ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 12 (427)

УДК 519.853

А.С. АНТИПИН

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК СИММЕТРИЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Постановка проблемы

Рассмотрим задачу вычисления неподвижной точки $v^* \in \Omega^*$ экстремального отображения [1], [2]

$$v^* \in \operatorname{Argmin}\{\Phi(v^*, w) \mid w \in \Omega\}, \tag{1.1}$$

где функция $\Phi(u, v)$ определена на произведении пространств $R^n \times R^n$. Переменная v играет роль параметра, w — переменная оптимизации. Множество $\Omega \subset R^n$ выпуклое замкнутое. Предполагается, что экстремальное (маргинальное) отображение $w(v) \equiv \operatorname{argmin}\{\Phi(v, w) \mid w \in \Omega\}$ определено для всех $v \in \Omega$, а множество решений $\Omega^* \subset \Omega$ исходной задачи непусто.

Как следует из (1.1), любая неподвижная точка удовлетворяет неравенству

$$\Phi(v^*, v^*) \le \Phi(v^*, w) \quad \forall w \in \Omega. \tag{1.2}$$

Это неравенство можно рассматривать как эквивалентное определение неподвижной точки.

Известно, что линейное пространство квадратных матриц имеет два линейных подпространства симметричных и кососимметричных матриц. При этом любая квадратная матрица может быть разложена в сумму двух проекций на эти подпространства. Проводя аналогию между квадратными матрицами и целевыми функциями $\Phi(v, w)$ задачи (1.1), выделим в линейном пространстве этих функций два линейных подпространства, которые характеризуются соотношениями

$$\Phi(w, v) + \Phi(v, w) = 0 \quad \forall w \in \Omega, \quad \forall v \in \Omega; \tag{1.3}$$

$$\Phi(w, v) - \Phi(v, w) = 0 \quad \forall w \in \Omega, \quad \forall v \in \Omega. \tag{1.4}$$

Функции первого класса будем называть кососимметричными, а второго — симметричными. В случае, если область определения этих функций представляет собой квадратную сетку, мы имеем дело с обычными классами кососимметричных и симметричных матриц.

Напомним, что пара точек с координатами w, v и v, w расположена симметрично относительно диагонали квадрата $\Omega \times \Omega$. Это дает нам возможность ввести понятие транспонированной функции [3]. Если каждой точке с координатами v, w поставить в соответствие значение функции $\Phi(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, вычисленной в точке w, v, то получим транспонированную функцию $\Phi^T(v, w)$. В терминах этой функции условия (1.3) и (1.4) имеют вид

$$\Phi(v, w) = -\Phi^T(v, w), \quad \Phi(v, w) = \Phi^T(v, w).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 96-01-01046) и по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта № 96-15-96124).

Используя очевидные соотношения: $\Phi(v,w) = (\Phi^T(v,w))^T$, $(\Phi_1(v,w)+\Phi_2(v,w))^T = \Phi_1^T(v,w) + \Phi_2^T(v,w)$, нетрудно проверить, что вещественную функцию $\Phi(v,w)$ всегда можно представить в виде суммы

$$\Phi(v,w) = S(v,w) + K(v,w),$$

где функция $S(v,w)$ симметричная, а $K(v,w)$ кососимметричная. Это разложение единственно, причем $S(v,w) = \frac{1}{2}(\Phi(v,w)+\Phi^T(v,w))$, $K(v,w) = \frac{1}{2}(\Phi(v,w)-\Phi^T(v,w))$.

В данной работе ограничимся симметричными функциями. Кососимметричный случай рассматривался в [1]–[3].

2. Симметричные функции

Рассмотрим характеристические свойства симметричных функций и их возможные обобщения. Сначала укажем два примера таких функций, которые хорошо известны в экономических приложениях. Первая из них — это функция Кобба-Дугласа, а вторая — функция с постоянной эластичностью замены ресурсов. Они имеют вид соответственно: $\Phi(v,w) = Av^\alpha w^\beta$ и $\Phi(v,w) = A[\alpha v^{-\omega} + \beta w^{-\omega}]^{-\gamma/\omega}$, где $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$, $\gamma > 0$— параметры. Если параметры α и β равны, то эти функции симметричны.

Свойство 1. Частные производные симметричных функций на диагонали квадрата $\Omega\times\Omega$ равны.

Пусть $v, v \in \Omega\times\Omega$, тогда в некоторой окрестности этой точки возьмем две другие с координатами $v+\varepsilon h, v-\varepsilon h$ и $v-\varepsilon h, v+\varepsilon h$, где $\varepsilon > 0$, а h — некоторый фиксированный вектор такой, что любая из этих двух точек принадлежит внутренности квадрата $\Omega\times\Omega$. Для каждой из этих точек выпишем разложение функции $\Phi(v,w)$ по формуле конечных приращений вида

$$f(x+h) - f(x) = \langle\nabla f(x+\vartheta h), h\rangle, \tag{2.1}$$

где $0 \le \vartheta \le 1$, тогда получим

$$\Phi(v+\varepsilon h, v-\varepsilon h) = \Phi(v,v) + \varepsilon\langle\nabla\Phi_v(v+\varepsilon\vartheta_1 h, v-\varepsilon\vartheta_1 h), h\rangle - \varepsilon\langle\nabla\Phi_w(v+\varepsilon\vartheta_1 h, v-\varepsilon\vartheta_1 h), h\rangle$$

и

$$\Phi(v-\varepsilon h, v+\varepsilon h) = \Phi(v,v) - \varepsilon\langle\nabla\Phi_v(v-\varepsilon\vartheta_2 h, v+\varepsilon\vartheta_2 h), h\rangle + \varepsilon\langle\nabla\Phi_w(v-\varepsilon\vartheta_2 h, v+\varepsilon\vartheta_2 h), h\rangle.$$

Подставим левые части полученных разложений в (1.3) и, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\langle\nabla\Phi_v(v,v), h\rangle = \langle\nabla\Phi_w(v,v), h\rangle \quad \forall h \in R^n.$$

Поскольку равенство (2.1) верно для всех $h \in R^n$, то имеем

$$\nabla\Phi_v(v,v) = \nabla\Phi_w(v,v). \tag{2.2}$$

Свойство 2. Оператор $\nabla\Phi_w(v,v)$ является потенциальным на диагонали квадрата $\Omega\times\Omega$.

По определению дифференцируемости функции $\Phi(v,w)$ имеем

$$\Phi(v+h, w+h) = \Phi(v,w) + \langle\nabla\Phi_v(v,w), h\rangle + \langle\nabla\Phi_w(v,w), k\rangle + \omega(v,w,h,k), \tag{2.3}$$

где $\omega(v,w,h,k)/(|h|^2+|k|^2)^{1/2} \to 0$ при $|h|^2+|k|^2 \to 0$. Пусть $w = v$ и $h = k$, тогда с учетом (2.2) и (2.3) получим

$$\Phi(v+h, v+h) = \Phi(v,v) + 2\langle\nabla\Phi_w(v,v), h\rangle + \omega(v,h), \tag{2.4}$$

где $\omega(v,h)/|h| \to 0$ при $|h| \to 0$. Поскольку формула (2.4) является частным случаем (2.3), то она означает, что сужение частного градиента $\nabla\Phi_w(v,w)$ на диагональ квадрата $\Omega\times\Omega$ является градиентом функции $\Phi(v,v)$, т.е.

$$2\nabla\Phi_w(v,w)|_{v=w} = \nabla\Phi(v,v). \tag{2.5}$$

Как следствие из этого факта вытекает справедливость формулы Лагранжа

$$\Phi(v+h,v+h)=\Phi(v,v)+2\int_0^1\langle\nabla\Phi_w(v+th,v+th),h\rangle\,dt.$$

Свойство (2.5) является ключевым, т.к. из него фактически следует, что неподвижные точки задачи (1.1) являются точками минимума функции $\Phi(v,v)$ на диагонали квадрата $\Omega\times\Omega$.

Если градиент функции $\Phi(v,w)$ удовлетворяет условию Липшица, то выполняется неравенство

$$|\Phi(v+h,w+k)-\Phi(v,w)-\langle\nabla\Phi_v(v,w),h\rangle-\langle\nabla\Phi_w(v,w),k\rangle|\le \\ \le\frac{1}{2}L(|h|^2+|k|^2)\quad\forall(v+h,w+k)\in\Omega\times\Omega,\quad(2.6)$$

где L — константа Липшица. Пусть $h=k$, $v=w$ в (2.6), тогда с учетом (2.5) получим

$$|\Phi(v+h,v+h)-\Phi(v,v)-\langle\nabla\Phi(v,v),h\rangle|\le L|h|^2\quad\forall v+h\in\Omega.\qquad(2.7)$$

Свойство 3. Вторая смешанная производная $\nabla^2\Phi_{wv}(v,w)|_{v=w}$ симметричной функции $\Phi(v,w)$ на диагонали квадрата $\Omega\times\Omega$ симметрична, т.е.

$$\nabla^2\Phi_{wv}(v,v)=\nabla^2\Phi^T_{wv}(v,v)\quad\forall v\in\Omega.\qquad(2.8)$$

Воспользуемся формулой Тейлора ([4], гл. 2, § 3, с. 92)

$$f(x+h)-f(x)=\langle\nabla f(x),h\rangle+\frac{1}{2}\langle\nabla^2 f(x+\vartheta h)h,h\rangle,$$

где $0\le\vartheta\le1$, и выпишем разложение симметричной функции $\Phi(v,w)$ в точке $(v+\varepsilon h,v-\varepsilon h)$, $\varepsilon>0$, а h — вектор, определенный выше,

$$\Phi(v+\varepsilon h,v-\varepsilon h)=\Phi(v,v)+\varepsilon\langle\nabla\Phi_v(v,v),h\rangle-\varepsilon\langle\nabla\Phi_w(v,v),h\rangle+ \\ +\frac{1}{2}\varepsilon^2\langle\nabla^2\Phi_{vv}(v+\vartheta_1\varepsilon h,v-\vartheta_1\varepsilon h)h,h\rangle-\varepsilon^2\langle\nabla^2\Phi_{wv}(v+\vartheta_1\varepsilon h,v-\vartheta_1\varepsilon h)h,h\rangle+ \\ +\frac{1}{2}\varepsilon^2\langle\nabla^2\Phi_{ww}(v+\vartheta_1\varepsilon h,v-\vartheta_1\varepsilon h)h,h\rangle.$$

Разложение этой функции в точке $(v-\varepsilon h,v+\varepsilon h)$ имеет тот же самый вид, но константа $\vartheta\le1$ будет иметь другое значение. Оба разложения приравняем согласно (1.3). Учитывая (2.2) и соотношение $\langle Ah,h\rangle=\langle h,A^T h\rangle$, получим

$$\langle\nabla^2\Phi_{vv}(v+\vartheta_1\varepsilon h,v-\vartheta_1\varepsilon h)h,h\rangle-2\langle\nabla^2\Phi_{wv}(v+\vartheta_1\varepsilon h,v-\vartheta_1\varepsilon h)h,h\rangle+ \\ +\langle\nabla^2\Phi_{ww}(v+\vartheta_1\varepsilon h,v-\vartheta_1\varepsilon h)h,h\rangle=\langle\nabla^2\Phi_{vv}(v-\vartheta_2\varepsilon h+\vartheta_2\varepsilon h)h,h\rangle- \\ -2\langle h,\nabla^2\Phi^T_{wv}(v-\vartheta_2\varepsilon h,v+\vartheta_2\varepsilon h)h\rangle+\langle\nabla^2\Phi_{ww}(v-\vartheta_2\varepsilon h,v+\vartheta_2\varepsilon h)h,h\rangle.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$ и учитывая непрерывность второй производной, получим

$$\langle\nabla^2\Phi_{wv}(v,v)h,h\rangle=\langle\nabla^2\Phi^T_{wv}(v,v)h,h\rangle\quad\forall v\in\Omega.$$

Отсюда имеем (2.8). Доказанное утверждение используем, чтобы вычислить явный вид второй производной функции $\Phi(v,v)$.

Если функция $\Phi(v,w)$ дважды дифференцируема, то по определению выполняется условие

$$\Phi(v+h,w+k)=\Phi(v,w)+\langle\nabla\Phi_v(v,w),h\rangle+\langle\nabla\Phi_w(v,w),k\rangle+\frac{1}{2}\{\langle\nabla^2\Phi_{vv}(v,w)h,h\rangle+ \\ +2\langle\nabla^2\Phi_{wv}(v,w)h,k\rangle+\langle\nabla^2\Phi_{ww}(v,w)h,h\rangle\}+\omega(v,w,h,k),\quad(2.9)$$

где $\omega(v,w,h,k)/(|h|^2+|k|^2) \to 0$ при $|h|^2+|k|^2 \to 0$. Пусть $w=v$ и $h=k$, тогда с учетом (2.2) из (2.9) имеем

$$\Phi(v+h,v+h) = \Phi(v,v) + 2\langle \nabla\Phi_w(v,v), h\rangle + \\ + \frac{1}{2}\langle\{\nabla^2\Phi_{vv}(v,v) + 2\nabla^2\Phi_{wv}(v,v) + \nabla^2\Phi_{ww}(v,v)\}h,h\rangle + \omega(v,h),$$

где $\omega(v,h)/|h|^2 \to 0$ при $|h| \to 0$. Здесь матрицы $\nabla^2\Phi_{vv}(v,v)$, $\nabla^2\Phi_{ww}(v,v)$ симметричны как диагональные подматрицы симметричной матрицы $\nabla^2\Phi(v,w)$, матрица $\nabla^2\Phi_{wv}(v,v)$ симметрична по доказанному, следовательно, матрица

$$\nabla^2\Phi(v,v) = \nabla^2\Phi_{vv}(v,v) + 2\nabla^2\Phi_{wv}(v,v) + \nabla^2\Phi_{ww}(v,v)$$

также симметрична и представляет собой вторую производную функции $\Phi(v,v)$.

Покоординатная оптимизация. Рассмотрим класс функций $\Phi(v,w)$, каждая из которых является симметричной и нормализованной функцией $\Phi(v,w) = L_1(z,p) + L_2(x,y)$, где $v = x,p$ и $w = z,y$, для игры двух лиц вида

$$x^* \in \mathrm{argmin}\{L_1(x,p^*) \mid x \in Q\}, \quad p^* \in \mathrm{argmin}\{L_2(x^*,p) \mid p \in P\}.$$

Пусть функция $\Phi(v,w)$ обладает свойством симметрии (1.3), тогда согласно свойству (2.2) при $w=v$ имеем

$$\frac{\partial L_2(x,p)}{\partial x} = \frac{\partial L_1(x,p)}{\partial x}, \quad \frac{\partial L_1(x,p)}{\partial p} = \frac{\partial L_2(x,p)}{\partial p}. \tag{2.10}$$

Эти условия означают, что функции $L_1(x,p)$ и $L_2(x,p)$ с точностью до константы совпадают, т.е. $L_1(x,p) = L_2(x,p) + C$, а неравенство (1.2) принимает вид

$$L(x^*,p^*) \le L(x,p^*) \quad \forall x \in Q, \qquad L(x^*,p^*) \le L(x^*,p) \quad \forall p \in P, \tag{2.11}$$

где $L(x,p) = L_1(x,p) = L_2(x,p)$ и $C=0$.

Таким образом, неподвижная точка x^*,p^* обладает свойством: ее первая компонента является точкой минимума функции $L(x,p)$ по первой координате при $p=p^*$, а вторая компонента — точкой минимума этой функции по второй координате при $x=x^*$. Эта ситуация полностью аналогична седловой задаче [5] и различие состоит лишь в том, что в седловом случае по одной из переменных осуществляется операция максимизации. В содержательном плане седловая задача описывает антагонистическое взаимодействие двух игроков. Задача покоординатной оптимизации, наоборот, моделирует максимально доброжелательное взаимодействие участников.

Если функция $L(x,p)$ выпуклая по совокупности переменных x,p, то нетрудно проверить, что точка x^*,p^* будет минимумом этой функции по всем своим переменным. Действительно, в силу выпуклости имеем

$$\langle \nabla L(v), v^*-v\rangle \le L(v^*) - L(v) \le \langle \nabla L(v^*), v^*-v\rangle \quad \forall v^*,v \in \Omega, \tag{2.12}$$

где $v = x,p$, $v^* = x^*,p^*$ и $\Omega = Q \times P$. Представим также систему неравенств (2.11) в эквивалентной форме

$$\langle \nabla L_x(x^*,p^*), x-x^*\rangle \ge 0 \quad \forall x \in Q, \qquad \langle \nabla L_p(x^*,p^*), p-p^*\rangle \ge 0 \quad \forall p \in P. \tag{2.13}$$

Учитывая (2.13) в правой части системы (2.12), получим

$$L(v^*) \le L(v) \quad \forall v \in \Omega,$$

т.е. в выпуклом случае равновесное решение является точкой минимума.

Потенциальные игры. Введем следующее определение. Равновесную задачу (1.1) назовем потенциальной, если существует функция $P(v)$ такая, что

$$\nabla P(v) = \nabla\Phi_w(v,w)|_{v=w} \quad \forall v \in \Omega. \tag{2.14}$$

Класс потенциальных задач не пуст, т.к. равновесные задачи со свойством (1.3) удовлетворяют условию потенциальности. Совершенно ясно, что равновесные решения этих задач являются точками минимума функции $P(v)$ на Ω.

В работе [6] на примере игры Курно было введено понятие потенциальной игры следующим образом. Если для игры n лиц с равновесием по Нэшу

$$x_i^* \in \operatorname{Argmin}\{f_i(x_i, x_{-i}^*) \mid x_i \in X_i\},$$

где $f_i(x_i, x_{-i})$ — платежная функция i-го игрока, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i \in X_i = (x_i)_{i \in I}$, $x_{-i} \in X_{-i} = (x_j)_{j \in I \setminus i}$, $(x_i, x_{-i}) = x \in X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, существует функция $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такая, что

$$\frac{\partial p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i \in I, \tag{2.15}$$

то игра называется потенциальной. Другими словами, частные производные платежных функций по собственным переменным игроков в совокупности образуют градиент некоторой функции $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая называется потенциалом. Перепишем условие (2.15) в форме

$$\frac{\partial p(x_i, x_{-i})}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i(x_i, x_{-i})}{\partial x_i}, \quad i \in I,$$

и будем рассматривать несобственные переменные $x_{-i} \in X_{-i}$ как параметры. Тогда полученное условие означает, что при всех значениях параметра $x_{-i} \in X_{-i}$ производные двух функций совпадают, т.е.

$$p(x_i, x_{-i}) = f_i(x_i, x_{-i}) + c_i(x_{-i}). \tag{2.16}$$

Таким образом, целевые функции потенциальной игры с точностью до константы $c_i(x_{-i})$ равны между собой.

Из (2.16) получим

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i, x_{-i}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, x_{-i}) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x_{-i}),$$

т.е.

$$p(v, w) = \Phi(v, w) + C(v), \tag{2.17}$$

где $P(v, w)$, $\Phi(v, w)$ и $C(v)$ — соответствующие суммы из предыдущего равенства. При этом, если $v = w$, то

$$P(v, w)|_{v=w} = np(v) = np(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.18}$$

Нормализованная функция $\Phi(v, w)$ и функция $P(v, w)$, порожденная потенциалом $p(v)$, различаются на $C(v)$, которую можно рассматривать как константу, т.к. ее присутствие не влияет на минимум функции $\Phi(v, w)$ по переменной $w \in \Omega$. Отбросив константу $C(v)$, можно считать, что $P(v, w)$ и $\Phi(v, w)$ совпадают.

Из (2.18) следует

$$\nabla P_w(v, w)|_{v=w} = n \nabla p(v). \tag{2.19}$$

Сопоставляя (2.17) и (2.19), имеем

$$n \nabla p(v) = \nabla \Phi_w(v, w)|_{v=w}.$$

Таким образом, потенциальные игры в смысле (2.15) являются потенциальными играми и в смысле (2.14). Если потенциал есть функция двух переменных $p(x_1, x_2)$ для игры двух лиц, то, как показано в (2.10)–(2.11), функция $P(v, w)$ будет симметричной.

3. Прогнозный метод проекции градиента

Рассмотрим равновесную задачу (1.1). Неподвижная точка $v^* \in \Omega^*$ этой задачи является решением как вариационного неравенства

$$\langle \nabla\Phi_w(v^*, v^*), w - v^* \rangle \le 0 \quad \forall w \in \Omega, \tag{3.1}$$

так и операторного уравнения

$$v^* = \pi_\Omega(v^* - \alpha\nabla\Phi_w(v^*, v^*)), \tag{3.2}$$

где $\pi_\Omega(\dots)$ — оператор проектирования некоторого вектора на множество Ω. Оба соотношения эквивалентны и являются необходимым условием минимума функции $\Phi(v^*, w)$ на множестве Ω. Так как оператор правой части уравнения (3.2) нерасширяющийся, возникает вопрос о сходимости метода

$$v^{n+1} = \pi_\Omega(v^n - \alpha\nabla\Phi_w(v^n, v^n)) \tag{3.3}$$

к решению уравнения (3.2) или, что то же самое, к решению вариационного неравенства (3.1).

Проделав несложные вычисления по традиционной схеме, убедимся, что процесс (3.3) сходится к равновесному решению симметричной задачи. Однако область применимости этого метода ограничивается задачами минимизации. Известно, что в седловом варианте [5] этот метод не сходится к седловой точке, в то же время градиентный метод прогнозного типа (экстраградиентный [7], [8]) сходится к этому решению. Последнее обстоятельство представляет для нас значительный интерес. Имея сказанное в виду, рассмотрим градиентный метод прогнозного типа

$$\bar{u}^n = \pi_\Omega(v^n - \alpha\nabla\Phi_w(v^n, v^n)), \quad v^{n+1} = \pi_\Omega(v^n - \alpha\nabla\Phi_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n)) \tag{3.4}$$

и покажем, что в классе симметричных целевых функций $\Phi(v, w)$ метод сходится к решению исходной задачи.

Выпишем некоторые оценки и неравенства. В (2.7) поменяем местами значения аргументов (это можно сделать, поскольку неравенство верно для любых пар $v + h, v + h$ и v, v), а затем полученное неравенство прибавим к (2.7), в итоге получим

$$|\nabla\Phi(v + h, v + h) - \nabla\Phi(v, v)| \le 2L|h| \quad \forall (v + h, v + h) \in \Omega \times \Omega. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) с учетом (2.5) имеем

$$|\bar{u}^n - v^{n+1}| \le \frac{\alpha}{2}|\nabla\Phi(v^n, v^n) - \nabla\Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n)| \le \alpha L|v^n - \bar{u}^n|. \tag{3.6}$$

Представим уравнения (3.4) в форме вариационных неравенств

$$\begin{gathered} \langle \bar{u}^n - v^n + \alpha\nabla\Phi_w(v^n, v^n), w - \bar{u}^n \rangle \ge 0 \quad \forall w \in \Omega, \\ \langle v^{n+1} - v^n + \alpha\nabla\Phi_w(\bar{u}^n, \bar{u}^n), w - v^{n+1} \rangle \ge 0 \quad \forall w \in \Omega \end{gathered} \tag{3.7}$$

и докажем теорему.

Теорема 1. *Если дифференцируемая целевая функция $\Phi(v, w)$ удовлетворяет условию симметрии* (1.3), *градиент функции $\Phi(v, v)$ удовлетворяет условию Липшица* (2.7), *$\Omega \in R^n$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество, то последовательность v^n, порожденная методом* (3.4) *с параметром $0 < \alpha < 1/L$, имеет непустое множество предельных точек, каждая из которых является стационарной точкой задачи* (1.1).

Если дополнительно к перечисленным условиям функция $\Phi(v, w)$ выпукла по переменной w, то любая стационарная точка является неподвижной точкой задачи (1.1).

Доказательство. Положим $w = v^n$ в первом неравенстве (3.7) и $w = \bar{u}^n$ — во втором, тогда с учетом (2.5) будем иметь

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^{n+1} - \bar{u}^n \rangle + \frac{\alpha}{2} \langle \nabla \Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n), v^{n+1} - \bar{u}^n \rangle \le 0,$$
$$|\bar{u}^n - v^n|^2 + \frac{\alpha}{2} \langle \nabla \Phi(v^n, v^n), v^{n+1} - v^n \rangle - \frac{\alpha}{2} \langle \nabla \Phi(v^n, v^n), v^{n+1} - \bar{u}^n \rangle \le 0.$$

Сложим оба неравенства

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^{n+1} - \bar{u}^n \rangle + |v^n - \bar{u}^n|^2 + \frac{\alpha}{2} \langle \nabla \Phi(v^n, v^n), v^{n+1} - v^n \rangle +$$
$$+ \frac{\alpha}{2} \langle \nabla \Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n) - \nabla \Phi(v^n, v^n), v^{n+1} - \bar{u}^n \rangle \le 0. \quad (3.8)$$

Используя тождество

$$|x_1 - x_3|^2 = |x_1 - x_2|^2 + 2\langle x_1 - x_2, x_2 - x_3 \rangle + |x_2 - x_3|^2, \quad (3.9)$$

разложим скалярное произведение в левой части (3.8) на сумму квадратов. Затем, применяя неравенство (2.7) и оценки (3.5) и (3.6), получим

$$|v^{n+1} - v^n|^2 + |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 - |v^n - \bar{u}^n|^2 + 2|\bar{u}^n - v^n|^2 +$$
$$+ \frac{\alpha}{2} (\Phi(v^{n+1}, v^{n+1}) - \Phi(v^n, v^n)) - \frac{\alpha}{2} L |v^{n+1} - v^n|^2 - (\alpha L)^2 |v^n - \bar{u}^n|^2 \le 0.$$

Отсюда

$$\alpha \Phi(v^{n+1}, v^{n+1}) + d_1 |v^{n+1} - v^n|^2 + |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 + d_2 |v^n - \bar{u}^n|^2 \le \alpha \Phi(v^n, v^n), \quad (3.10)$$

где $d_1 = 1 - (\alpha/2)L > 0$ и $d_2 = 1 - (\alpha L)^2 > 0$, т.к. $\alpha < 1/L$. Из этого неравенства следует монотонное убывание последовательности по функционалу.

Просуммируем полученную систему неравенств от $n = 0$ до $n = N$

$$\alpha \Phi(v^{N+1}, v^{N+1}) + d_1 \sum_{k=0}^{N} |v^{k+1} - v^k|^2 + \sum_{k=0}^{N} |v^{k+1} - \bar{u}^k|^2 + d_2 \sum_{k=0}^{N} |v^k - \bar{u}^k|^2 \le \alpha \Phi(v^0, v^0).$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v^{n+1} - v^n|^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |v^n - \bar{u}^n|^2 < \infty$$

и, следовательно,

$$|v^{n+1} - v^n| \to 0, \quad |v^{n+1} - \bar{u}^n| \to 0, \quad |v^n - \bar{u}^n| \to 0, \quad n \to \infty. \quad (3.11)$$

Так как последовательность v^n ограничена, то существует элемент v' такой, что $v^{n_i} \to v'$ при $n_i \to \infty$, и при этом

$$|v^{n_i+1} - v^{n_i}| \to 0, \quad |v^{n_i+1} - \bar{u}^{n_i}| \to 0, \quad |v^{n_i} - \bar{u}^{n_i}| \to 0.$$

Переходя к пределу по подпоследовательности $n_i \to \infty$ в (3.7) (или, что то же самое в (3.4)), получим

$$\langle \nabla \Phi_w(v', v'), w - v' \rangle \ge 0 \quad \forall w \in \Omega. \quad (3.12)$$

Поскольку это соотношение совпадает с (3.1), то любая предельная точка последовательности v^n является стационарной точкой равновесной задачи (1.1). Очевидно, множество решений задачи (1.1) составляет подмножество (может быть, пустое) множества стационарных точек.

Если целевая функция $\Phi(v, w)$ выпукла по w при любом фиксированном значении v, то выполняется неравенство

$$\Phi(v', w) - \Phi(v', v') \ge \langle \nabla \Phi_w(v', v'), w - v' \rangle \quad \forall w \in \Omega. \quad (3.13)$$

С учетом (3.12) имеем

$$\Phi(v', v') \le \Phi(v', w) \quad \forall w \in \Omega.$$

Полученное неравенство, очевидно, совпадает с (1.2). Последнее означает, что $v' = v^* \in \Omega^*$, т.е. любая предельная точка является равновесным решением задачи. Поскольку величина $\Phi(v^n, v^n)$ согласно (3.10) убывает монотонно, то во всех предельных точках последовательности значение функции одно и то же и равно $\Phi(v', v')$. $\square$

Доказанное утверждение можно рассматривать как теорему существования неподвижной точки для многозначных симметричных экстремальных отображений. Действительно, ее содержательный смысл состоит в следующем: если функция $\Phi(v, w)$ симметрична, дифференцируема и выпукла по второй переменной, а Ω — компакт, то неподвижная точка задачи (1.1) всегда существует.

4. Монотонная сходимость

Если функция $\Phi(v, w)$ симметрична и одновременно выпукла по w, то в силу условия симметрии (1.3) она будет выпуклой и по переменной v. Таким образом, в этом случае функция является выпукло-выпуклой, т.е. выпуклой как по одной переменной, так и по другой. Однако, сужение выпукло-выпуклой симметричной функции $S(v, w)$ на диагональ квадрата $\Omega \times \Omega$ (т.е. $v = w$) может не быть выпуклым. Действительно, пусть $S(v, w) = \langle v, Aw \rangle$, где $v \in R^2$, $w \in R^2$, а матрица A имеет размерность 2×2. Эта функция линейна по своим переменным и, следовательно, выпукла по ним. Будет ли функция $\langle v, Av \rangle$ выпукла на R^2? Это зависит от вида матрицы A. Если матрица имеет тип $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, то функция выпуклая, если же матрица имеет структуру вида $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, то функция не выпуклая.

Для монотонной по норме сходимости градиентного метода к решению задачи ключевым свойством является выпуклость целевой функции на диагонали квадрата, а не по переменной w. Будем предполагать, что $\Phi(v, w)$ выпукла на диагонали квадрата и необязательно выпукла по переменной w. Тогда ее частный градиент $\nabla\Phi_w(v, w)$ не обязательно монотонный оператор при любом v, но его сужение на диагональ квадрата согласно (2.5) будет градиентом выпуклой функции $\Phi(v, v)$, т.е. $2\nabla\Phi(v, w)|_{v=w} = \nabla\Phi(v, v)$, и потому монотонным оператором. Последнее означает, что для него выполняется неравенство

$$\langle \nabla\Phi(v + h, v + h) - \nabla\Phi(v, v), h \rangle \ge 0 \quad \forall v \in \Omega, \quad \forall h \in R^n. \tag{4.1}$$

Теорема 2. *Если целевая функция $\Phi(v, w)$ симметрична, а ее сужение на диагональ квадрата $\Omega \times \Omega$ представляет собой выпуклую и дифференцируемую функцию, причем градиент этого сужения удовлетворяет условию Липшица* (3.5), *$\Omega \in R^n$ — выпуклое замкнутое множество, то последовательность v^n, порожденная методом* (3.4) *с параметром $0 < \alpha < 1/L$, монотонно по норме пространства сходится к минимуму функции $\Phi(v, v)$ на Ω. Этот минимум является по крайней мере стационарной точкой задачи* (1.1).

Если дополнительно к перечисленным условиям функция $\Phi(v, w)$ выпукла по второй переменной w при любом значении $v \in \Omega$, то найденный минимум является равновесным решением задачи (1.1).

Доказательство. Положим $w = v^* \in \Omega^*$ во втором неравенстве (3.7) и $w = v^{n+1}$ — в первом, а также $w = \bar{u}^n$ в (3.1), затем с учетом (2.5) сложим все неравенства, тогда получим

$$\left\langle v^{n+1} - v^n + \frac{\alpha}{2}\nabla\Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n), v^* - v^{n+1} \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \bar{u}^n - v^n + \frac{\alpha}{2}\nabla\Phi(v^n, v^n), v^{n+1} - \bar{u}^n \right\rangle + \langle \nabla\Phi(v^*, v^*), \bar{u} - v^* \rangle \ge 0.$$

Отсюда имеем

$$\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle + \langle \bar u^n - v^n, v^{n+1}-\bar u^n\rangle + \frac{\alpha}{2}\langle \nabla\Phi(\bar u^n,\bar u^n)-\nabla\Phi(v^n,v^n), \bar u^n - v^{n+1}\rangle +$$
$$+\frac{\alpha}{2}\langle \nabla\Phi(\bar u^n,\bar u^n)-\nabla\Phi(v^*,v^*), v^*-\bar u^n\rangle \geq 0. \quad (4.2)$$

Два первых скалярных произведения в полученном неравенстве разложим в сумму квадратов с помощью тождества (3.9), третье слагаемое оценим, используя (3.5), (3.6), и, наконец, последнее слагаемое оценим с помощью (4.1), тогда получим

$$|v^{n+1}-v^*|^2+|v^{n+1}-v^n|^2+|v^n-\bar u^n|^2+|\bar u^n-v^{n+1}|^2-(\alpha L)^2|\bar u^n-v^n|^2 \leq |v^n-v^*|^2+|v^{n+1}-v^n|^2.$$

Поэтому

$$|v^{n+1}-v^*|^2+d|v^n-\bar u^n|^2+|\bar u^n-v^{n+1}|^2 \leq |v^n-v^*|^2, \quad (4.3)$$

где $d = 1-(\alpha L)^2 > 0$, т.к. $\alpha < 1/L$. Отсюда при $\alpha < 1/L$ следует монотонность убывания величины $|v^n-v^*|^2$ при $n\to\infty$. Просуммируем неравенства (4.3) от $n=1$ до $n=N$, тогда

$$|v^{N+1}-v^*|^2+d\sum_{n=1}^{N}|v^n-\bar u^n|^2+\sum_{n=1}^{N}|\bar u^n-v^{n+1}|^2 \leq |v^n-v^*|^2.$$

Из последнего неравенства вытекает сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v^n-\bar u^n|^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\bar u^n-v^{n+1}|^2$ и соответственно стремление к нулю величин

$$|v^n-\bar u^n|^2\to 0, \quad |\bar u^n-v^{n+1}|^2\to 0, \quad n\to\infty. \quad (4.4)$$

Используя оценку

$$\frac{1}{2}|x_1-x_2|^2 \leq |x_1-x_3|^2+|x_3-x_2|^2, \quad (4.5)$$

из (4.4) имеем

$$|v^{n+1}-v^n|^2\to 0, \quad n\to\infty. \quad (4.6)$$

Так как последовательность v^n ограничена, то существует элемент v' такой, что $v^{n_i}\to v'$ при $n_i\to\infty$, и при этом $|v^{n_i+1}-v^{n_i}|^2\to 0$, $|\bar u^{n_i}-v^{n_i}|^2\to 0$.

Рассмотрим неравенства (3.7) для всех $n_i\to\infty$ и, перейдя к пределу с учетом (2.5), получим

$$\langle \nabla\Phi(v',v'), w-v'\rangle \geq 0 \quad \forall w\in\Omega.$$

Поскольку это соотношение совпадает с (3.1), то любая предельная точка последовательности v^n является минимумом $\Phi(v,v)$ на Ω. Условие монотонности убывания величины $|v^n-v'|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n\to v'$ при $n\to\infty$.

Если целевая функция $\Phi(v,w)$ выпукла по w при любом фиксированном значении v, то согласно (3.13) имеем

$$\Phi(v',v') \leq \Phi(v',w) \quad \forall w\in\Omega.$$

Следовательно, $v'=v^*\in\Omega^*$, т.е. единственная предельная точка является равновесным решением задачи. $\square$

5. Конечная сходимость

Оценки скорости сходимости прогнозного метода проекции градиента (3.4) для симметричной функции полностью зависят от поведения этой функции на диагонали квадрата $\Omega \times \Omega$. Будем предполагать, что минимум функции $\Phi(v, v)$ на Ω удовлетворяет условию остроты ([9], гл. 5, § 2, с. 127)

$$\Phi(v, v) - \Phi(v^*, v^*) \geq \gamma |v - v^*| \quad \forall w \in \Omega, \tag{5.1}$$

где $\gamma \geq 0$ константа. Кроме того, предполагается, что градиент $\nabla\Phi(v, v)$ удовлетворяет условию Липшица (3.5).

Заметим, что седловая точка невырожденной задачи линейного программирования, которая всегда является неподвижной точкой задачи (1.1) с нормализованной функцией $\Phi(v, w)$, удовлетворяет перечисленным выше условиям [2].

Теорема 3. *Если множество решений задачи* (1.1) *не пусто и удовлетворяет условию остроты* (5.1), *функция* $\Phi(v, w)$ *— симметричная, выпуклая на диагонали квадрата* $\Omega \times \Omega$, *дифференцируема, причем ее градиент на диагонали квадрата* $\Omega \times \Omega$ *удовлетворяет условию Липшица* (3.5), Ω *— выпуклое замкнутое множество, то последовательность* v^n, *порожденная методом* (3.4) *с параметром* $0 < \alpha < 1/L$ *сходится к минимуму* $\Phi(v, v)$ *на* Ω *за конечное число итераций, т.е. существует такой номер* n_0, *при котором* $v^{n_0} = v^* \in \Omega^*$.

Если дополнительно к перечисленным условиям функция $\Phi(v, w)$ *выпукла по* w *при любом* $v \in \Omega$, *то метод сходится за конечное число итераций к равновесному решению исходной задачи.*

Доказательство. Положим $w = v^*$ во втором неравенстве (3.7), а $w = v^{n+1}$ — в первом, затем с учетом (2.5) сложим оба неравенства, при этом получим неравенство типа (4.2), но в нем отсутствует слагаемое вида (3.1)

$$\begin{aligned} &\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1} \rangle + \langle \bar{u}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{u}^n \rangle + \\ &\qquad + \frac{\alpha}{2} \langle \nabla\Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n) - \nabla\Phi(v^n, v^n), \bar{u}^n - v^{n+1} \rangle + \frac{\alpha}{2} \langle \nabla\Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n), v^* - \bar{u}^n \rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

В полученном неравенстве, следуя (4.2), преобразуем два первых скалярных произведения, третье слагаемое оценим с помощью (3.5), (3.6), а последнее — с учетом выпуклости, тогда

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - \bar{u}^n \rangle - |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 + \frac{1}{2}(\alpha L)^2 |\bar{u}^n - v^n|^2 + \frac{\alpha}{2}(\Phi(v^*, v^*) - \Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n)) \geq 0.$$

Второе слагаемое $|v^{n+1} - \bar{u}^n|^2$ преобразуем с помощью тождества (3.9), а последнее оценим с помощью (5.1)

$$\frac{\alpha\gamma}{2} |\bar{u}^n - v^*| + |v^{n+1} - v^n|^2 + 2\langle v^{n+1} - v^n, v^n - \bar{u}^n \rangle + d|\bar{u}^n - v^n|^2 \leq \langle v^{n+1} - v^n, v^* - \bar{u}^n \rangle,$$

где $d = 1 - \frac{1}{2}(\alpha L)^2 > 0$, т.к. $\alpha < 1/L$.

Из третьего и четвертого слагаемых выделим полный квадрат

$$\frac{\alpha\gamma}{2} |\bar{u}^n - v^*| + \left| \frac{1}{\sqrt{d}}(v^{n+1} - v^n) + \sqrt{d}(v^n - \bar{u}^n) \right|^2 + \left(1 - \frac{1}{d}\right) |v^{n+1} - v^n|^2 \leq \langle v^{n+1} - v^n, v^* - \bar{u}^n \rangle.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha\gamma}{2} |\bar{u}^n - v^*| \leq |v^{n+1} - v^n| \, |v^* - \bar{u}^n| + \left(\frac{1}{d} - 1\right) |v^{n+1} - v^n|^2.$$

Предполагая, что $|\bar{u}^n - v^*| \neq 0$ для всех n, получаем

$$\frac{\alpha\gamma}{2} \leq |v^{n+1} - v^n| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d} - 1\right) \frac{|v^{n+1} - v^n|^2}{|\bar{u}^n - v^*|}. \tag{5.3}$$

Заметим, что неравенство (4.3) в условиях теоремы также справедливо. Поэтому в силу (4.3) и используя оценку (4.5) имеем $|v^{n+1}-v^*|^2+\frac{d}{2}|v^{n+1}-v^n|^2 \le |v^n-v^*|^2$. Отсюда

$$(|v^{n+1}-v^*|-|v^n-v^*|)(|v^{n+1}-v^*|+|v^n-v^*|)+\frac{d}{2}|v^{n+1}-v^n|^2 \le 0.$$

Разделим левую и правую части этого неравенства на величину $(|v^{n+1}-v^*|+|v^n-v^*|)$ и затем, учитывая монотонность $|v^{n+1}-v^*| \le |v^n-v^*|$, получим

$$|v^{n+1}-v^*|-|v^n-v^*|+\frac{d}{4}\frac{|v^{n+1}-v^n|^2}{|v^n-v^*|} \le 0. \tag{5.4}$$

Просуммируем (5.4) от $n=0$ до $n=N$

$$|v^{N+1}-v^*|^2+\frac{d}{4}\sum_{k=0}^{N}\frac{|v^{k+1}-v^k|^2}{|v^k-v^*|} \le |v^0-v^*|^2. \tag{5.5}$$

Из (5.5) следует

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|v^{k+1}-v^k|^2}{|v^k-v^*|} \le \infty.$$

Таким образом,

$$|v^{n+1}-v^n|^2/|v^n-v^*| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Используя неравенство треугольника, получаем

$$\frac{|v^{+1}-v^n|^2}{|v^n-\bar{u}^n|+|\bar{u}^n-v^*|} \le \frac{|v^{n+1}-v^n|^2}{|v^n-v^*|} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{5.6}$$

С учетом (4.4) отсюда имеем

$$|v^{n+1}-v^n|^2/|\bar{u}^n-v^*| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{5.7}$$

Действительно, если это не так, то существует подпоследовательность v^{n_i} такая, что $|v^{n_i+1}-v^{n_i}|^2/|\bar{u}^{n_i}-v^*| \ge a > 0$ для всех $n_i\to\infty$. Так как $|v^{n_i}-\bar{u}^{n_i}| \to 0$, $n_i\to\infty$, то всегда можно выбрать такой номер n_{i_0}, что для всех $n_i \ge n_{i_0}$ выполняется оценка $|v^{n_{i_0}+1}-v^{n_{i_0}}|^2/(|v^{n_{i_0}}-\bar{u}^{n_{i_0}}|+|\bar{u}^{n_{i_0}}-v^*|) \ge \frac{1}{2}a > 0$. Но это противоречит (5.6).

Возвращаясь к неравенству (5.3), видим, что правая часть этого неравенства согласно (4.6) и (5.7) с ростом номера n стремится к нулю, с другой стороны, эта правая часть ограничена величиной $\alpha\gamma/2$ для всех $n\to\infty$. Выход из этого противоречия состоит в том, что утверждение $|\bar{u}^n-v^*| \ne 0$ для всех n неверно, поэтому существует такой номер n_f, что $\bar{u}^{n_f}=v^*\in\Omega^*$. $\square$

6. Сходимость со скоростью геометрической прогрессии

В этом разделе будем предполагать, что функция $\Phi(v,v)$ на диагонали квадрата $\Omega\times\Omega$ имеет квадратичный порядок остроты минимума, т.е.

$$\Phi(v,v)-\Phi(v^*,v^*) \ge \gamma|v-v^*|^2 \quad \forall w\in\Omega, \tag{6.1}$$

где $\gamma \ge 0$ константа [9]. Квадратичная функция вида $\Phi(v,v)=\langle Av-b, Av-v\rangle$ с невырожденной матрицей A и вектором $b\in R^n$ удовлетворяют этому условию [1].

Покажем, что градиентный метод может сходиться со скоростью геометрической прогрессии к минимуму функции, которая не является сильно выпуклой, но имеет квадратичный порядок остроты минимума.

Теорема 4. *Если множество решений задачи* (1.1) *не пусто и удовлетворяет условию* (6.1), *целевая функция* $\Phi(v,w)$ — *симметричная, выпуклая на диагонали квадрата* $\Omega \times \Omega$ *и дифференцируема, причем ее градиент удовлетворяет условию Липшица* (3.5), Ω — *выпуклое замкнутое множество, то последовательность* v^n, *порожденная методом* (3.4) *с параметром* $0 < \alpha < 1/L$, *сходится к минимуму* $\Phi(v,v)$ *на* Ω *со скоростью геометрической прогрессии, т.е.*

$$|v^{n+1} - v^*|^2 \le q(\alpha)^{n+1}|v^0 - v^*|^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $q(\alpha) = 1 + (\alpha\gamma)^2/d_1 - \alpha\gamma < 1$, $d_1 = 1 + \alpha\gamma - (\alpha L)^2$.

Если дополнительно к перечисленным условиям функция $\Phi(v,w)$ *выпукла по* w *при любом* $v \in \Omega$, *то метод сходится к равновесному решению со скоростью геометрической прогрессии.*

Доказательство. Используя соотношения (3.9) и (3.5), (3.6), а также (2.12), представим неравенство (5.2) в форме

$$|v^n - v^*|^2 - |v^{n+1} - v^*|^2 - |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 - |\bar{u}^n - v^n|^2 + \\ + (\alpha L)^2|\bar{u}^n - v^n|^2 + \alpha(\Phi(v^*,v^*) - \Phi(\bar{u}^n,\bar{u}^n)) \ge 0.$$

Отсюда с учетом (6.1)

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 + d|\bar{u}^n - v^n|^2 + \alpha\gamma|\bar{u}^n - v^*|^2 \le |v^n - v^*|^2, \tag{6.2}$$

где $d = 1 - (\alpha L)^2 > 0$, т.к. $0 < \alpha < 1/L$. С помощью тождества

$$|\bar{u}^n - v^*|^2 = |\bar{u}^n - v^n|^2 + 2\langle \bar{u}^n - v^n, v^n - v^*\rangle + |v^n - v^*|^2$$

преобразуем (6.2)

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 + d|\bar{u}^n - v^n|^2 + \alpha\gamma|\bar{u}^n - v^n|^2 + \\ + 2\alpha\gamma\langle \bar{u}^n - v^n, v^n - v^*\rangle + \alpha\gamma|v^n - v^*|^2 \le |v^n - v^*|^2$$

или

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 + d_1|\bar{u}^n - v^n|^2 + 2\alpha\gamma\langle \bar{u}^n - v^n, v^n - v^*\rangle \le (1 - \alpha\gamma)|v^n - v^*|^2,$$

где $d_1 = 1 + \alpha\gamma - \alpha^2 L$. Из третьего и четвертого слагаемых выделим полный квадрат

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 + \left|\sqrt{d_1}(\bar{u}^n - v^n) + \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{d_1}}(v^n - v^*)\right|^2 - \\ - \frac{(\alpha\gamma)^2}{d_1}|v^n - v^*| \le (1 - \alpha\gamma)|v^n - v^*|^2.$$

Отсюда

$$|v^{n+1} - v^*|^2 \le [1 + (\alpha\gamma)^2/d_1 - \alpha\gamma]|v^n - v^*|^2.$$

Поскольку $\alpha < 1/L$, то величина $q(\alpha) = 1 + (\alpha\gamma)^2/d_1 - \alpha\gamma < 1$.

Таким образом,

$$|v^{n+1} - v^*|^2 \le q(\alpha)|v^n - v^*|^2,$$

откуда

$$|v^{n+1} - v^*|^2 \le q(\alpha)^{n+1}|v^0 - v^*|^2.$$

Знаменатель прогрессии $q(\alpha)$ зависит от параметра α. Минимизируя его на отрезке $(0, 1/L)$, можно выбрать наилучшее значение знаменателя прогрессии. □

Таким образом, доказано, что в случае симметричных экстремальных отображений градиентный метод прогнозного типа сходится:

— к множеству стационарных решений в невыпуклом случае,
— монотонно по норме к одной из неподвижных точек в выпуклом случае,
— за конечное число шагов к острому равновесию,

— со скоростью геометрической прогрессии к квадратичному равновесию.

Литература

1. Антипин А.С. *О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1995. – Т.35. – № 5. – С.688–704.
2. Антипин А.С. *Вычисление неподвижных точек экстремальных отображений с помощью методов градиентного типа* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т.37. – № 1. – С. 42–53.
3. Антипин А.С. *О дифференциальных градиентных методах прогнозного типа для вычисления неподвижных точек экстремальных отображений* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т.31. – № 11. – С.1786–1795.
4. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1988. – 549 с.
5. Антипин А.С. *Седловые градиентные процессы, управляемые с помощью обратных связей* // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 3. – С.12–23.
6. Monderer D., Shapley L.S. *Potential games* // Games and economic behavior. – 1996. – № 14. – С.124–143.
7. Корпелевич Г.М. *Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач* // Экономика и матем. методы. – 1976. – Т.12. – № 4. – С.747–756.
8. Антипин А.С. *Об одном методе поиска седловых точек модифицированной функции Лагранжа* // Экономика и матем. методы. – 1977. – Т.13. – № 3. – С.560–565.
9. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию.* – М.: 1973. – 382 с.

Вычислительный Центр
Российской Академии Наук

Поступила
27.01.1997