_p$.

3. Леммы

Лемма 1. *Пусть Y — фундамент в $\mathfrak{M}$. Если $\{x_\alpha\}$ — такая сеть в $L_1^h(\tau)$, что $x_\alpha \to 0$ в топологии $|\sigma|(L_1^h(\tau), Y)$, то $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon, \delta > 0$, $p_0 \in \mathcal{P}$. Так как Y — фундамент, то найдется $p \in Y^{\mathrm{pr}}$, для которого $p \le p_0$ и $\tau(p_0 - p) \le \delta/2$. Тогда $r_p(x_\alpha) = \tau(|px_\alpha p|) \to 0$ и отсюда нетрудно убедиться в существовании индекса α_0 такого, что при $\alpha \succeq \alpha_0$ найдется проектор q_α, не превосходящий p, для которого $\|q_\alpha p x_\alpha p q_\alpha\|_\infty \le \varepsilon$ и $\tau(p - q_\alpha) \le \delta/2$. При $\alpha \succeq \alpha_0$ тогда имеем $\|q_\alpha x_\alpha q_\alpha\|_\infty = \|q_\alpha p x_\alpha p q_\alpha\|_\infty \le \varepsilon$ и $\tau(p_0 - q_\alpha) \le \delta$. Таким образом, $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$. $\square$

Лемма 2. *Пусть Y — фундамент в $\mathfrak{M}$. Если $\{x_\alpha\}$ — сеть в $L_1^h(\tau)$ такая, что $x_\alpha \to 0$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau), Y)$, то существует сеть $y_\beta \xrightarrow{\tau} 0$, где каждый элемент y_β есть выпуклая комбинация элементов $\{x_\alpha\}$.*

Доказательство. Согласно предложению 1 топология $|\sigma|(L_1^h(\tau), Y)$ согласуется с двойственностью $\langle L_1^h(\tau), Y\rangle$, поэтому справедливость леммы 2 следует из леммы 1. $\square$

Лемма 3. *Пусть след τ конечен, Y — фундамент в $\mathfrak{M}$, $\{x_\alpha\}$ — сеть в $L_1^h(\tau)$, $x, x_0 \in L_1^h(\tau)$. Если существует $y \in \mathcal{K}^h$ такой, что $-y \le x_\alpha \le y$ при любом α, $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ и $x_\alpha \to x_0$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau), Y)$, то $x = x_0$.*

Доказательство. Зафиксируем вначале $k \in \mathbb{N}$. Пусть e_k^y — спектральный проектор оператора y, соответствующий отрезку $[0, k]$. В Y^{pr} найдется проектор p_k, не превосходящий e_k^y и такой, что $\tau(e_k^y - p_k) \le 1/k$. Тогда

$$-p_k y p_k \le p_k x_\alpha p_k \le p_k y p_k,$$
$$p_k x_\alpha p_k \xrightarrow[\alpha]{\tau} p_k x p_k,$$
$$p_k y p_k \in M^h \subset L_1^h(\tau).$$

Воспользуемся некоммутативной версией теоремы Лебега о мажорированной сходимости ([9], теорема 5.3). Ее версия для сетей получается из соответствующего утверждения для последовательностей точно так же, как и в коммутативном случае ([3], теорема III.3.7). Получаем $\|p_k x_\alpha p_k - p_k x p_k\|_1 \underset{\alpha}{\to} 0$.

Возьмем произвольный оператор $a \in \mathfrak{M}$. Так как Y — порядковый идеал, а $p_k \in Y$, то $p_k a p_k \in Y$. Тогда

$$\tau(p_k x_\alpha p_k a) = \tau(x_\alpha p_k a p_k) \underset{\alpha}{\to} \tau(x_0 p_k a p_k) = \tau(p_k x_0 p_k a).$$

С другой стороны,

$$|\tau((p_k x_\alpha p_k - p_k x p_k) a)| \le \|a\|_\infty \|p_k x_\alpha p_k - p_k x p_k\|_1 \underset{\alpha}{\to} 0.$$

Таким образом, $p_k x_\alpha p_k$ сходится по α в топологии $\sigma(L_1^h(\tau), \mathfrak{M})$ и к $p_k x_0 p_k$, и к $p_k x p_k$, поэтому $p_k x_0 p_k = p_k x p_k$.

Устремляя теперь k к бесконечности и осуществляя предельный переход в топологии сходимости по мере, получим $x_0 = x$. $\square$

Лемма 4. *Пусть след τ конечен, $\{x_n\}$ — сходящаяся по мере последовательность элементов $\mathcal{K}^h$. Тогда из нее можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $-y \le x_{n_k} \le y$ для некоторого $y \in \mathcal{K}^+$ и всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Как известно ([8], теорема 4), из сходящейся по мере к $x \in \mathcal{K}^h$ последовательности $\{x_n\} \subset \mathcal{K}^h$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к тому же самому пределу с регулятором, т. е. такую, что существуют $z \in \mathcal{K}^+$ и убывающая по k к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_{n_k}\}$, для которых $-\varepsilon_{n_k} z \le x_{n_k} - x \le \varepsilon_{n_k} z$. Тогда $-(\max\limits_k\{\varepsilon_{n_k}\} z + |x|) \le x_{n_k} \le \max\limits_k\{\varepsilon_{n_k}\} z + |x|$. $\square$

Далее через $\varkappa$ будем обозначать каноническое вложение пространства $L_1^h(\tau)$ в пространство $\mathfrak{M}^*$, которое естественным образом отождествляется с совокупностью эрмитовых непрерывных по норме функционалов на M. Через Pr будем обозначать ограничение на $\mathfrak{M}^*$ проектора Такесаки, фигурирующего в его теореме о разложении непрерывного по норме функционала на алгебре Неймана в виде суммы нормального и сингулярного функционалов (см. [11], [12]). Отметим, что Pr действует из $\mathfrak{M}^*$ на $\varkappa(L_1^h(\tau))$ и модуль $|\varphi|$ сингулярного функционала φ также сингулярен.

Лемма 5. *Если сеть $\{x_\alpha\}$ в $L_1^h(\tau)$ такова, что $\varkappa(x_\alpha)\to\varphi$ в слабой топологии $\sigma(\mathfrak{M}^*,\mathfrak{M})$ и $\Pr\varphi=\varkappa(x)$ для некоторого $x\in L_1^h(\tau)$, то существует фундамент Y в $\mathfrak{M}$ такой, что $x_\alpha\to x$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau),Y)$.*

Доказательство. Если $\varphi_1=\varphi-\varkappa(x)$, то функционал φ_1 сингулярен. Вещественная линейная оболочка Y множества $\{b\in\mathfrak{M}^+\mid|\varphi_1|(b)=0\}$ является фундаментом в $\mathfrak{M}$. Пусть $a\in Y$, тогда $a=a_1-a_2$ для некоторых $a_1,a_2\in\{b\in\mathfrak{M}^+\mid|\varphi_1|(b)=0\}$. Имеем $\tau(x_\alpha a)=[\varkappa(x_\alpha)](a)\to\varphi(a)=[\varkappa(x)](a)+\varphi_1(a_1-a_2)=\tau(xa)$, т. е. $x_\alpha\to x$ $(\sigma(L_1^h(\tau),Y))$. □

4. Основная теорема

Теорема. *Пусть V — непустое выпуклое подмножество $L_1^h(\tau)$, W — $\sigma(\mathfrak{M}^*,\mathfrak{M})$-замыкание множества $\varkappa(V)$. Тогда*

a) *если V замкнуто в топологии локальной сходимости по мере в $L_1^h(\tau)$, то*

$$\Pr W=\varkappa(V);\tag{4}$$

b) *если V ограничено и удовлетворяет (4), то V замкнуто в топологии локальной сходимости по мере в $L_1^h(\tau)$.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение a). Очевидно, $\Pr W\supset\varkappa(V)$. Убедимся в справедливости обратного включения. Пусть $w\in W$ и $\Pr w=\varkappa(x)$, где $x\in L_1^h(\tau)$. Существует сеть $\{x_\alpha\}$ в V такая, что $\varkappa(x_\alpha)\to w$ в топологии $\sigma(\mathfrak{M}^*,\mathfrak{M})$. По лемме 5 существует фундамент Y в $\mathfrak{M}$ такой, что $x_\alpha\to x$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau),Y)$. Тогда по лемме 2 найдется сеть $\{y_\beta\}$ в V такая, что $y_\beta\xrightarrow{\tau}x$. И т. к. V замкнуто локально по мере, то $x\in V$.

Перейдем к доказательству утверждения b). Заметим, что W является $\sigma(\mathfrak{M}^*,\mathfrak{M})$-компактным, т. к. $\varkappa(V)$ ограничено.

Пусть $p\in\mathcal{P}$. Ясно, что V_p — непустое выпуклое ограниченное подмножество $L_1^h(\tau_p)$. Обозначим через $\varkappa^{(p)}$ каноническое вложение пространства $L_1^h(\tau_p)$ в $\mathfrak{M}_p^*$ — пространство, сопряженное к эрмитовой части $\mathfrak{M}_p$ редуцированной алгебры Неймана M_p, отождествляемое с совокупностью эрмитовых непрерывных по норме функционалов на M_p. Через $W^{(p)}$ обозначим замыкание множества $\varkappa^{(p)}(V_p)$ в топологии $\sigma(\mathfrak{M}_p^*,\mathfrak{M}_p)$; через $\Pr^{(p)}$ — ограничение на $\mathfrak{M}_p^*$ соответствующего проектора Такесаки. Дальнейшее доказательство проведем по следующему плану:

1) докажем, что $\Pr^{(p)}W^{(p)}=\varkappa^{(p)}(V_p)$ для любого $p\in\mathcal{P}$;

2) докажем, что если для любого $p\in\mathcal{P}$ множество V_p замкнуто по мере в $L_1^h(\tau_p)$, то V замкнуто локально по мере в $L_1^h(\tau)$;

3) докажем п. b) для случая конечного следа.

Поскольку для любого $p\in\mathcal{P}$ след τ_p на M_p конечен, то из 3) и 1) будет следовать, что V_p замкнуто по мере в $L_1^h(\tau_p)$. Согласно 2) отсюда будет следовать справедливость п. b) теоремы.

1) Возьмем $p\in\mathcal{P}$. Очевидно, $\Pr^{(p)}W^{(p)}\supset\varkappa^{(p)}(V_p)$. Докажем обратное включение. Пусть $w\in W^{(p)}$ и $\Pr^{(p)}w=\varkappa^{(p)}(x)$, где $x\in L_1^h(\tau_p)$. Тогда существует сеть $\{x_\alpha\}$ в V такая, что $\varkappa^{(p)}((x_\alpha)_p)\to w$ в топологии $\sigma(\mathfrak{M}_p^*,\mathfrak{M}_p)$. Так как W $\sigma(\mathfrak{M}^*,\mathfrak{M})$-компактно, то из $\{x_\alpha\}$ можно выбрать подсеть $\{x_\beta\}$ такую, что $\varkappa(x_\beta)\to z\in W$ $(\sigma(\mathfrak{M}^*,\mathfrak{M}))$. В силу соотношения (4) $\Pr z=\varkappa(x_0)$ для некоторого $x_0\in V$. Докажем, что $x=(x_0)_p$, т. е. $x\in V_p$. Так как $\varkappa^{(p)}((x_\beta)_p)\to w$ в топологии $\sigma(\mathfrak{M}_p^*,\mathfrak{M}_p)$, то по лемме 5 существует такой фундамент Z в $\mathfrak{M}_p$, что $(x_\beta)_p\to x$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau_p),Z)$. Так как $\varkappa(x_\beta)\to z$ $(\sigma(\mathfrak{M}^*,\mathfrak{M}))$, то по лемме 5 существует такой фундамент Y в $\mathfrak{M}$, что $x_\beta\to x_0$ $(\sigma(L_1^h(\tau),Y))$, поэтому $(x_\beta)_p\to(x_0)_p$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau_p),Y^{(p)})$, где $Y^{(p)}$ — фундамент в $\mathfrak{M}_p$ (см. § 2). В силу замечаний 1 и 2 § 1 топология $\sigma(L_1^h(\tau_p),Z\cap Y^{(p)})$ отделима, и т. к. $(x_\beta)_p\to x$ и $(x_\beta)_p\to(x_0)_p$ в этой топологии, то $x=(x_0)_p$.

2) Пусть для любого $p\in\mathcal{P}$ множество V_p замкнуто по мере в $L_1^h(\tau_p)$ и пусть сеть $\{x_\alpha\}\subset V$ сходится локально по мере к $x\in L_1^h(\tau)$. Тогда, как отмечалось в § 2, $(x_\alpha)_p$ сходится по мере к x_p для любого $p\in\mathcal{P}$. Из замкнутости V_p вытекает, что $x_p\in V_p$. Таким образом, для каждого

$p \in \mathcal{P}$ найдется элемент $z^{(p)} \in V$ такой, что $(z^{(p)})_p = x_p$, т. е. такой, что $pz^{(p)}p = pxp$. Поскольку $\mathcal{P}$ направлено по включению, то $\{z^{(p)}\}$ образует сеть в V. Так как W $\sigma(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{M})$-компактно, найдется такая подсеть $\{z_\beta\}$ сети $\{z^{(p)}\}$, что $\varkappa(z_\beta) \to w \in W$ $(\sigma(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{M}))$. По условию (4) $\Pr w = \varkappa(x_0)$ для некоторого $x_0 \in V$. Покажем, что $x = x_0$, установив, что $pxp = px_0p$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Действительно, в силу леммы 5 существует фундамент Y в $\mathfrak{M}$ такой, что $z_\beta \to x_0$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau), Y)$. Зафиксируем $p' \in \mathcal{P}$. Так как $\{z_\beta\}$ — подсеть $\{z^{(p)}\}$, то по p' найдется β' такое, что из $\beta \succeq \beta'$ следует $z_\beta = z^{(q)}$ при некотором $q \geq p'$, $q \in \mathcal{P}$. Отсюда для любого $\beta \succeq \beta'$ имеем $p'z_\beta p' = p'z^{(q)}p' = p'qz^{(q)}qp' = p'qxqp' = p'xp'$, т. е. $(z_\beta)_{p'} = x_{p'}$. Но $(z_\beta)_{p'} \to (x_0)_{p'}$ в топологии $\sigma(L_1^h(\tau_{p'}), Y^{(p')})$. Значит, $x_{p'} = (x_0)_{p'}$, т. е. $p'xp' = p'x_0p'$. Так как p' произвольно, то $x = x_0 \in V$.

3) Докажем, наконец, замкнутость V в предположении, что след τ конечен. В этом случае топология сходимости по мере метризуема. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset V$ сходится по мере к $x \in L_1^h(\tau)$. Как следует из леммы 4, можно считать, что $-y \leq x_n \leq y$ для некоторого $y \in \mathcal{K}^+$. В силу компактности W существует подсеть $\{x_\alpha\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что $\varkappa(x_\alpha) \underset{\alpha}{\to} \varphi \in W$ в топологии $\sigma(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{M})$. В силу условия (4) и леммы 5 существуют фундамент Y в $\mathfrak{M}$ и элемент $x_0 \in V$ такие, что $x_\alpha \to x_0$ $(\sigma(L_1^h(\tau), Y))$. Так как $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ как подсеть сходящейся по мере последовательности, то по лемме 3 $x = x_0 \in V$.

Таким образом, п. b) теоремы доказан. $\square$

Проиллюстрируем возможные приложения теоремы.

Следствие 1. Пусть V_1 и V_2 — непересекающиеся подмножества $L_1^h(\tau)$, причем каждое из них непусто, выпукло и замкнуто в топологии локальной сходимости по мере в $L_1^h(\tau)$. Если хотя бы одно из них ограничено, то существует $a \in \mathfrak{M}$ такой, что

$$\sup\{\tau(xa) \mid x \in V_1\} < \inf\{\tau(xa) \mid x \in V_2\}.$$

Следствие 2. Выпуклый функционал на $L_1^h(\tau)$ со значениями в $(-\infty, +\infty]$, полунепрерывный снизу относительно топологии локальной сходимости по мере, достигает минимума на всяком замкнутом в этой топологии, ограниченном по норме, выпуклом, непустом подмножестве $L_1^h(\tau)$.

Доказательства этих следствий фактически ничем не отличаются от доказательств соответствующих утверждений в [3] (теоремы X.5.2 и X.5.6). Другие возможные применения можно почерпнуть из [2] и [4].

Литература

1. Бухвалов А.В., Лозановский Г.Я. *О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 212. – № 6. – С. 1273–1275.
2. Бухвалов А.В., Лозановский Г.Я. *О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1977. – Т. 34. – С. 129–150.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
4. Bukhvalov A.V. *Optimization without compactness and its applications* // Operator Theory: Advances and Applications. – 1995. – V. 75. – P. 95–112.
5. Тихонов О.Е. *Замкнутые по мере выпуклые множества в некоммутативных L^1-пространствах* // XXVI Воронежская зимняя матем. школа: Сб. науч. тр. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1994. – С. 90.
6. Yeadon F.J. *Non-commutative L^p-spaces* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1975. – V. 77. – № 1. – P. 91–102.
7. Dodds P.G., Dodds Th. K.-Y., de Pagter B. *Noncommutative Köthe duality* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1993. – V. 339. – № 2. – P. 717–750.

8. Муратов М.А. *Сходимости в кольце измеримых операторов* // Сб. научн. трудов Ташкентск. ун-та. – 1978. – Т. 573. – С. 51–58.
9. Padmanabhan A.R. *Convergence in measure and related results in finite rings of operators* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 128. – № 3. – P. 359–378.
10. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы.* Ч. 1: *Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
11. Takesaki M. *Theory of operator algebras.* I. – Springer-Verlag, 1979. – 415 c.
12. Takesaki M. *On the conjugate space of operator algebra* // Tôhoku Math. J. – 1958. – V. 10. – № 2. – P. 194–203.

Казанский государственный университет

Поступила 27.11.1995