ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 8 (507)

УДК 517.968:519.6

Л.Б. ЕРМОЛАЕВА

РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПОДОБЛАСТЕЙ

Данная заметка, являющаяся продолжением [1], [2], посвящена теоретическому обоснованию метода подобластей решения периодических краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. При этом основное внимание уделено доказательству сходимости метода в пространствах С.Л. Соболева и установлению эффективных (в том числе неулучшаемых по порядку) оценок погрешности в ряде функциональных пространств, учитывающих структурные свойства коэффициентов исследуемых уравнений.

Рассмотрим периодическую краевую задачу для уравнения

$$Ax \equiv x^{(m)}(s) + Bx(s) = y(s), \quad -\infty < s < \infty, \tag{1}$$

$$x^{(k)}(0) = x^{(k)}(2\pi), \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

где $y \in L_1 = L_1(0, 2\pi)$, B — некоторый линейный (напр., интегродифференциальный) оператор с областью значений в пространстве L_1, а m — целое неотрицательное число, причем при $m = 0$ условия (2) отсутствуют.

Приближенное решение задачи (1)–(2) ищем в виде полинома

$$x_n(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos ks + b_k \sin ks \equiv \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{iks}, \tag{3}$$

коэффициенты которого определим из условий

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} (Ax_n - y)(s)ds = 0, \quad j = \overline{0, 2n}, \tag{4}$$

где

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{0, 2n}, \quad n \in N. \tag{5}$$

Ясно, что условия (4), (5) эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка $2n+1$ относительно коэффициентов полинома (3):

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_{jk} c_k = y_j, \quad j = \overline{0, 2n}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_{jk} = \int_{s_j}^{s_{j+1}} (Ae^{iks})(s)ds, \quad y_j = \int_{s_j}^{s_{j+1}} y(s)ds.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

а) $y(s) \in L_2$, *а оператор* $B : W_2^m \to L_2$ *вполне непрерывен*;

б) *задача* (1)–(2) *при* $y(s) \equiv 0$ *имеет лишь тривиальное решение.*

Тогда при всех n, начиная с некоторого, СЛАУ (6) имеет единственное решение $\{c_k^*\}_{-n}^n$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ (т. е. (3) при $c_k = c_k^*$, $k = \overline{-n,n}$) сходятся в пространстве W_2^m к точному решению $x^*(s)$ задачи (1)–(2) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^m} = O\{E_n^T(x^{*(m)})_2\}, \tag{7}$$

где $E_n^T(\phi)_2$ — наилучшее среднеквадратическое приближение функции $\phi(s) \in L_2$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Доказательство. Введем функциональные пространства Лебега $Y = L_2(0,2\pi) \equiv L_2$ и Соболева $X = W_2^m(0,2\pi) \equiv W_2^m$ с нормами соответственно

$$\|y\|_Y = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|y(s)|^2 ds\right\}^{1/2} \equiv \|y\|_2, \quad y \in L_2;$$

$$\|x\|_X = \sum_{i=0}^m \|x^{(i)}(s)\|_2, \quad x \in W_2^m \quad (W_2^0 \equiv L_2),$$

где элементы $x \in X$ удовлетворяют условиям (2). Тогда задачу (1)–(2) можно записать в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Ux + Bx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{8}$$

где $Ux = x^{(m)}$ при условиях (2). Обозначим через X_n и Y_n подпространства тригонометрических полиномов вида (3) с нормами пространств X и Y соответственно. Пусть $P_n : L_2 \to Y_n \subset L_2$ — оператор метода подобластей по тригонометрической системе функций с узлами (5). Тогда $P_n U x_n = U x_n$ для любых $x_n \in X_n$, и поэтому условия (4), а потому и СЛАУ (6), эквивалентны линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv U x_n + P_n B x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, \quad P_n y \in Y_n). \tag{9}$$

В силу условий теоремы оператор $A : W_2^m \to L_2$ линейно обратим и обратный оператор $A^{-1} : L_2 \to W_2^m$ ограничен. Покажем, что операторы $A_n : X_n \to Y_n$ также линейно обратимы (хотя бы при всех достаточно больших n), а обратные операторы $A_n^{-1} : Y_n \to X_n$ ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| = O(1). \tag{10}$$

С этой целью из (8) и (9) для $\forall x_n \in X_n$, $x_n \neq 0$, находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Bx_n - P_n B x_n\|_Y \leq \|x_n\|_X \sup_{x \in X,\ \|x\|_X = 1} \|Bx - P_n Bx\|_Y =$$
$$= \alpha_n \|x_n\|_X, \quad \alpha_n \equiv \sup\{\|z - P_n z\|_Y : z \in BS(0,1)\}, \tag{11}$$

где $S(0,1)$ – единичный шар пространства X. Будем существенно опираться на следующие неравенства ([1]; [2], гл. 1, § 1):

$$E_n^T(\varphi)_2 \leq \|\varphi - P_n\varphi\|_2 \leq \frac{\pi}{2} E_n^T(\varphi)_2, \quad \varphi \in L_2, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{12}$$

$$1 \leq \|P_n\|_{L_2 \to L_2} \equiv \|P_n\|_2 < \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

В силу (12), (13), условия а) теоремы 1 и известной теоремы И.М. Гельфанда (напр., [3], с. 274–275) в (11) имеем $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$q_n = \|A^{-1}\|\alpha_n < 1/2,$$

а тогда для таких n в силу теоремы 7 ([4], гл. 1) операторы A_n линейно обратимы и

$$\|A_n^{-1}\| \le \|A^{-1}\|(1-q_n)^{-1} \le 2\|A^{-1}\|, \quad n \ge n_0,$$

т. е. соотношение (10) доказано. Поэтому в силу теоремы 6 ([4], гл. 1) имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|A^{-1}y - A_n^{-1}P_n y\|_X \le \|E - A_n^{-1}P_n A\| \, \|x^* - \overline{x}_n\|_X,$$

где $\overline{x}_n \in X_n$ — произвольный элемент. Отсюда с учетом (10)–(13) находим

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{\|x^* - \overline{x}_n\|_X\}. \tag{14}$$

Для любой функции $x(s) \in W_2^m$ легко доказываются следующие неравенства:

$$\|x^{(k)}(s)\|_2 \le \|x^{(k)}(s)\|_C \le d_0\|x^{(m)}(s)\|_2, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad m \ge 1, \tag{15}$$

где d_0 — положительная постоянная, не зависящая от $x(s)$. Из (14) и (15) получаем оценку

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O(\|x^{*(m)}(s) - \overline{x}_n^{(m)}(s)\|_{L_2}). \tag{16}$$

Выберем $\overline{x}_n \in X_n$ так, чтобы элемент $\overline{x}_n^{(m)} \in Y_n$ был полиномом наилучшего среднеквадратического приближения для функции $x^{*(m)} \in Y$. Тогда из (16) следует оценка (7). $\square$

Следствие 1. В условиях теоремы 1 метод (1)–(6) сходится в пространствах $C_{2\pi}^k = C^k$ ($C^0 = C = C_{2\pi}$), $k = \overline{0, m-1}$, со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \|x^{*(i)} - x_n^{*(i)}\|_C = O\{E_n^T(x^{*(m)})_2\}. \tag{17}$$

Если же $y \in C_{2\pi}$, а оператор $B : W_2^m \to C_{2\pi}$ ограничен, то справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} \equiv \sum_{i=0}^{m} \|x^{*(i)} - x_n^{*(i)}\|_C = O\{E_n^T(x^{*(m)})_C \ln n\}, \tag{18}$$

где $E_n^T(\varphi)_C$ — наилучшее равномерное приближение функции $\varphi(s) \in C$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n ($n + 1 \in N$).

Следствие 2. Если оператор B и правая часть $y(s)$ уравнения (1) таковы, что $x^{*(m)}(s) \in H_2^{r+\alpha}$, то приближенные решения сходятся в пространствах W_2^m, C^k, $k = \overline{0, m-1}$, и C^m со скоростями соответственно

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^m} = O\Big(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\Big), \qquad r + \alpha > 0; \tag{19}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^k} = O\Big(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\Big), \qquad k = \overline{0, m-1}, \quad r + \alpha > 0; \tag{20}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} = O\Big(\frac{1}{n^{r+\alpha-1/2}}\Big), \qquad r + \alpha > \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Если же $x^{*(m)}(s) \in H_\infty^{r+\alpha} \equiv W^r H^\alpha$, то метод (1)–(6) сходится в пространстве C^m со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\Big), \quad r + \alpha > 0. \tag{22}$$

Доказательство следствия 1. Из соотношений (7) и (15) получаем оценку (17). Теперь докажем оценку (18). Из очевидных тождеств

$$x^{*(m)}(s) \equiv y(s) - (Bx^*)(s), \quad x_n^{*(m)} \equiv P_n y(s) - (P_n B x_n^*)(s)$$

и оценки (7) последовательно находим

$$\begin{aligned}\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C &\le \|x^{*(m)} - P_n x^{*(m)}\|_C + \|P_n B(x^* - x_n^*)\|_C \le \\ &\le 2\|P_n\|_C E_n^T(x^{*(m)})_C + \|P_n\|_C \|B\|_{W_2^m \to C} \|x^* - x_n^*\|_{W_2^m} = \\ &= O\{\|P_n\|_C (E_n^T(x^{*(m)})_C + \|x^* - x_n^*\|_{W_2^m})\} = \\ &= O\{\|P_n\|_C (E_n^T(x^{*(m)})_C + E_n^T(x^{*(m)})_2)\} = O\{E_n^T(x^{*(m)})_C \|P_n\|_C\}. \quad (23)\end{aligned}$$

Далее существенно используются неравенства ([2], с. 41–43)

$$\|S_n\|_{C \to C} \le \|P_n\|_{C \to C} \le (1+\pi)\|\mathcal{L}_n\|_{C \to C}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (24)$$

$$\|P_n\|_{C \to C} \equiv \|P_n\|_C \asymp \ln n, \quad n \to \infty, \quad (25)$$

где для любой $\varphi \in C$

$$S_n(\varphi, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(s-\sigma)}{\sin \frac{s-\sigma}{2}} \varphi(\sigma) d\sigma,$$

$$\mathcal{L}_n(\varphi, s) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin \frac{2k+1}{2}(s - s_k)}{\sin \frac{s - s_k}{2}} \varphi(s_k),$$

а узлы s_k определены в (5).

Из соотношений (23)–(25) получаем

$$\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C = O\{E_n^T(x^{*(m)})_C \ln n\}.$$

Отсюда и из (17) находим оценку (18):

$$\begin{aligned}\|x^* - x_n^*\|_{C^m} &= \|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C + \|x^* - x_n^*\|_{C^{m-1}} = \\ &= O\{E_n^T(x^{*(m)})_C \ln n\} + O\{E_n^T(x^{*(m)})_C\} = O\{E_n^T(x^{*(m)})_C \ln n\}. \quad \square\end{aligned}$$

Доказательство следствия 2. Оценки (19), (20) следуют из теоремы Джексона в L_2 (напр., [5]–[7]) и оценок соответственно (7), (17). Так как $H_2^{r+\alpha} \subset H^{r+\alpha-1/2} = W^{r_1}H^\beta$, где $0 < \beta \le 1$, $r_1 = [r + \alpha - 1/2]$, $r_1 + \beta = r + \alpha - 1/2$ (напр., [8]), то из теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ и оценки (18) следует оценка (21). Оценка (22) следует из (18) и теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ (напр., [5]–[7]). $\square$

Замечание 1. Доказанная теорема является довольно общей. Здесь в качестве B можно взять любой линейный вполне непрерывный оператор из W_2^m в L_2, например, интегродифференциальный оператор вида

$$Bx = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(s) x^{(k)}(s) + \sum_{i=0}^{m} \int_0^{2\pi} h_i(s, \sigma) x^{(i)}(\sigma) d\sigma, \quad (1')$$

где

$$h_k(s,\sigma) = h_{0k}(s,\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \ \ (k = \overline{0, m-1}), \quad h_m(s,\sigma) = h_{0m}(s,\sigma) \left| \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \right|^\lambda \ \ (0 \le \lambda < 1),$$

причем

$$a_k(s) \in L_2(0, 2\pi) \ \ (k = \overline{0, m-1}), \quad h_{0k}(s,\sigma) \in C[0, 2\pi]^2 \ \ (k = \overline{0, m}).$$

Здесь возможен также случай $m = 0$ (тогда полагаем $\sum\limits_{k=0}^{-1} \equiv 0$). Поэтому из теоремы 1 следует также сходимость метода подобластей для интегральных, дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

В частном случае теорема 1 несколько упрощается и усиливается, что показывает

Теорема 2. *Пусть $y(s) \in L_2$, а оператор B таков, что вполне непрерывен оператор $T : W_2^{m-1} \to C_{2\pi}$, где $m \geq 1$ и*

$$Tx \equiv \int_0^s (Bx)(\sigma)d\sigma - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Bx)(\sigma)d\sigma, \quad x \in W_2^{m-1}.$$

Если задача (1)–(2) при $y(s) = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение, то метод подобластей (1)–(6) сходится в пространстве W_2^{m-1} со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^{m-1}} = O\{E_n^T(x^{*(m-1)})_C\}. \tag{26}$$

Доказательство. Следуя [9], [10], можно показать, что задача (1)–(2) и СЛАУ (6) эквивалентны уравнениям соответственно

$$Kx \equiv x^{(m-1)}(s) - x^{(m-1)}(0) + \int_0^s (Bx)(\sigma)d\sigma - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Bx)(\sigma)d\sigma = \overline{y}(s), \tag{27}$$

$$K_nx_n \equiv x_n^{(m-1)}(s) - x_n^{(m-1)}(0) + \mathcal{L}_n\left\{\int_0^s (Bx_n)(\sigma)d\sigma - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Bx_n)(\sigma)d\sigma\right\} = \overline{y}_n(s), \tag{28}$$

где

$$\overline{y}(s) = \int_0^s y(\sigma)d\sigma - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(\sigma)d\sigma, \quad \overline{y}_n(s) = \mathcal{L}_n\overline{y}(s),$$

а $\mathcal{L}_n$ — определенный выше оператор Лагранжа по узлам (5).

Уравнение (27) будем рассматривать как операторное в пространстве

$$\overline{X} = \{x(s) \in C_{2\pi}^{m-1} : x^{(k)}(0) = x^{(k)}(2\pi), \quad k = \overline{0, m-1}\}$$

с нормой

$$\|x\|_{\overline{X}} = \sum_{k=0}^{m-1} \|x^{(k)}(s)\|_{L_2} = \|x\|_{W_2^{m-1}}, \quad x \in \overline{X}.$$

Ясно, что в условиях теоремы K есть аддитивный и однородный оператор из $\overline{X}$ в $\overline{Y} = \{y(s) \in C_{2\pi}\}$ с нормой L_2. Пусть $\overline{X}_n \subset \overline{X}$ и $\overline{Y}_n \subset \overline{Y}$ — подпространства всех тригонометрических полиномов порядка не выше n с нормами соответственно $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. Тогда (28) можно рассматривать как операторное уравнение в пространстве $\overline{X}_n$; ясно, что K_n есть линейный оператор из $\overline{X}_n$ в $\overline{Y}_n$ при каждом фиксированном натуральном n.

Далее важно подчеркнуть, что (28) есть уравнение метода коллокации для уравнения (27). С учетом этого факта в дальнейшем будем пользоваться способом исследования метода коллокации, предложенным в [11].

В силу (27) и (28) для любого $x_n \in \overline{X}_n$, $x_n \neq 0$, с учетом аппроксимативных свойств оператора Лагранжа $\mathcal{L}_n$ в L_2 (напр., [4], гл. 3) находим

$$\|Kx_n - K_nx_n\|_2 = \|Tx_n - \mathcal{L}_nTx_n\|_2 = \|x_n\|\,\|Tz_n - \mathcal{L}_nTz_n\|_2 \leq 2\|x_n\|_{\overline{X}_n}E_n^T(Tz_n)_C,$$
$$z_n = x_n/\|x_n\|, \quad C = C_{2\pi}.$$

Отсюда и из теоремы Джексона [5]–[7] в $C_{2\pi}$ следует

$$\|Kx_n - K_nx_n\|_{\overline{Y}} \leq 6\|x_n\|_{\overline{X}} w(Tz_n; \tfrac{1}{n}) \leq 6\|x_n\|_{\overline{X}}\beta_n, \quad x_n \in \overline{X}_n,$$
$$\beta_n = \sup\{w(z; \tfrac{1}{n}) : z \in TS(0,1) \subset \overline{Y}\},$$

где $w(\varphi;\delta)$ — модуль непрерывности функции $\varphi \in C_{2\pi}$ с шагом $\delta \in (0,\pi)$, а $S(0,1) \subset \overline{X}$.

В силу условия теоремы множество $TS(0,1)$ является компактным в $C_{2\pi}$, а тогда из теоремы 3.1 книги [7] следует $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{\overline{X}_n \to \overline{Y}} = O(\beta_n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{29}$$

Теперь, применяя теорему 7 ([4], гл. 1) к уравнениям (27) и (28), в силу (29) находим, что операторы $K_n : \overline{X}_n \to \overline{Y}_n$, $n \geqslant n_0$, линейно обратимы (следовательно, система (6) однозначно разрешима), и обратные операторы K_n^{-1} ограничены по норме в совокупности:

$$\|K_n^{-1}\| = O(1). \tag{30}$$

Для получения оценки погрешности воспользуемся теоремой 6 ([4], гл. 1) применительно к уравнениям (27) и (28):

$$\|x^* - x_n^*\|_{\overline{X}} = \|K^{-1}\overline{y} - K_n^{-1}\overline{y}_n\|_{\overline{X}} \leq \|(E - K_n^{-1}\mathcal{L}_nK)(x^* - \overline{x}_n)\| \leq$$
$$\leq \|x_n^* - \overline{x}_n\|_{\overline{X}} + \|K_n^{-1}\|\,\|\mathcal{L}_nK(x^* - \overline{x}_n)\|_{\overline{Y}}, \tag{31}$$

где $\overline{x}_n$ — произвольный элемент из $\overline{X}_n$. Так как $\|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_2} = 1$ (напр., [4], гл. 3), то в силу (30), (31) и (27) последовательно находим

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^{m-1}} \leq \|x^* - \overline{x}_n\|_{W_2^{m-1}} + d_1\|K(x^* - \overline{x}_n)\|_C \leq$$
$$\leq \|x^* - \overline{x}_n\|_{W_2^{m-1}} + d_1\Big\{\|[x^{*(m-1)}(s) - \overline{x}_n^{(m-1)}(s)] -$$
$$- [x^{*(m-1)}(0) - \overline{x}_n^{(m-1)}(0)]\|_C + \left\|\int_0^s B(x^* - \overline{x}_n)d\sigma - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} B(x^* - \overline{x}_n)d\sigma\right\|_C\Big\} \leq$$
$$\leq \|x^* - \overline{x}_n\|_{W_2^{m-1}} + d_1\{2\|x^{*(m-1)}(s) - \overline{x}_n^{(m-1)}(s)\|_C + \|T(x^* - \overline{x}_n)\|_C\} \leq$$
$$\leq (1 + d_1d_2)\|x^* - \overline{x}_n\|_{W_2^{m-1}} + 2d_1\|x^{*(m-1)} - \overline{x}_n^{(m-1)}\|_C. \tag{32}$$

Поскольку

$$\|x^* - \overline{x}_n\|_{W_2^{m-1}} \leq d_3\|x^{*(m-1)} - \overline{x}_n^{(m-1)}\|_C,$$

то в силу (32)

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^{m-1}} \leq d_4\|x^{*(m-1)} - \overline{x}_n^{(m-1)}\|_C. \tag{33}$$

Выбирая полином $\overline{x}_n(s)$ так, чтобы $\overline{x}_n^{(m-1)}(s)$ был полиномом наилучшего равномерного приближения для $x^{*(m-1)}(s) \in C$, из (33) находим (26). □

Из теоремы 2 выводятся следующие утверждения.

Следствие 3. В условиях теоремы 2 метод (1)–(6) сходится в пространствах C^k, $k = \overline{0, m-1}$, со скоростями соответственно

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^k} = O\{E_n^T(x^{*(m-1)})_C\}, \quad k = \overline{0, m-2}; \tag{34}$$
$$\|x^* - x_n^*\|_{C^{m-1}} = O\{E_n^T(x^{*(m-1)})_C\|\mathcal{L}_n\|_C\} = O\{E_n^T(x^{*(m-1)})_C \ln n\}. \tag{35}$$

Пусть, кроме того, $y(s) \in C$, а оператор $B : Z \to C$ ограничен, где Z — одно из пространств W_2^{m-1}, C^{m-1}; тогда в пространстве C^m справедливы оценки

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} = O\{\|P_n\|_C (E_n^T(x^{*(m)})_C + \|x^* - x_n^*\|_Z)\} = O\{E_n^T(x^{*(m)})_C \ln n\}. \tag{36}$$

Следствие 4. Пусть оператор B и функция $y(s)$ таковы, что $x^{*(m)}(s) \in H_p^{r+\alpha}$, где $r \geq 0$ целое, $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда в условиях теоремы 2 метод (1)–(6) сходится в пространствах W_2^m, C^k $(k = \overline{0, m})$ со скоростями соответственно

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\|_{W_2^{m-1}} &= O\Big\{\frac{1}{n^{r+\alpha+1/q}}\Big\}, \quad r + \alpha + 1/q > 0; \\ \|x^* - x_n^*\|_{C^k} &= O\Big\{\frac{1}{n^{r+\alpha+1/q}}\Big\}, \quad r + \alpha + 1/q > 0, \quad k = \overline{0, m-2}; \\ \|x^* - x_n^*\|_{C^{m-1}} &= O\Big\{\frac{\ln n}{n^{r+\alpha+1/q}}\Big\}, \quad r + \alpha + 1/q > 0; \\ \|x^* - x_n^*\|_{C^m} &= O\Big\{\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1/p}}\Big\}, \quad r + \alpha - 1/p > 0, \end{aligned}$$

где q — сопряженный с p показатель: $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p \leq \infty$.

Доказательство следствия 3. Оценка (34) есть следствие неравенств (26) и (15). Докажем (35) при условии $x^{*(m-1)}(0) = x_n^{*(m-1)}(0)$. Положим $\rho_n(s) = x^{*(m-1)}(s) - x_n^{*(m-1)}(s)$. Тогда из (27) при $x = x^*(s)$ и из (28) при $x_n = x_n^*(s)$ в узлах (5) находим

$$\rho_n(s_j) = -\int_0^{s_j} B(x^* - x_n^*, \sigma) d\sigma + \frac{s_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(x^* - x_n^*, \sigma) d\sigma.$$

Поэтому

$$\max_{0 \leq j \leq 2n} |\rho_n(s_j)| = \max_{0 \leq j \leq 2n} |T(x^* - x_n^*; s_j)| \leq \|T(x^* - x_n^*)\|_C \leq d_2 \|x^* - x_n^*\|_{W_2^{m-1}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\rho_n(s)\|_C = \|x^{*(m-1)}(s) - x_n^{*(m-1)}(s)\|_C \leq \|x^{*(m-1)}(s) - \mathcal{L}_n x^{*(m-1)}(s)\|_C + \\ + \|\mathcal{L}_n \rho_n(s)\|_C \leq 2\|\mathcal{L}_n\|_C E_n^T(x^{*(m-1)})_C + \|\mathcal{L}_n\|_C \max_{0 \leq j \leq 2n} |\rho_n(s_j)| = \\ = O\{\|\mathcal{L}_n\|_C (E_n^T(x^{*(m-1)})_C + \|x^* - x_n^*\|_{W_2^{m-1}})\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Из (37) и (26) с учетом известной оценки $\|\mathcal{L}_n\|_C = O(\ln n)$ находим

$$\|\rho_n(s)\|_C = \|x^{*(m-1)} - x_n^{*(m-1)}\|_C = O\{E_n^T(x^{*(m-1)})_C \ln n\}. \tag{38}$$

Теперь из (38) и (34) получаем оценку (35)

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^{m-1}} = \|x^* - x_n^*\|_{C^{m-2}} + \|x^{*(m-1)} - x_n^{*(m-1)}\|_C = O\{E_n^T(x^{*(m-1)})_C \ln n\}.$$

Для доказательства (36) воспользуемся тождествами

$$x^{*(m)} \equiv y - Bx^*, \quad x_n^{*(m)} \equiv P_n y - P_n B x_n^*.$$

Отсюда последовательно находим

$$\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C \le \|x^{*(m)} - P_n x^{*(m)}\|_C + \|P_n B(x^* - x_n^*)\|_C \le$$
$$\le 2\|P_n\|_C E_n^T(x^{*(m)})_C + \|P_n\|_C \|B(x^* - x_n^*)\|_C \le$$
$$\le \|P_n\|_C \{2E_n^T(x^{*(m)})_C + \|B\|_{Z\to C}\|x^* - x_n^*\|_Z\} =$$
$$= O\{\|P_n\|_{C\to C}(E_n^T(x^{*(m)})_C + \|x^* - x_n^*\|_Z)\}. \quad (39)$$

В силу (26) и (35)

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^{m-1}} = O\{E_n^T(x^{*(m-1)})_C\} = O\left\{\frac{E_n^T(x^{*(m)})_C}{n}\right\}, \quad (40)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^{m-1}} = O\left\{E_n^T(x^{*(m)})_C \frac{\ln n}{n}\right\}. \quad (41)$$

Поэтому $\|x^* - x_n^*\|_Z = o\{E_n^T(x^{*(m)})_C\}$. Тогда из (39) с учетом (24), (25) получаем оценку

$$\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C = O\{\|P_n\|_C \; E_n^T(x^{*(m)})_C\} = O\{E_n^T(x^{*(m)})_C \ln n\}.$$

Отсюда и из (39)–(41) следует оценка (36). $\square$

Следствие 4 доказывается аналогично следствию 2 теоремы 1 с применением теорем типа Джексона в $C_{2\pi}$ (напр., [5]–[8]).

Замечание 2. В теореме 2 в качестве оператора B можно взять интегродифференциальный оператор (1′) лишь при $h_m(s,\sigma) \equiv 0$; в этом и состоит недостаток теоремы 2 по сравнению с теоремой 1. В то же время при выполнении этого дополнительного условия теорема 2 имеет и ряд преимуществ перед теоремой 1.

Следует также отметить, что при выборе в качестве B дифференциального оператора

$$Bx \equiv \sum_{k=0}^{m-1} a_k(s) x^{(k)}(s), \quad m \ge 1, \quad a_k(s) \in L_p, \quad p > 1,$$

где правая часть (1) — функция $y(s) \in L_p$ при $p > 1$, менее общий результат, чем теорема 2, но другим (на наш взгляд, более сложным) способом получен в [9], [10].

Литература

1. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. *Один новый полиномиальный оператор и его приложения* // Теория прибл. функций. – М.: Наука, 1987. – С. 98–100.
2. Ермолаева Л.Б. *Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегродифференциальных уравнений методом подобластей.* – Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 154 с.
3. Канторович Л.В., Акилов Т.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Наука, 1977. – 684 с.
4. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
5. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* – М.: Наука, 1965. – 407 с.
6. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.
7. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

8. Андриенко В.А. *Теоремы вложения для функций одного переменного* // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1971. – С. 203–262.
9. Керге Р.М. *Метод подобластей для периодической задачи* // Учен. зап. Тартуск. ун-та. – 1979. – № 500. – С. 53–68.
10. Керге Р.М. *О сходимости и устойчивости метода подобластей*: Автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук. – Тарту, 1979. – 10 с.
11. Лучка А.Ю., Каспшицкая М.Ф. *О методе коллокации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1968. – Т. 8. – № 5. – С. 950–964.

Казанская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
11.03.2003