ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 514.764

О.С. ГЕРМАНОВ

ВЕЙЛЕВО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ПОЛЕ КОНУСОВ В ТРЕХМЕРНОМ РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В [1] было введено понятие геодезического поля конусов направлений в римановом пространстве. Это поле определяется с помощью симметрического тензора $a_{ij}(x^k)$ (x^k — координаты пространства; $i, j, k = \overline{1, n}$; n — размерность пространства) уравнением

$$a_{ij}X^iX^j = 0, \tag{1}$$

где X^i — компоненты контрвариантного вектора, характеризующего какое-либо направление. Поле конусов (1) было названо геодезическим, если все геодезические линии, направления которых совпадают в некоторой точке с направлением, определяемым (1), сохраняют это свойство на всем своем протяжении. Как показано в [1], критерием того, чтобы поле конусов (1) было геодезическим, являются равенства $\nabla_{(k}a_{ij)} = M_{(k}a_{ij)}$, где M_k — компоненты некоторого вектора, ∇_k — символ ковариантного дифференцирования в рассматриваемой связности, скобки обозначают симметрирование по индексам, содержащимся в них.

В [2] в римановом пространстве рассматривались поля конусов (1), названные в [3] вейлево-геодезическими, невырожденный тензор которых удовлетворяет с некоторыми векторами M_k и R_k и метрическим тензором пространства g_{ij} уравнению

$$\nabla_{(k}a_{ij)} = M_{(k}a_{ij)} + R_{(k}g_{ij)}. \tag{2}$$

Римановы пространства, допускающие существование вейлево-геодезического поля конусов, порожденного невырожденным тензорным полем a_{ij} специального типа, характеристическое уравнение которого

$$|a_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0 \tag{3}$$

имеет не менее двух действительных корней, были построены в [4].

Данная работа посвящена построению трехмерных римановых пространств, допускающих специальное (см. ниже § 2) вейлево-геодезическое поле конусов, характеристическое уравнение которого имеет пару комплексно-сопряженных корней или один действительный корень кратности 3 (последний случай в [4] исключен).

1. Вейлево-геодезическое поле конусов

Выделим некоторые свойства вейлево-геодезического поля конусов.

Прежде всего отметим следующее: несмотря на то, что тензор этого поля определен с точностью до произвольного функционального множителя, геометрические свойства поля не зависят от выбора нормирования его тензора.

Действительно, для тензора $\widetilde{a}_{ij}$ такого, что $a_{ij} = \alpha\widetilde{a}_{ij}$ (α — некоторая функция координат), из (2) следует $\nabla_{(k}\widetilde{a}_{ij)} = \widetilde{M}_{(k}\widetilde{a}_{ij)} + \widetilde{R}_{(k}g_{ij)}$, где $\widetilde{M}_k = M_k - \alpha^{-1}\partial_k\alpha$, $\widetilde{R}_k = \alpha^{-1}R_k$, $\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}$. Кроме того, форма уравнений (2) инвариантна относительно конформных преобразований ([5], с. 161) связности.

Действительно, если пространство Вейля W_n с основным тензором $\overset{W}{g}_{ij}$ и дополнительным вектором ω_k ($\overset{W}{\nabla}_k \overset{W}{g}_{ij} = 2\omega_k \overset{W}{g}_{ij}$, $\overset{W}{\nabla}_k$ — символ ковариантного дифференцирования в W_n) конформно риманову пространству V_n, то ([5], с. 161) $\overset{W}{g}_{ij} = g_{ij}$, а вектор ω_k является вектором конформного преобразования, то $\overset{W}{\nabla}_{(k} a_{ij)} = M^W_{(k} a_{ij)} + R^W_{(k} g_{ij)}$, где $M^W_k = M_k + 4\omega_k$, $R^W_k = R_k - 2\omega_e g^{e_j} a_{jk}$.

Поскольку основной тензор пространства Вейля невырожден ([5], с. 153), то при невырожденности тензора поля (1), (2) уравнения $R^W_k = 0$ разрешимы относительно ω_k. Это означает, что среди всех пространств Вейля, конформных риманову пространству, допускающему вейлево-геодезическое поле конусов, порожденное невырожденным тензором a_{ij}, существует такое, в котором это поле является геодезическим ([5], с. 186) и объясняет название поля (1), (2).

2. Специальное вейлево-геодезическое поле конусов

Рассмотрим в трехмерном римановом пространстве, допускающем вейлево-геодезическое поле конусов, порожденное невырожденным тензором a_{ij}, характеристическое уравнение (3) (далее, если не оговорено противное, $i, j, k = 1, 2, 3$).

Поскольку тензор поля (2) по предположению невырожден, то все корни уравнения (3) отличны от нуля и один из них (обозначим его λ_3) действительный. Два других корня могут быть и комплексными. Римановы пространства, допускающие вейлево-геодезическое поле конусов, характеристическое уравнение которого имеет только действительные корни, среди них — не менее двух различны, исследованы в [4]. Далее будем считать, что $\lambda_{1,2}$ — комплексно-сопряженные корни.

Очевидно, размерности векторных пространств, образованных собственными векторами, соответствующими комплексно-сопряженным корням и действительному, равны соответственно двум и единице, и эти подпространства ортогональны друг другу. Будем предполагать, что они неизотропны, а их поля голономны, и называть, следуя [6], такое поле конусов специальным.

Поскольку матрица основного тензора риманова пространства симметрическая, то ее стандартным методом ([7], с. 169) можно привести к каноническому (диагональному) виду $g_{ii} = g_{ii}(x^k)$, $g_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Во введенной системе координат компоненты тензора специального вейлево-геодезического поля конусов будут иметь вид $a_{12} = a_{12}(x^k)$, $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = \lambda_3 g_{33}$ и (так оказывается удобнее) $a_{11} = U_1 g_{11}$, $a_{22} = U_2 g_{22}$, где U_1, U_2 — некоторые функции. Таким образом, во введенных координатах

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} g_{ii} (dx^i)^2, \tag{4}$$

$$a_{ij} dx^i dx^j = U_1 g_{11} (dx^1)^2 + 2a_{12} dx^1 dx^2 + U_2 g_{22} (dx^2)^2 + \lambda_3 g_{33} (dx^3)^2, \tag{5}$$

где g_{ii} ($i = \overline{1,3}$), λ_3, a_{12} — отличные от нуля функции, U_1, U_2 —произвольные функции координат, поэтому

$$\lambda_{1,2} = \frac{U_1 + U_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{U_1 - U_2}{2}\right)^2 + \frac{a_{12}^2}{g_{11} g_{22}}}, \quad \lambda_3 = \lambda_3(x^k). \tag{6}$$

Последнее показывает, что комплексная сопряженность корней λ_1 и λ_2 эквивалентна тому, что

$$(U_1 - U_2)^2 < -4(g_{11} g_{22})^{-1} a_{12}^2. \tag{7}$$

Заметим, что при необходимости действительный корень уравнения (3) можно считать равным единице. Это обеспечивается тем, что тензор поля (1) определен с точностью до функционального множителя.

3. Специальное вейлево-геодезическое поле конусов в трехмерном римановом пространстве

Рассмотрим уравнения (2), определяющие специальное вейлево-геодезическое поле конусов (5) в римановом пространстве с метрикой (4), и положим

$$M_i = \partial_i \ln m_i^2, \tag{8}$$

где m_i — некоторые не равные нулю функции координат.

При $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ из (2) получаем

$$a_{12} = m_3^2 g_{11} g_{22} b, \tag{9}$$

где b — отличная от нуля функция переменных x^1 и x^2. Эти же уравнения при $i = j = k$ дают

$$R_i = m_i^2 \partial_i \frac{U_i}{m_i^2} + \partial_j g_{ii} m_3^2 b, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad R_3 = m_3^2 \partial_3 \frac{\lambda_3}{m_3^2}. \tag{10}$$

После этого из (2) при $i = k = 1, 2$; $j = 3$ выводим

$$U_i = \lambda_3 + m_3^2 g_{ii} v_i, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

где v_1, v_2 — некоторые функции переменных x^1 и x^2. Прежде всего рассмотрим случай $v_1 v_2 \neq 0$ ($U_{1,2} \neq \lambda_3$). Уравнения (2) при $i = k = 3$, $j = 1, 2$ записываются в виде

$$\partial_i \left[\left(\frac{m_3}{m_i} \right)^2 \frac{g_{ii}}{g_{33}} v_i \right] = - \left(\frac{m_3}{m_j} \right)^2 b \partial_j \frac{g_{ii}}{g_{33}}, \quad i \neq j.$$

Обозначив $\left(\frac{m_3}{m_i}\right)^2 = \mu_i$, $\frac{g_{ii}}{g_{33}} = h_i$, $i = 1, 2$, перепишем их следующим образом:

$$\mu_i v_i \partial_i h_i + \mu_i b \partial_j h_i + 0 \partial_3 h_j = -\partial_i(\mu_i v_i) h_i, \quad i \neq j. \tag{12}$$

Методы решения уравнений (12) существенно зависят от того, являются они однородными ($\partial_i(\mu_i v_i) = 0$) или нет ([8], с. 248). В случае неоднородных уравнений (12) для нахождения их решений необходимо составить соответствующие им системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^1}{\mu_1 v_1} = \frac{dx^2}{\mu_1 b} = \frac{dx^3}{0} = -\frac{dh_1}{\partial_1(\mu_1 v_1) h_1} \quad \text{и} \quad \frac{dx^1}{\mu_2 b} = \frac{dx^2}{\mu_2 v_2} = \frac{dx^3}{0} = -\frac{dh_2}{\partial_2(\mu_2 v_2) h_2} \tag{13}$$

и найти их независимые интегралы. Если $\varphi_{i1}(x^k, h_1) = \mathrm{const}$ и $\varphi_{i2}(x^k, h_2) = \mathrm{const}$ ($i = \overline{1,3}$) — искомые интегралы, то общие решения (12) удовлетворяют соотношениям $\Phi_j(\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \varphi_{3j}) = 0$, где Φ_1, Φ_2 — произвольные функции трех переменных ([8], с. 253). Решения (12) получатся в явном виде, если разрешить эти соотношения относительно h_1 и h_2. Если же (12) однородны, то их общие решения имеют вид $h_j = \Phi_j(\varphi_{2j}, \varphi_{1j})$, $j = 1, 2$, где Φ_j — произвольные функции двух переменных, а φ_{i1}, φ_{i2} ($i = 1, 2$) — независимые интегралы следующих систем соответственно: $v_1^{-1} dx^1 = b^{-1} dx^2 = dx^3 : 0$ и $b^{-1} dx^1 = v_2^{-1} dx^2 = dx^3 : 0$.

Независимо от того, однородны уравнения (12) или нет, при нахождении их решений приходится одновременно интегрировать уравнения $v_1^{-1} dx^1 = b^{-1} dx^2$ и $b^{-1} dx^1 = v_2^{-1} dx^2$, которые показывают, что "постоянные" интегрирования в (9) и (11) связаны соотношением

$$b^2 = v_1 v_2. \tag{14}$$

Это вместе с (11) и (9) дает, что все корни уравнения (3) действительны.

Таким образом, установлена

Лемма. *Трехмерное риманово пространство не допускает существования специального вейлево-геодезического поля конусов, порожденного формой, имеющей в специальной системе координат представление* (5), *характеристическое уравнение которого имеет комплексно-сопряженные корни* (6), *если хотя бы одна из функций* U_1 *или* U_2 *не равна* λ_3.

Однако при $v_1 v_2 \neq 0$ выделяется случай $g_{11}v_1 + g_{22}v_2 = 0$, интересный тем, что уравнение (3) имеет один действительный корень λ_3, кратность которого равна размерности пространства (случай, исключенный в [4]), поэтому прежде всего разберем его. Для этого продолжим решение уравнений (12).

1) Оба уравнения (12) неоднородны. В силу (14) соответствующие (12) системы (13) имеют один общий для них независимый интеграл — решение уравнения $|v_1|^{-1/2}dx^1 = \pm|v_2|^{-1/2}dx^2$. Условия его интегрируемости требуют, чтобы $|v_1|^{-1/2} = \partial_1 Q$, $\pm|v_2|^{-1/2} = \partial_2 Q$, где Q — некоторая функция x^1, x^2, поэтому первый независимый интеграл систем (13), общий для них, имеет вид $Q = \mathrm{const}$. Второй независимый интеграл этих систем, также общий для них, очевиден $x^3 = \mathrm{const}$. Поэтому для решения уравнений (12) осталось найти третьи независимые интегралы систем (13), интегрируя соответственно уравнения $\frac{dx^i}{\mu_i v_i} = -\frac{dh_i}{\partial_i(\mu_i v_i)h_i}$ или $\frac{dx^i}{\mu_i b} = -\frac{dh_j}{\partial_j(\mu_j v_j)h_j}$, $i,j = 1,2$, $i \neq j$.

Их условия интегрируемости требуют, во-первых, чтобы $\partial_i(\mu_i v_i) = k_i = \mathrm{const} \neq 0$, $\mu_i v_i = f_i(x^i)$, $i = 1,2$ ($\mu_i v_i = k_i x^i + d_i$, $d_i = \mathrm{const}$, $i = 1,2$, по i не суммируется!), и, во-вторых, чтобы $\mu_1 b$, $\mu_2 b$ не зависели от координат x^1 и x^2 соответственно. Поэтому $v_i b^{-1} = (k_i x^i + d_i)\varphi_i$, $i,j = 1,2$, $i \neq j$, $\varphi_1(x^2)$, $\varphi_2(x^1)$ — некоторые функции указанных переменных такие, что (см. (14)) $(k_1x^1 + d_1)(k_2x^2 + d_2)\varphi_1\varphi_2 = 1$. Это дает $\varphi_2(k_1x^1 + d_1) = C$, $\varphi_1(k_2x^2 + d_2) = \frac{1}{C}$, $C = \mathrm{const} \neq 0$ и $\mu_1 b = C(k_2x^2 + d_2)$, $\mu_2 b = \frac{1}{C}(k_1x^1 + d_1)$.

Как легко проверить, $\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{1}{C}\frac{k_1x^1+d_1}{k_2x^2+d_2}\right)^2$, поэтому $(k_1x^1 + d_1)\partial_1 Q + C(k_2x^2 + d_2)\partial_2 Q = 0$, откуда $Q = Q(W)$, где Q — некоторая функция переменной $W = (k_1x^1 + d_1)^{\frac{1}{k_1}}/(k_2x^2 + d_2)^{\frac{1}{Ck_2}}$.

Итак, уравнения, определяющие третьи независимые интегралы систем (13), приводятся к виду $\frac{dx^i}{k_i x^i + d_i} = -\frac{dh_i}{k_i h_i}$, $i = 1,2$, или $\frac{C dx^1}{k_1x^1+d_1} = -\frac{dh_2}{k_2h_2}$ и $\frac{dx^2}{C(k_2x^2+d_2)} = -\frac{dh_1}{k_1h_1}$. Их интегрирование дает $(k_i x^i + d_i)h_i = \mathrm{const}$, $i = 1,2$ ($h_1(k_2x^2 + d_2)^{\frac{k_1}{Ck_2}} = \mathrm{const}$, $h_2(k_1x^1 + d_1)^{\frac{Ck_2}{k_1}} = \mathrm{const}$). Поэтому общие решения (12) удовлетворяют соответственно уравнениям $\Phi_i(Q, x^3, h_i(k_i x^i + d_i)) = 0$, $i = 1,2$ ($G_1(Q, x^3, h_1(k_2x^2+d_2)^{\frac{k_1}{Ck_2}}) = 0$, $G_2(Q, x^3, h_2(k_1x^1+d_1)^{\frac{Ck_2}{k_1}}) = 0$), где Φ_1, Φ_2, G_1, G_2 — произвольные функции трех переменных. Разрешив их относительно h_1 и h_2, получим $h_1 = F_1(W, x^3)(k_1x^1 + d_1)^{-\frac{1}{2}}(k_2x^2 + d_2)^{-\frac{k_1}{2Ck_2}}$, $h_2 = F_2(W, x^3)(k_2x^2 + d_2)^{-\frac{1}{2}}(k_1x^1 + d_1)^{-\frac{Ck_1}{2k_2}}$, где F_1, F_2 — произвольные функции двух переменных.

И, наконец, рассмотрим уравнения (2) при $i = j = 1$, $k = 2$ и $i = j = 2$, $k = 1$

$$\partial_i\left[\mu_i\left(v_j - \frac{g_{ii}}{g_{jj}}v_i\right)\right] = \mu_j^2\mu_i b^3\partial_j\left[\frac{g_{ii}}{(\mu_j b)^2 g_{jj}}\right], \quad i \neq j.$$

В силу (14) и равенства $g_{11}v_1 + g_{22}v_2 = 0$ эти уравнения совпадают и приводятся к виду $\partial_1(\mu_1 v_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{v_2}{b}\right)^3\partial_2(\mu_2 v_1)$. Отсюда, учитывая уже определенное, получаем $k_1 = Ck_2$, следовательно, $h_i = F_i(W, x^3)[(k_1x^1 + d_1)(k_2x^2 + d_2)]^{-\frac{1}{2}}$, $i = 1,2$, $W = (k_1x^1 + d_1)/(k_2x^2 + d_2)$.

2) Пусть $\partial_1(\mu_1 v_1) = 0$, $\partial_2(\mu_2 v_2) \neq 0$. При этом первое из уравнений (12) является однородным, и для его решения достаточно найти два независимых интеграла системы $v_1^{-1}dx^1 = b^{-1}dx^2$, $dx^3 = 0$ ([8], с. 249), а для определения h_2 по-прежнему необходимо решить второе уравнение системы (12).

Исследование полученных уравнений снова приводит к (14), где $v_1 = (\partial_1 Q)^{-2}$, $v_2 = (\partial_2 Q)^{-2}$, а Q — произвольная функция переменных x^1, x^2, причем $Q = \mathrm{const}$, $x^3 = \mathrm{const}$ являются независимыми интегралами соответствующих (12) систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Знание их позволяет написать решение первого из уравнений (12) $h_1 = \widetilde{F}_1(Q, x^3)$, где $\widetilde{F}_1$ — произвольная функция двух переменных. Общее решение второго из уравнений (12) ищется так же, как и раньше, и имеет вид $h_2 = \widetilde{F}_2(Q, x^3)[(kx^2+d_2)e^{k\psi}]^{-1/2}$, где $\widetilde{F}_2$ — произвольная функция двух переменных, ψ — некоторая функция x^1, $k \neq 0$, d_2 постоянны. При этом $\mu_2 v_2 = kx^2 + d_2$, $\mu_1 b\psi' = 1$, $\mu_1 v_1$ не зависит от x^1, $\mu_2 b$ не зависит от x^2.

Так как $v_2 b^{-1} = bv_1^{-2} = (kx^2+d_2)\psi'$ и $v_i = (\partial_i Q)^{-2}$, $i = 1, 2$, то $\partial_1 Q + (kx^2+d_2)\partial_2 Q = 0$. Отсюда $Q = Q(W)$, где $W = \psi - \frac{1}{k}\ln|kx^2 + d_2|$, $\mu_1 v_1 = \frac{q}{kx^2+d_2}$, $\mu_1 b = q\psi'$, q — произвольная функция x^3. Последнее из уравнений (2) при $i = j \neq k$, $i, j, k = 1, 2$ теперь записывается в виде $2\psi'' = -k\psi'^2$ и дает $\psi = \frac{1}{k}\ln|kx^1 + d_1|C$, где $C \neq 0$, d_1 постоянны.

Таким образом, $h_1 = F_1(W, x^3)$, $h_2 = \frac{F_2(W,x^3)}{(kx^1+d_1)\sqrt{kx^2+d_2}}$.

3) Наконец, решение однородных уравнений (12) имеет вид $h_j = F_j(\psi_{1j}; \psi_{2j})$, $j = 1, 2$, где F_j — произвольные функции двух переменных, ψ_{j1}, ψ_{j2} — независимые интегралы систем (13). Один из них, общий для этих систем, очевиден $x^3 = \mathrm{const}$. Вторые являются решениями уравнений $v_1^{-1}dx^1 = b^{-1}dx^2$, $b^{-1}dx^1 = v_2^{-1}dx^2$. Отсюда снова $b^2 = v_1 v_2$, $v_i = (\partial_i Q)^{-2}$, $i = 1, 2$, Q — произвольная функция x^1, x^2, причем соотношение $Q = \mathrm{const}$ является вторым независимым интегралом систем (13), общим для них.

Итак, $h_j = F_j(Q, x^3)$, $j = 1, 2$. При этом $\mu_i v_i = f_i(x^j, x^3)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Так как $\frac{dx^1}{\mu_1 v_1} = \frac{dx^2}{\mu_2 b}$, то $\mu_1 b = g_1(x^1, x^3)$. Подобные же рассуждения дают $\mu_2 b = g_2(x^2, x^3)$ (g_1, g_2 — произвольные функции указанных переменных). Поскольку $v_1^{-1}b = v_2 b^{-1}$ и обе части этого равенства не зависят от x^3, $g_1 = \alpha f_1(x^2, x^3)$, $g_2 = \alpha^{-1}f_2(x^1, x^3)$, где α — произвольная функция x^1, x^2 такая, что $\partial_1\alpha = \alpha\partial_1\ln|f_2|$, $\partial_2\alpha = -\alpha\partial_2\ln|f_1|$. Но $\partial_3\partial_1\alpha = \partial_3\partial_2\alpha = 0$, поэтому $f_1 = p_1'(x^2)q_1(x^3)$, $f_2 = p_2'(x^1)q_2(x^3)$ (p_i, q_i, $i = 1, 2$, — произвольные функции указанных переменных), таким образом, $\alpha = C\frac{p_2'}{p_1'}$, $C = \mathrm{const} \neq 0$ и $\mu_1 v_1 = p_1' q_1$, $\mu_1 b = Cp_2' q_1$, $\mu_2 v_2 = p_2' q_2$, $\mu_2 b = \frac{1}{C}p_1' q_2$.

Теперь легко получить $\frac{\partial_1 Q}{\partial_2 Q} = -C\frac{p_2'}{p_1'}$, откуда $Q = Q(W)$, где $W = Cp_2 - p_1$, следовательно, $h_j = F_j(W_1 x^3)$, $j = 1, 2$.

Из оставшихся уравнений (2) имеем $p_2''(p_1')^2 = C(p_2')^2 p_1''$, и поэтому $\left(\frac{1}{p_2'}\right)' = C\left(\frac{1}{p_1'}\right)' = -k = \mathrm{const}$. Отсюда при $k = 0$ получим $p_1 = k_2 x^2 + d_2$, $p_2 = k_1 x^1 + d_1$ ($k_i \neq 0$, d_i, $i = 1, 2$, постоянны), следовательно, $W = Ck_1 x^1 - k_2 x^2$. Если же $k \neq 0$, то $p_2 = \frac{1}{k}\ln|kx^1 + d_2| + C_1$, $p_1 = \frac{C}{k}\ln|\frac{k}{C}x^2 + d_2| + C_2$ (C_i, d_i постоянны, $i = 1, 2$) и $W = C\frac{kx^1+d_1}{kx^2+d_2}$.

Итак, доказана

Теорема 1. *Если трехмерное риманово пространство допускает специальное вейлево-геодезическое поле конусов, характеристическое уравнение которого имеет один действительный корень кратности 3, то в специальной системе координат метрическая форма этого пространства и форма, определяющая поле конусов, приводятся соответственно к виду (4), (5), где U_1, U_2, $\lambda_3 \neq 0$ — функции, связанные соотношениями (11), a_{12} имеет вид (9), а "дополнительные" векторы поля — (8) и (10), где $m_i \neq 0$, $i = \overline{1, 3}$, — произвольные функции координат, $b \neq 0$, v_1, v_2 — произвольные функции x^1, x^2, связанные соотношением (14), $v_i = (\partial_i Q)^{-2}$, $i = 1, 2$, Q — произвольная функция W и*

1) $g_{ii} = \frac{F_i(W,x^3)g_{33}}{\sqrt{(k_1x^1+d_1)(k_2x^2+d_2)}}$, $W = \frac{k_1x^1+d_1}{k_2x^2+d_2}$, $\mu_i v_i = k_i x^i + d_i$, $\mu_j b = \frac{k_j}{k_i}(k_i x^i + d_i)$ ($i, j = 1, 2$, $i \neq j$, *по i не суммируется!*);

2) $g_{11} = F_1(W, x^3)g_{33}$, $g_{22} = \frac{F_2(W,x^3)g_{33}}{(kx^1+d_1)\sqrt{kx^2+d_2}}$, $W = \frac{(kx^1+d_1)^2}{kx^2+d_2}$, $\mu_1 v_1 = \frac{q}{kx^2+d_2}$, $\mu_2 v_2 = kx^2 + d_2$, $\mu_1 b = \frac{2q}{kx^1+d_1}$, $\mu_2 b = \frac{kx^1+d_1}{2}$;

3) $g_{ii} = F_i(W, x^3)g_{33}$, $i = 1, 2$, *где*

   а) $W = Ck_1x^1 - k_2x^2$, $\mu_1 v_1 = k_2 q_1$, $\mu_1 b = Ck_1 q_2$, $\mu_2 v_2 = k_1 q_2$, $\mu_2 b = \frac{q_2}{kx^2+Cd_2}$,

   б) $W = C\frac{kx^1+d_1}{kx^2+Cd_2}$, $\mu_1 v_1 = \frac{Cq_1}{kx^2+Cd_2}$, $\mu_2 b = \frac{Cq_1}{kx^1+d_1}$, $\mu_2 v_2 = \frac{q_2}{kx^1+d_1}$, $\mu_2 b = \frac{q_2}{kx^2+Cd_2}$.

При этом во всех случаях g_{33} — произвольная функция трех, F_1, F_2 — двух, q, q_1, q_2 — одной указанных переменных, $g_{11}v_1 + g_{22}v_2 = 0$, C, k, k_1, k_2 — отличны от нуля, d_1, d_2 — произвольные постоянные.

Отметим, что во всех случаях "дополнительный" вектор M_k градиентен. Доказательство этого представлено только для первого случая (остальные доказываются аналогично).

Так как $m_i^2 = \frac{k_j m_3^2 b}{k_i(k_j x^j + d_j)}$, $i \neq j$, то в силу (14) $M_i = \partial_i \ln m_3^2 b$.

Продолжим построение трехмерных римановых пространств, допускающих специальное вейлево-геодезическое поле конусов, считая, что характеристическое уравнение этого поля имеет комплексно-сопряженные корни. В этом случае в (11) одна из функций v_1 или v_2 ("постоянные" интегрирования) обращается в нуль. Не уменьшая общности, можно считать, что $v_1 = 0$, а $v_2 = v \neq 0$, и записать уравнения (2) при $i = j = 3$, $k = 1$, $i = j = 3$, $k = 2$, $i = j = 2$, $k = 1$ и $i = j = 1$, $k = 2$ соответственно в виде ($t = \frac{g_{22}}{g_{11}} = \frac{h_2}{h_1}$)

$$\partial_1 h_1 = 0, \tag{15}$$

$$\partial_2(\mu_2 v h_2) = -\mu_2 b \partial_1 h_2, \tag{16}$$

$$\partial_1(\mu_1 v) = \mu_2^2 \mu_1 b^3 \partial_2 \left[\frac{1}{(\mu_2 b)^2 t}\right], \tag{17}$$

$$\partial_2(\mu_2 v t) = -\mu_1^2 \mu_2 b^3 \partial_1 \left[\frac{t}{(\mu_1 b)^2}\right]. \tag{18}$$

Заметим, что при этом (8)–(11) остаются в силе, только в (11) необходимо положить $v_1 = 0$.

Из (15) получаем $h_1 = F_1(x^1, x^3)$, где F_1 — произвольная функция указанных переменных, поэтому (16) принимает вид

$$\partial_2(\mu_2 v t) = -\frac{\mu_2 b}{F_1} \partial_1 (F_1 t).$$

Сравнивая это с (18), заключаем $\partial_1(F_1 \mu_1^2 b^2) = 0$, следовательно, $(\mu_1 b)^2 F_1 = p$, где p — произвольная функция x^2, x^3.

Обратимся теперь к уравнению (16), переписав его

$$\mu_2 b \partial_1 h_2 + \mu_2 v \partial_2 h_2 + 0 \partial_3 h_2 = -\partial_2(\mu_2 v) h_2. \tag{19}$$

И здесь приходится различать однородное и неоднородное уравнения.

4) $\partial_2(\mu_2 v) \neq 0$. В этом случае соответствующая (19) система обыкновенных дифференциальных уравнений записывается в виде $(\mu_2 b)^{-1} dx^1 = (\mu_2 v)^{-1} dx^2 = \frac{dx^3}{0} = -\frac{dh_2}{\partial_2(\mu_2 v) h_2}$.

Первый ее независимый интеграл — решение уравнения $b^{-1} dx^1 = v^{-1} dx^2$ — имеет вид $Q(x^1, x^3) = \mathrm{const}$, где $b = (\partial_1 Q)^{-1}$, $v = -(\partial_2 Q)^{-1}$. Второй очевиден $x^3 = \mathrm{const}$, а для определения третьего необходимо интегрировать уравнение $\frac{dx^2}{\mu_2 v} = -\frac{dh_2}{\partial_2(\mu_2 v) h_2}$. Его условия интегрирования требуют, чтобы $\mu_2 v$ являлось такой функцией переменной x^2, для которой $\partial_2 \partial_2(\mu_2 v) = 0$. Поэтому $\mu_2 v = kx^2 + d$ ($k \neq 0$, d постоянны) и соотношение $(kx^2 + d) h_2 = \mathrm{const}$ является третьим независимым интегралом рассматриваемой системы. Таким образом, решение (19) удовлетворяет уравнению $G_1(Q, x^3, (kx^2 + d) h_2) = 0$, где G_1 — произвольная функция трех переменных, разрешив которое, получим $h_2 = \frac{\Phi_2(Q, x^3)}{kx^2 + d}$, где Φ_2 — произвольная функция двух переменных.

Однако третий независимый интеграл можно искать из уравнения $\frac{dx^1}{\mu_2 b} = -[\partial_2(\mu_2 v) h_2]^{-1} dh_2$. Как легко теперь проверить, его условия интегрируемости выполнены, поэтому можно положить $[k \mu_2 b]^{-1} = (\ln \psi)'$, где ψ — произвольная функция x^1, и записать третий интеграл $\psi h_2 = \mathrm{const}$. Следовательно, решение (19) удовлетворяет уравнению $G_2(Q, x^3, \psi h_2) = 0$ (G_2 — произвольная функция трех переменных), откуда $h_2 = \frac{\Phi_2(Q, x^3)}{\psi}$ (Q — произвольная функция трех переменных). Таким образом, решение (19) окончательно записывается $h_2 = \frac{\Phi(Q, x^3)}{\sqrt{\psi(kx^2 + d)}}$ (Φ — произвольная функция двух переменных).

Как легко получить, $\partial_1 Q/\partial_2 Q = -\frac{(kx^2+d)(\ln\psi)'}{k}$, поэтому $Q = Q(W)$, где $W = \frac{\psi(x^1)}{\sqrt{kx^2+d}}$, $h_2 = \frac{F_2(W,x^3)}{\sqrt{\psi(kx^2+d)}}$ и F_2 — произвольная функция двух переменных. Непосредственная проверка показывает, что при этом (18) обращается в тождество.

Рассмотрим оставшееся уравнение (17). Подставив в него уже определенные параметры, приведем его к виду

$$\frac{1}{k\sqrt{F_1\psi}}\partial_1\left[\frac{(\ln\psi)'}{F_1}\right] = \frac{1}{kx^2+d}\partial_2\left[\frac{\sqrt{kx^2+d}}{F_2}\right].$$

Левая часть этого уравнения не зависит от x^2. Потребовав того же от правой части, придем к условию $\partial_2\partial_2\big(\frac{1}{F_2}\big) - \frac{3}{4}\frac{k^2}{(kx^2+d)^2}\frac{1}{F_2} = 0$ или (поскольку $F_2 = F_2(W,x^3)$) $W^2\partial_W\partial_W\big(\frac{1}{F_2}\big) + 2W\partial_W\big(\frac{1}{F_2}\big) - \frac{3}{4}\frac{1}{F_2} = 0$. Отсюда ([9], с. 406) $\frac{1}{F_2} = q_1(x^3)\sqrt{W} + \frac{q_2(x^3)}{\sqrt{W^3}}$, где q_1, q_2 — произвольные функции x^3, и (17) принимает вид $\frac{1}{F_1}\partial_1\big[\frac{(\ln\psi)'}{F_1}\big] = 2k^2 q_2\frac{1}{\psi}$. После интегрирования получим $F_1 = -\psi'^2[4(k^2q_2\psi + q_3\psi^2)]^{-1}$, где q_3 — произвольная функция x^3.

Если же (19) однородны, то (15) и (17) не меняются, а (16) и (18) записываются соответственно

$$b\partial_1 h_2 + v\partial_2 h_2 = 0, \tag{20}$$

$$(\mu_1 b)^2\partial_1 t + \mu_1^2 bv\partial_2 t = \partial_1(\mu_1 b)^2 t. \tag{21}$$

И здесь выделяются однородное и неоднородное уравнения (21).

5) $\partial_2(\mu_2 v) = 0$, $\partial_1(\mu_1 b) \neq 0$. В этом случае из (15) и (17) следует $h_1 = F_1(x^1,x^3)$, $(\mu_1 b)^2 = p(x^2,x^3)F_1$, где p и F_1 — произвольные функции указанных переменных, а (20) дает $h_2 = h_2(Q,x^3)$, где h_2 — произвольная функция двух переменных, Q — функция переменных x^1 и x^2 такая, что $b\partial_1 Q = -v\partial_2 Q = 1$.

Переписав (21) следующим образом:

$$\mu_1 b\partial_1 t + \mu_1 v\partial_2 t + 0\partial_3 t = 2\partial_1(\mu_1 b)t,$$

как и раньше найдем, что $\mu_1 b = k_1x^1 + d_1$ ($k_1 \neq 0$, d_1 постоянны), $\mu_1 v = \frac{2k_1}{(\ln\psi)'}$, ψ — произвольная функция x^2, μ_1 не зависит от x^3 и $t = (k_1x^1+d_1)\sqrt{\psi}T(\alpha,x^3)$, где T — произвольная функция двух переменных. Сравнив найденные значения $\mu_1 b$ с ранее определенными, выводим $p = p(x^3)$, а $F_1 = \frac{p}{(k_1x^1+d_1)^2}$.

Поскольку теперь $\partial_1 Q/\partial_2 Q = -\frac{2k_1}{(k_1x^1+d_1)(\ln\psi)'}$, то $Q = Q(W)$, где $W = \frac{k_1x^1+d_1}{\psi(x^2)}$, следовательно, $h_2 = F_2(W,x^3)$, где F_2 — произвольная функция двух переменных и $t = \frac{k_1x_1+d_1}{p(x^3)}F_2(W,x^3)$. Теперь (17) записывается в виде уравнения $W\partial_W F_2 + 2\big(1 - \frac{\psi''\psi}{\psi'^2}\big)F_2 = 0$, которое определяет F_2 как функцию W и x^3, если $\psi''\psi|\psi|^2 = k = \mathrm{const}$. Оно имеет следующие решения:

а) при $k = 1$ ($\psi(x^2) = e^{k_2x^2+d_2}$, $k_2 \neq 0$, d постоянны, $W = \frac{(k_1x^1+d_1)^2}{e^{k_2x^2+d_2}}$) $h_2 = F_2(x^3)$, где F_2 — произвольная функция x^3;

б) при $k \neq 1$ ($\psi = [(1-k)(k_2x^2+d_2)]^{\frac{1}{1-k}}$, $k_2 \neq 0$, d постоянны, $W = (k_1x^1+d_1)[(1-k)(k_2x^2+d_2)]^{\frac{1}{1-k}}$), $h_2 = qW^{2(k-1)}$, q — произвольная функция x^3.

Заметим, что условие $\partial_2(\mu_2 v) = 0$ дает $m_1^2 = (\ln\psi)'\alpha M_2^2$, где α — произвольная функция переменных x^1, x^2, поэтому $M_i = \mathrm{grad}$.

6) При $\partial_2(\mu_2 v) = \partial_1(\mu_1 b) = 0$ уравнения (15), (17) и (20) остаются в силе, а (21) переписывается в виде $b\partial_1 t + v\partial_2 t = 0$. Поэтому $h_1 = F_1(x^3)$, $h_2 = F_2(Q,x^3)$, $T = T(Q,x^3)$, $\mu_1 b = f_1(x^2,x^3)$, $\mu_2 v = f_2(x^1,x^3)$, где F_1, T, f_1, f_2 — произвольные функции указанных переменных, $F_2 = TF_1$, а $Q(x^1,x^2)$ такова, что $b\partial_1 Q = -v_2\partial_2 Q = 1$. Таким образом, (17) принимает вид $\partial_1\big(\frac{v}{b}\big) = \big(\frac{b}{v}\big)^2\partial_2\big[\big(\frac{v}{b}\big)^2\frac{1}{t}\big]$. Поскольку $\frac{v}{b}$ не зависит от x^3, то $\frac{1}{t} = \big(\frac{b}{v}\big)^2[A(x^1,x^2)+B(x^1,x^3)]$, где A и B — произвольные функции указанных переменных, и (17) переписывается в виде $\partial_1\big(\frac{v}{b}\big) = \big(\frac{b}{v}\big)^2\partial_2 A$.

Отсюда, положив $A = \frac{1}{3}\partial_1 a(x^1,x^2)$, выводим $(\frac{v}{b})^3 = \partial_2 a + C(x^2)$, где C — произвольная функция x^2. Полученное представляет собой следующее условие для определения функции Q:

$$\frac{\partial_1 Q}{\partial_2 Q} = -\sqrt[3]{\partial_2 a + C}, \tag{22}$$

и в силу неопределяемости функций a и C не позволяет найти ее общий вид.

Поэтому ниже покажем лишь существование трехмерных римановых пространств, допускающих существование вейлево-геодезического поля конусов рассматриваемого вида, построив соответствующий пример. Для этого, пользуясь произволом функций a и C, положим $C(x^2) = 0$, $\partial_2 a = -(\frac{kx^2+d_2}{-kx^1+d_1})^3$, где $k \neq 0$, d_1, d_2 постоянны. Тогда $\partial_1 Q/\partial_2 Q = \frac{kx^2+d_2}{-kx^1+d_1}$, откуда $Q = Q(W)$, где $W = \frac{kx^2+d_2}{-kx^1+d_1}$ и $\frac{1}{t} = -\frac{W^2}{4} + \frac{B(x^1,x^3)}{W^2}$ (заметим, что“постоянную” интегрирования, определяя функцию a, положили равной нулю).

Итак, $g_{11} = F_1 g_{33}$, $g_{22} = [\frac{B}{W^2} - \frac{W^2}{4}]^{-1} g_{33}$, где g_{33} — произвольная функция координат; B — функция x^1, x^3; F_1 — функция только x^3.

7) Наконец, рассмотрим последний случай $v_1 = v_2 = 0$. Оставшиеся уравнения (2) приводятся к виду $\partial_i h_j = \partial_i[\frac{t}{(\mu_i b)^2}] = 0$, $i,j = 1,2$, $i \neq j$. Отсюда $h_1 = F_1(x^1,x^3)$, $h_2 = F_2(x^2,x^3)$, где F_1, F_2 — такие функции, для которых $\partial_i[(\mu_i b)^2 F_i] = 0$, $i = 1,2$. Это дает $m_i^4 = (m_3^2 b)^2 F_i H_i$, $i = 1,2$, где $H_1(x^2,x^3)$, $H_2(x^1,x^3)$ — произвольные функции указанных переменных.

Итак, получена

Теорема 2. *Если трехмерное риманово пространство допускает специальное вейлево-геодезическое поле конусов, характеристическое уравнение которого имеет один простой действительный корень, то в специальной системе координат метрическая форма этого пространства и форма, определяющая поле конусов, приводятся соответственно к виду* (4), (5), *где* U_1, U_2, $\lambda_3 \neq 0$ *— произвольные функции координат, связанные соотношениями* (11) *при* $v_1 = 0$, $v_2 = v \neq 0$, a_{12} *имеет вид* (9), *где* $b \neq 0$ *— произвольная функция* x^1, x^2, *“дополнительные” векторы поля — соответственно* (8) *и* (10), *где* $m_i \neq 0$ $(i = 1,2,3)$ *— произвольные функции координат,* $b\partial_1 Q = -v\partial_2 Q = 1$, Q *— некоторая функция* W *и*

4. $g_{11} = F_1 g_{33}$, $g_{22} = \frac{F_2 g_{33}}{\sqrt{\psi(k_2 x^2 + d_2)}}$, $F_1 = -\frac{\psi'^2}{4(k^2 q_2 \psi + q_3 \psi^2)}$, $F_2 = [q_1\sqrt{W} + \frac{q_2}{\sqrt{W^3}}]^{-1}$, $W = \frac{\psi}{kx^2+d}$, $\mu_2 v = kx^2 + d$, $(\mu, b)^2 = \frac{p}{F_1}$, $p_2 b = \frac{k}{(\ln\psi)'}$; $\psi = \psi(x^1)$, $p = p(x^2,x^3)$ *— произвольные функции,* $k \neq 0$;
5. $g_{11} = \frac{p g_{33}}{(k_1 x^1 + d_1)^2}$, $g_{22} = F_2(W,x^3) g_{33}$, $W = \frac{(k_1 x^1 + d_1)^2}{\psi}$, $p_1 b = k_1 x^1 + d_1$, $\mu_2 b = \frac{2k_1}{(\ln\psi)'}$, $m_1^2 = (\ln\psi)'\alpha m_2^2$, *где* $p = p(x^3)$, $\alpha = \alpha(x^1,x^3)$ *произвольны и*
   а) *при* $\psi = e^{k_2 x^2 + d_2}$ $F_2 = F_2(x^3)$,
   б) *при* $\psi = [(1-k)(k_2 x^2 + d_2)]^{\frac{1}{1-k}}$ $(k \neq 1$ *постоянна*$)$ $F_2 = qW^{2(k-1)}$.
6. $g_{11} = F_1(x^3) g_{33}$, $g_{22} = F_2(Q,x^3) g_{33}$, *где функция* $Q(x^1,x^2)$ *удовлетворяет уравнению* (22);
7. $g_{11} = F_1 g_{33}$, $g_{22} = F_2 g_{33}$, $m_1^4 = (m_3^2 b)^2 F_1 H_1$, $m_2^4 = (m_3^2 b)^2 F_2 H_2$, *где* $F_1(x^1,x^3)$, $F_2(x^2,x^3)$, $H_1(x^2,x^3)$, $H_2(x^1,x^3)$ *произвольны.*

При этом во всех случаях g_{33}, m_i $(i = 1,2,3)$ *— произвольные функции трех переменных*; F_1, F_2, α, H_1, H_2, b, v *— функции двух переменных*; ψ, q, q_1, q_2, q_3 *— функции одной переменной*; k, k_1, k_2 *— отличные от нуля постоянные*; d, d_1, d_2 *— произвольные постоянные.*

Литература

1. Шапиро Я.Л. *О некоторых полях геодезических конусов* // ДАН СССР. – 1943. – Т. 39. – № 1. – С. 6–10.
2. Германов О.С. *Поля конусов 2-го порядка и порождаемые ими связности* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 6. – С. 52–54.
3. Германов О.С. *Псевдолиувиллевы поверхности* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 3–11.

4. Германов О.С. *Поля конусов 2-го порядка и порождаемые ими связности.* III. *Первые интегралы геодезических* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 8. – С. 25–32.
5. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
6. Шапиро Я.Л. *Об одном классе римановых пространств* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – М., 1963. – Вып. 12. – С. 203–212.
7. Курош А.Г. *Курс высшей алгебры.* – 9-е изд. – М.: Наука, 1968. – 432 с.
8. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
9. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – 4-е изд. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

Нижегородский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 05.02.2002
окончательный вариант 08.01.2003