ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 517.43

В.Б. ЛЕВЕНШТАМ

ПОСТРОЕНИЕ СТАРШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Первые работы, посвященные построению с математическим обоснованием старших приближений метода усреднения для полулинейных параболических начально-краевых задач произвольного порядка, принадлежат И.Б. Симоненко [1], [2]. В них автор, отправляясь от решения соответствующей усредненной задачи и используя метод Ньютона–Канторовича и некоторые идеи метода усреднения [3], строит рекуррентную последовательность линейных параболических задач, решения которых являются старшими приближениями решения исходной (возмущенной) задачи. Правые же части этих линейных задач зависят от большого параметра — частоты осцилляций коэффициентов возмущенной задачи, так что требуется еще асимптотическое интегрирование этих линейных задач, которое, как и полагал И.Б. Симоненко, можно осуществить методом пограничного слоя [4] с соответствующим обоснованием. В данной статье построение старших приближений для первой параболической начально-краевой задачи произвольного порядка осуществляется с обоснованием, по-видимому, более естественно — путем применения метода пограничного слоя непосредственно к исходной полулинейной задаче. Старшие приближения аппроксимируют решение возмущенной задачи по сколь угодно сильной гёльдеровой норме. При этом, однако, на осциллирующие с нулевым средним слагаемые исходного уравнения пришлось наложить существенно более жесткие ограничения (см. условие (3) ниже), нежели те, которые необходимы для принадлежности этого решения соответствующему гёльдерову пространству. Для первой параболической начально-краевой задачи второго порядка используемый здесь алгоритм построения старших приближений обоснован в [5].

1°. Пусть m, k и s — натуральные числа, $T>0$, Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ с C^∞-гладкой границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q=\overline{\Omega}\times[0,T]$ с боковой поверхностью $\Gamma=\partial\Omega\times(0,T]$ рассмотрим в обычной классической постановке задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{|\alpha|=2k}a_\alpha(x)D^\alpha u=\sum_{|\ell|\leqslant s}f_\ell(x,t,\delta^{2k-1}u)e^{i\ell\omega t}, \tag{1}$$

$$u\big|_\Gamma=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=\cdots=\frac{\partial^{k-1}u}{\partial n^{k-1}}\Big|_\Gamma=0,\quad u(x,0)=\varphi(x). \tag{2}$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $D^\alpha u\equiv\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}$, $x=(x_1,\dots,x_m)$, $\delta^{2k-1}u$ — вектор–функция, составленная из функции u и ее всевозможных производных по x до порядка $2k-1$ включительно, n — внутренняя нормаль к Γ, ω — большой параметр. Относительно функций a_α, f_ℓ и φ предположим следующее.

1. Вещественные функции $a_\alpha(x)$ бесконечно дифференцируемы при $x\in\overline{\Omega}$, и для задачи (1)–(2) выполнено условие равномерной параболичности, т. е. при всех $x\in\overline{\Omega}$ и ненулевых век-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00678) и научной программы “Университеты России” (грант № УР.04.01.029).

торах $\sigma \in \mathbb{R}^m$

$$(-1)^{k+1} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x)\sigma^\alpha \geqslant c|\sigma|^{2k}, \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

2. Обозначим через p размерность вектора $(\delta^{2k-1}u)(x)$. Пусть D — ограниченная область комплексного пространства $\mathbb{C}^p$, а N_0 — некоторое целое неотрицательное число, конкретнее о котором будет сказано в теореме. Предположим, что $f_\ell(x,t,e)$, где $e = (e_1,\dots,e_p) \in D$, $|\ell| \leqslant s$ — комплекснозначные функции, которые определены на множестве $Q \times D$ и бесконечно дифференцируемы, причем при $0 < |\ell| \leqslant s$ справедливы равенства

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} D^\alpha f_\ell(x,t,e)\Big|_{(x,t)\in\partial\Omega\times\{0\}} = 0, \quad j + |\alpha| \leqslant N_0. \tag{3}$$

Наряду с задачей (1)–(2) рассмотрим в Q усредненную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) D^\alpha v = f_0(x,t,\delta^{2k-1}v), \tag{4}$$

$$v\big|_\Gamma = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\Gamma = \dots = \frac{\partial^{k-1} v}{\partial n^{k-1}}\Big|_\Gamma = 0, \quad v(x,0) = \varphi(x). \tag{5}$$

3. Предположим, что задача (4)–(5) имеет бесконечно дифференцируемое по переменным x, t решение $v(x,t) = u_0(x,t)$ такое, что при $(x,t) \in Q$ имеет место $(\delta^{2k-1}u_0)(x,t) \in D$.

Согласно [6] при больших ω существует решение u_ω задачи (1)–(2) и для некоторого $\gamma_0 \in (0,1)$ справедливо соотношение

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{|\alpha|\leqslant 2k-1} \|D^\alpha[u_\omega - u_0]\|_{C^{\gamma_0,\gamma_0/2k}} = 0.$$

Здесь через $C^{h,h/2k} \equiv C^{h,h/2k}_{x,t}(Q)$, $h \geqslant 0$, обозначено гёльдерово пространство функций $u(x,t)$, заданных в цилиндре Q, которое для нецелых h определено в [7], а для целых h доопределяется естественным образом. Функция u_0 называется первым приближением решения u_ω по указанной норме.

2°. Перейдем к построению старших приближений метода усреднения в сильных гёльдеровых нормах. Для этого предварительно введем в замыкании $\overline{\Omega}_\eta$ пограничной полоски Ω_η толщины $\eta > 0$ криволинейную систему координат $(\varphi, r) = (\varphi_1,\dots,\varphi_{m-1}, r)$ следующим образом. Определим отображение $\partial\Omega \times [0,\eta] \to \overline{\Omega}_\eta$ по закону $(\varphi, r) \to \varphi + n_\varphi r$, где φ — точка на $\partial\Omega$, имеющая местные ортогональные координаты φ, а n_φ — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке φ. Число η берется столь малым, что указанное отображение обратимо.

Старшие приближения решения u_ω задачи (1)–(2) ищем в виде

$$\overset{n}{u}(x,t,\omega) = \sum_{j=0}^{n} \omega^{-j/2k} u_j(x,t) + \omega^{-1} \sum_{j=0}^{n} \omega^{-j/2k} [v_j(x,t,\omega t) + w_j(\varphi,\rho,t) + z_j(\varphi,\rho,t,\omega t)], \tag{6}$$

где $\rho = r\omega^{1/2k}$, u_j и v_j — регулярные [4], а w_j и z_j — погранслойные [4] функции, причем функции $v_j(x,t,\tau)$ и $z_j(\varphi,\rho,t,\tau)$ — 2π-периодические по τ с нулевым средним

$$\langle v_j\rangle(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_j(x,t,\tau)\,d\tau = 0, \quad \langle z_j\rangle = 0,$$

а функции w_j и z_j в области $\Omega \setminus \Omega_\eta$ равны нулю.

В пункте 3° будет описан алгоритм построения коэффициентов приближений $\overset{n}{u}$, при котором справедлива

Теорема. *Существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ для любого $h \geqslant 0$ и любого натурального n найдется такое число N_0, что при выполнении условий п. 1° с этим значением N_0 в (3) имеют место оценки*

$$\|u_\omega - \overset{n}{u}\|_{C^{h,h/2k}(Q)} \leqslant C_{n,h}\omega^{-\frac{n+1-\max(h-2k,0)}{2k}}, \quad C_{n,h} = \text{const}\,.$$

Построение приближения $\overset{n}{u}$ при известном решении u_0 усредненной задачи сводится к решению n однозначно разрешимых линейных первых начально-краевых задач для параболических уравнений $Pu = \varphi(x,t)$ в Q порядка $2k$ с единым дифференциальным выражением P.

Замечание 1. Предположения п. 1° о бесконечной дифференцируемости границы $\partial\Omega$ и функций a_α, f_ℓ и u_0, естественно, могут быть заменены на требования их непрерывной дифференцируемости вплоть до определенных конечных порядков (зависящих от h и n) так, что при этой замене утверждения теоремы сохраняются.

Замечание 2. В условии (3) функцию $f_\ell(x,t,e)$ можно заменить на функцию $\widetilde{f}_\ell(x,t) = f_\ell[x,t,\delta^{2k-1}u_0(x,t)]$.

3°. Опишем схему нахождения неизвестных функций u_j, v_j, w_j и z_j, входящих в представление (6) старших приближений. При этом будем пользоваться, как принято в методе пограничного слоя [4], представлением эллиптической части уравнения (1) в переменных (φ,ρ):

$$\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x)D^\alpha u = \omega\Big[b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k}u}{\partial\rho^{2k}} + \sum_{j=1}^{N}\omega^{-j/2k}M_j(\varphi,\rho)u + \omega^{-\frac{N+1}{2k}}M_{N+1}(\varphi,\rho;r)u\Big], \tag{7}$$

где $b_{2k} \in C^\infty(\partial\Omega)$, $(-1)^{k+1}b_{2k} > 0$; N — натуральное число; M_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, и M_{N+1} — дифференциальные выражения относительно φ, ρ с бесконечно дифференцируемыми по (φ,ρ) и соответственно по (φ,r) коэффициентами.

Подставим выражение (6) приближения $\overset{n}{u}$ вместо u в равенства (1)–(2), разложим функции $f_\ell(x,t,\delta^{2k-1}\overset{n}{u})$ в ряды Тейлора по последним p аргументам с центром $\delta^{2k-1}u_0$ и, учитывая (7), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω, стоящих в разных частях каждого из полученных равенств, отдельно для регулярных и погранслойных функций. Каждое из составленных таким образом уравнений разобьем на уравнения для плавных, т. е. не зависящих от $\tau = \omega t$ и осциллирующих по τ с нулевым средним коэффициентов. В результате для u_0 получаем полулинейную усредненную задачу (4)–(5), которая по условию разрешима. Для функции $v_0(x,t,\tau)$ получаем задачу

$$\frac{\partial v_0}{\partial\tau} = \sum_{0<|\ell|\leqslant s} f_\ell(x,t,\delta^{2k-1}u_0)e^{i\ell\tau}, \quad \langle v_0\rangle = 0,$$

где x, t играют роль параметров, и которая, очевидно, однозначно разрешима. При этом в силу условия (3) справедливы соотношения

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j}D^\alpha v_0(x,t,\tau)\Big|_{(x,t)\in\partial\Omega\times\{0\}} = 0, \quad j+|\alpha| \leqslant N_0. \tag{8}$$

Функции u_i, v_i, $i \geqslant 1$, являются решениями линейных задач вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x)D^\alpha u_i - [(D_e f_0)(x,t,\delta^{2k-1}u_0)](\delta^{2k-1}u_i) = \psi_i(x,t), \tag{9}$$

$$u_i\big|_\Gamma = -w_{i-2k}\Big|_{\rho=0}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial n}\Big|_\Gamma = -\frac{\partial w_{i-2k+1}}{\partial\rho}\Big|_{\rho=0}, \dots, \frac{\partial^{k-1}u_i}{\partial n^{k-1}}\Big|_\Gamma =$$
$$= -\frac{\partial^{k-1}w_{i-k-1}}{\partial\rho^{k-1}}\Big|_{\rho=0}, \quad u_i(x,0) = -v_{i-2k}(x,0,0), \tag{10}$$

$$\frac{\partial v_i(x,t,\tau)}{\partial \tau} = \chi_i(x,t,\tau), \quad \langle v_i \rangle = 0. \tag{11}$$

Здесь $[(D_e f_0)(x,t,\overset{\circ}{e})](e) = \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{\partial f_0(x,t,\overset{\circ}{e})}{\partial e_i} e_i$; ψ_i и χ_i — бесконечно дифференцируемые функции, которые выражаются через u_j, v_j, $j \leqslant i-1$, а v_i, w_i при $i < 0$ полагаются нулями.

Задачи для функций w_i, z_i, $i \geqslant 0$, в погранполоске имеют вид

$$b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k} w_i}{\partial \rho^{2k}} = \lambda_i(\varphi,\rho,t), \quad w_i\big|_{\rho=\infty} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial z_i(\varphi,p,t,\tau)}{\partial \tau} - b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k} z_i(\varphi,p,t,\tau)}{\partial \rho^{2k}} = \mu_i(\varphi,\rho,t,\tau), \quad z_i\big|_{\rho=\infty} = 0, \tag{13}$$

$$z_i\big|_{\rho=0} = -v_i\big|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial \rho}\Big|_{\rho=0} = -\frac{\partial v_{i-1}}{\partial n}\Big|_{\Gamma}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} z_i}{\partial \rho^{k-1}}\Big|_{\rho=0} = -\frac{\partial v_{i-k+1}}{\partial n^{k-1}}\Big|_{\Gamma}, \tag{14}$$

где λ_i, μ_i — бесконечно дифференцируемые функции, которые выражаются через u_j, v_j, w_j, z_j, $j \leqslant i-1$.

Докажем теперь, что задачи (9)–(10), (11), (12) и (13)–(14) однозначно разрешимы. Пусть для простоты в условии (3) $N_0 = \infty$. Итак, определив функции u_0, v_0, переходим к задаче (12) при $i = 0$

$$b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k} w_0}{\partial \rho^{2k}} = 0, \quad w_0\big|_{\rho=\infty} = 0$$

с единственным решением $w_0 = 0$ и к задаче (13)–(14) при $i = 0$

$$\frac{\partial z_0}{\partial \tau} - b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k} z_0}{\partial \rho^{2k}} = 0, \quad z_0\big|_{\rho=\infty} = 0,$$

$$z_0\big|_{\rho=0} = -v_0\big|_{\partial\Omega}, \quad \frac{\partial z_0}{\partial \rho}\Big|_{\rho=0} = 0, \ldots, \frac{\partial^{k-1} z_0}{\partial \rho^{k-1}}\Big|_{\rho=0} = 0,$$

которая в силу соотношений (8) и сформулированной ниже леммы также однозначно разрешима и при любых целых неотрицательных числах j для ее решения z_0 справедливы равенства

$$\frac{\partial^j z_0(\varphi,\rho,t,\tau)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = 0. \tag{15}$$

Задача (9)–(10) при $i = 1$ является линейной однородной начально-краевой задачей с единственным решением $u_1 = 0$. Предположим теперь, что при всех $0 \leqslant i < i_0$, где i_0 — некоторое натуральное число, найдены функции u_{i+1}, v_i, w_i и z_i, причем для u_{i+1} и v_i выполнены те же соотношения (8), что и для v_0, а для w_i и z_i — те же соотношения (15), что и для z_0. Предположим еще, что функции λ_i являются конечными суммами функций вида $c(\varphi,t)\rho^n e^{-\lambda\rho}$, где $n \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, а функции $c(\varphi,t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^j c(\varphi,t)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = 0, \quad j = 0,1,\ldots \tag{16}$$

Функции же μ_i являются тригонометрическими полиномами по τ с нулевым средним, коэффициенты которых имеют ту же структуру, что и λ_i. Докажем, что функции u_{i_0+1}, v_{i_0}, w_{i_0} и z_{i_0} однозначно определены (как решения рассматриваемых задач) и для них справедливы высказанные предположения. Действительно, в силу этих предположений данные линейной начально-краевой задачи (9)–(10) при $i = i_0 + 1$ сколь угодно гладкие и для нее выполнены условия согласования сколь угодно высокого порядка, откуда следует ее однозначная разрешимость и справедливость для решения u_{i_0+1} соотношений

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} D^\alpha u_{i_0+1}\Big|_{(x,t)\in\partial\Omega\times\{0\}} = 0, \quad j, |\alpha| = 0,1,\ldots$$

Легко исследуется и задача (11) при $i = i_0$. Здесь дополнительно учитывается, что χ_{i_0} — тригонометрический многочлен по τ с нулевым средним. Однозначная разрешимость задач (12) и (13)–(14) и справедливость для их решений высказанных предположений вытекает из следующего простого утверждения.

Лемма. *Пусть* $c_i(\varphi, t)$, $i = 0, 1, \dots, k$, *— сколь угодно гладкие на множестве* $\partial\Omega \times [0, T]$ *функции, удовлетворяющие условиям* (16), $\lambda(\varphi)$ *— сколь угодно гладкая на множестве* $\partial\Omega$ *функция,* $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $n \geqslant 0$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$. *Тогда задача*

$$i\ell y - b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k} y}{\partial \rho^{2k}} = c_0(\varphi, t)\rho^n e^{\lambda(\varphi)\rho}, \quad y\big|_{\rho=0} = c_1(\varphi, t),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho}\Big|_{\rho=0} = c_2(\varphi, t), \dots, \frac{\partial^{k-1} y}{\partial \rho^{k-1}}\Big|_{\rho=0} = c_k(\varphi, t), \quad y\big|_{\rho=\infty} = 0,$$

однозначно разрешима и ее сколь угодно гладкое решение $y(\varphi, \rho, t)$ *удовлетворяет равенствам*

$$\frac{\partial^j y(\varphi, \rho, t)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = 0, \quad j = 0, 1, \dots$$

Итак, показали, что приближения $\overset{n}{u}$, заданные соотношением (6), могут быть построены для любого номера n. Доказательство указанной в теореме оценки проводится в два этапа. На первом этапе методами, которые использовались в работе [6], эта оценка доказывается для малых $h \geqslant 0$. На втором этапе она выводится для произвольных $h > 0$ из оценки, полученной на первом этапе, с помощью многократного использования классической априорной оценки [7] для линейной параболической задачи.

Примечание. Описанный применительно к задаче (1)–(2) алгоритм построения старших приближений сохраняется вместе с обоснованием, если в уравнении (1) сомножители $e^{i\ell\omega t}$ заменить сомножителями $e^{i\lambda_\ell \omega t}$, где λ_ℓ, $|\ell| \leqslant s$, — произвольный набор действительных чисел.

Литература

1. Симоненко И.Б. *Старшие приближения метода осреднения для абстрактных параболических уравнений* // Матем. сб. – 1973. – Т. 92. – № 4. – С. 541–549.
2. Симоненко И.Б. *Старшие приближения метода осреднения для параболических уравнений* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 213. – № 6. – С. 1255–1257.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* – М.: Наука, 1974. – 503 с.
4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // УМН. – 1960. – Т. 15. – Вып. 4. – С. 3–95.
5. Левенштам В.Б. *Старшие приближения метода усреднения для параболических начально-краевых задач с быстро осциллирующими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 10. – С. 1395–1403.
6. Симоненко И.Б. *Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений* // Матем. сб. – 1970. – Т. 81. – № 1. – С. 53–61.
7. Солонников В.А. *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1965. – Т. 83. – С. 3–162.

Ростовский государственный университет

Поступила 11.03.2003