И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 6 (493)

УДК 514.763:514.765

Д.В. ВЫЛЕГЖАНИН

ОБОБЩЕННАЯ ЭРМИТОВА ГЕОМЕТРИЯ НА МНОГООБРАЗИИ С f-СТРУКТУРАМИ

1. Введение

Понятия обобщенной эрмитовой геометрии и обобщенной почти эрмитовой структуры (или GAH-структуры) ранга r появляются впервые в начале 80-х гг. в работах В.Ф. Кириченко ([1], [2]). Новая конструкция позволила построить естественные обобщения таких хорошо известных ранее структур, как почти эрмитова структура, структура почти произведения, f-структура и некоторые другие. Такой подход позволяет свести изучение многообразия со структурами к исследованию свойств алгебраического объекта, ассоциированного с соответствующей обобщенной почти эрмитовой структурой. В.Ф. Кириченко назвал этот объект присоединенной Q-алгеброй.

Несмотря на то, что обобщенная почти эрмитова структура определяется для произвольного ранга r, практически все работы по обобщенной эрмитовой геометрии связаны с изучением структур ранга 1. Что касается структур более высокого ранга, то даже их примеры до последнего времени были немногочисленны и носили довольно искусственный характер [1].

В данной статье рассматриваются многообразия, на которых заданы две перестановочные метрические f-структуры, что отражается на специфике их свойств. Именно изучение этих свойств и позволило описать способы задания на таких многообразиях обобщенных почти эрмитовых структур ранга большего 1. В качестве богатого источника примеров многообразий с перестановочными f-структурами могут служить однородные Ф-пространства конечного порядка.

2. Основные факты

Пусть M — связное гладкое многообразие, $C^\infty(M)$ — кольцо гладких функций на M, $\mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли векторных полей на M со скобкой Ли $[\cdot,\cdot]$. Если на M задана (псевдо)риманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то соответствующую ей риманову связность будем обозначать символом ∇. Все многообразия, тензорные поля и тому подобные объекты будем предполагать гладкими класса C^∞.

Определение 1 ([2]). *Обобщенной почти эрмитовой структурой* (GAH*-структурой*) *ранга* r на гладком многообразии M называется совокупность $\{g, J_1, \dots, J_r, T\}$ тензорных полей на M, где $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — псевдориманова метрика на M, $J_1, \dots, J_r$ — линейно независимые в каждой точке многообразия тензоры типа $(1,1)$, называемые структурными аффинорами или структурными операторами. Они определены в каждой точке многообразия с точностью до ненулевого числового множителя и представляют вместе со своими квадратами и тождественным аффинором образующие некоторой подалгебры алгебры всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия, T — тензор типа $(2,1)$, называемый *композиционным тензором.* При этом должны выполняться условия:

1. $\langle J_iX, Y\rangle + \langle X, J_iY\rangle = 0$;
2. $T(J_iX, Y) = T(X, J_iY) = -J_iT(X, Y)$;
3. $T_Xg = 0$;

4. $\bigcap_{i=1}^{r} \ker J_i \subset \ker T \subset \bigcap_{i=1}^{r} \ker(J_i^5 - \lambda_i J_i)$;
5. $J_i J_j = J_j J_i$.

Здесь $i, j = 1, \dots, r$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $0 < \lambda \in C^\infty(M)$; $T_X Y = T(X, Y)$; оператор T_X отождествляется с порожденным им дифференцированием тензорной алгебры многообразия. Многообразие, наделенное GAH-структурой, называется *обобщенным почти эрмитовым многообразием* (*GAH-многообразием). Символом GAH обозначается класс всех GAH-структур на M.*

В названии GAH-многообразия указывается соответствующее свойство его *присоединенной Q-алгебры* [2]: GAH-многообразие, присоединенная Q-алгебра которого является K-алгеброй (A-алгеброй, абелевой Q-алгеброй), называется соответственно *обобщенным G_1-многообразием* (*обобщенным G_2-многообразием, обобщенным эрмитовым многообразием*), и соответствующие GAH-структуры обозначаются соответственно следующим образом: GG_1, GG_2, GH [2].

Определение 2 ([2]). Q-алгебра V называется *абелевой*, если $V * V = 0$. *K-алгеброй* называется антикоммутативная Q-алгебра: $X * Y = -Y * X$. *A-алгеброй* называется Q-алгебра V такая, что

$$\langle X * Y, Z \rangle + \langle Y * Z, X \rangle + \langle Z * X, Y \rangle = 0. \tag{1}$$

Основным примером обобщенной почти эрмитовой структуры ранга 1 является f-структура. Понятие f-структуры было введено в 1963 г. в [3].

Определение 3 ([4]). *f-структурой* на гладком многообразии M называется поле тензора f типа $(1, 1)$ на M такое, что $f^3 + f = 0$. Многообразие, снабженное f-структурой, называется f-многообразием.

Рассмотрим на многообразии M с f-структурой операторы $l = -f^2$, $m = f^2 + \mathrm{id}$ [4]. Непосредственно проверяется, что $l^2 = l$, $m^2 = m$, $l + m = \mathrm{id}$, т. е. l и m — взаимно дополнительные проекторы. Легко также убедиться, что образ оператора m совпадает с $\ker f$, т. е. m — проектор на ядро оператора структуры. Кроме того, $f \circ l = l \circ f$, ввиду чего можно рассматривать ограничение $\widetilde{f}$ оператора f на образ L оператора l. Очевидно $f^2 l = -l$, и поэтому $\widetilde{f}^2 = -\mathrm{id}$. Таким образом, $\mathfrak{X}(M) = L \oplus N$, где $N = \ker f$, $f|_L = \widetilde{f}$ — антиинволютивный оператор.

f-многообразие M называют *метрическим* [2], если на нем задана риманова метрика $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ такая, что $\langle fX, Y \rangle = -\langle X, fY \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. При этом f-структура на M также называется метрической. Из этого определения непосредственно следует, что $\langle \widetilde{f}X, \widetilde{f}Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in L$, а также взаимная ортогональность распределений L и N в метрике g.

3. Многообразие с двумя перестановочными f-структурами

Пусть на произвольном многообразии M заданы две перестановочные f-структуры f_1 и f_2.

Введем следующие тензорные поля типа $(1, 1)$: $I = \frac{1}{2} f_1 (f_1 f_2 + f_1^2 f_2^2)$; $J = -\frac{1}{2} f_1 (f_1 f_2 - f_1^2 f_2^2)$; $F_1 = f_1 - I - J$; $F_2 = f_2 + I - J$. Тогда аффиноры f_1 и f_2 могут быть представлены в виде $f_1 = F_1 + I + J$, $f_2 = F_2 - I + J$. Все построенные структуры I, J, F_1, F_2 являются f-структурами, и любые попарные произведения структур I, J, F_1, F_2 равны нулю.

Относительно произвольной f-структуры модуль $\mathfrak{X}(M)$ разлагается в прямую сумму двух подпространств L и N таких, что для $\widetilde{f} = f|_L$ верно $\widetilde{f}^2 = -\mathrm{id}$, $f|_N = 0$. Пусть $\mathfrak{X}(M) = L_{f_1} \oplus N_{f_1} = L_{f_2} \oplus N_{f_2}$ — разложения модуля $\mathfrak{X}(M)$, соответствующие структурам f_1 и f_2. Через N_0 обозначим подпространство, являющееся пересечением ядер структур f_1 и f_2.

Пусть структуры f_1 и f_2 являются метрическими относительно $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда прямыми вычислениями можно установить, что структуры I, J, F_1, F_2 также являются метрическими f-структурами. Кроме того, в наборе L_I, L_J, L_{F_1}, L_{F_2}, N_0 любые два подпространства ортогональны друг другу в выбранной метрике.

Взаимосвязь же всех структур f_1, f_2, I, J, F_1, F_2 будет описываться набором равенств

$$
\begin{gathered}
f_1 f_2 = J^2 - I^2, \\
IJ = IF_1 = IF_2 = JF_1 = JF_2 = F_1F_2 = 0, \\
f_1 J = J^2, f_1 I = I^2, \quad f_2 J = J^2, \quad f_2 I = -I^2, \\
f_1 F_1 = F_1^2, \quad f_1 F_2 = 0, \quad f_2 F_1 = 0, \quad f_2 F_2 = F_2^2.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Используя описанные разложения для структур f_1 и f_2, получим следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть на римановом многообразии (M, g) заданы две перестановочные метрические f-структуры f_1 и f_2. Тогда модуль векторных полей многообразия M может быть представлен в виде $\mathfrak{X}(M) = L_I \oplus L_J \oplus L_{F_1} \oplus L_{F_2} \oplus N_0$.*

Доказательство. Отметим, что структуры F_1 и F_2 могут быть представлены как

$$F_1 = f_1 + f_1 f_2^2, \quad F_2 = f_2 + f_1^2 f_2.$$

Зафиксируем произвольное векторное поле X и перепишем его в виде $X = X_1^1 + X_1^0$, где $X_1^1 \in L_{f_1}$ (т. е. $f_1^2 X_1^1 = -X_1^1$), $X_1^0 \in N_{f_1}$ (т. е. $f_1 X_1^0 = 0$, $X_1^0 = f_1^2 X_1^0 + X_1^0$).

Далее спроектируем компоненты указанного разложения на подпространства, порождаемые структурой f_2. Тогда X_1^1 может быть представлено в виде $X_1^1 = X_{12}^{11} + X_{12}^{10}$. Здесь $X_{12}^{11} = -f_2^2 X_1^1$, $X_{12}^{10} = f_2^2 X_1^1 + X_1^1$. В результате получим $X_{12}^{11} = f_2^2 f_1^2 X = (\frac{1}{2}(f_1 f_2 + f_1^2 f_2^2) - \frac{1}{2}(f_1 f_2 - f_1^2 f_2^2))X = -I^2 X_1^1 - J^2 X_1^1 = X_I + X_J$, где $X_I \in L_I$, $X_J \in L_J$. Теперь то же самое проделаем для X_{12}^{10}: $X_{12}^{10} = -f_2^2 f_1^2 X - f_1^2 X = -F_1^2 X = X_{F_1}$, где $X_{F_1} \in L_{F_1}$; т. е. на данном этапе имеем $X = X_I + X_J + X_{F_1} + X_1^0$.

Далее рассмотрим X_1^0. Аналогично получаем $X_1^0 = X_{12}^{01} + X_{12}^{00}$, где $X_{12}^{01} \in L_{f_2}$ (т. е. $X_{12}^{01} = -f_2^2 X_1^0$), $X_{12}^{00} \in N_{f_2}$ (т. е. $X_{12}^{00} = f_1^2 X_1^0 + X_1^0$); $X_{12}^{01} = -f_2^2 f_1^2 X - f_2^2 X = -F_2^2 X = X_{F_2}$, где $X_{F_2} \in L_{F_2}$.

Перейдем теперь ко второму слагаемому. По построению $X_{12}^{00} \in N_{f_2}$, но $X_{12}^{00} = f_2^2(f_1^2 X + X) + f_1^2 X + X = f_1^2(f_2^2 X + X) + (f_2^2 X + X) \in N_{f_1}$, т. е. $X_{12}^{00} \in N_{f_1} \cap N_{f_2} = N_0$.

Подводя итог рассуждениям, получаем, что произвольное векторное поле X может быть представлено в виде $X = X_I + X_J + X_{F_1} + X_{F_2} + X_0$, где $X_I \in L_I$, $X_J \in L_J$, $X_{F_1} \in L_{F_1}$, $X_{F_2} \in L_{F_2}$, $X_0 \in N_{f_1} \cap N_{f_2}$. Очевидно, такое представление единственно.

Теперь покажем, что все подпространства попарно пересекаются только по нулевому векторному полю.

Для структур I, J, F_1, F_2 верны следующие соотношения: $IJ = IF_1 = IF_2 = JF_1 = JF_2 = F_1 F_2 = 0$. С учетом приведенных равенств и того, что подпространства L_I, L_J, L_{F_1}, L_{F_2} суть образы этих структур, вывод об их тривиальном пересечении становится очевидным. Возможность пересечения с подпространством N_0 также только по нулевому вектору следует из того, что N_0 является подпространством ядер структур I, J, F_1, F_2. $\square$

Из рассуждений, приведенных в ходе доказательства теоремы, следуют

Теорема 2. $L_{f_i} = L_I \oplus L_J \oplus L_{F_i}$, *где* $i \in \{1, 2\}$.

Теорема 3. $L_{f_1} \cap L_{f_2} = L_I \oplus L_J$.

Размерность пересечения образов f-структур f_1 и f_2 есть сумма размерностей образов f-структур I и J. Так как ранг f-структур постоянен на всем многообразии [5], то из указанного представления следует, что размерность пересечения будет постоянной.

Теорема 4. *Для перестановочных f-структур f_1 и f_2 на многообразии M верны утверждения:*

1. $X \in L_I \Leftrightarrow X \in L_{f_1}$, $X \in L_{f_2}$, $f_1 X = -f_2 X$;
2. $X \in L_J \Leftrightarrow X \in L_{f_1}$, $X \in L_{f_2}$, $f_1 X = f_2 X$;
3. $X \in L_{F_1} \Leftrightarrow X \in L_{f_1}$, $f_2 X = 0$;
4. $X \in L_{F_2} \Leftrightarrow X \in L_{f_2}$, $f_1 X = 0$.

Доказательство. 1. Если $X \in L_I$, то $-I^2X = X$. Тогда $-f_1^2X = -f_1^2(-I^2X) = -I^2X = X$, т. е. $X \in L_{f_1}$. Аналогично получим $X \in L_{f_2}$. Имеем

$$\begin{cases} f_1X = f_1(-I^2X) = IX, \\ f_2X = f_2(-I^2X) = -IX \end{cases} \Rightarrow f_1X = -f_2X.$$

Обратно, если $X \in L_{f_1}$ и $X \in L_{f_2}$, то $-f_1^2X = X = -f_2^2X$. Из того, что $f_1X = -f_2X$, следует $-I^2X = \frac{1}{2}(f_1f_2 + f_1^2f_2^2)X = \frac{1}{2}(f_1f_2X + f_1^2f_2^2X) = \frac{1}{2}(-f_1^2X + f_1^4X) = -f_1^2X = X$. Значит, $X \in L_I$.

2. Рассуждения аналогичны п. 1.

3. Пусть $X \in L_{F_1}$, тогда $-F_1^2X = -f_1^2X - f_1^2f_2^2X = X$ и $f_2X = -f_1^2f_2X + f_1^2f_2X = 0$. Значит, в силу предыдущего равенства получаем $-f_1^2X = X$. Отсюда $X \in L_{f_1}$ и $f_2X = 0$.

Обратно, пусть $X \in L_{f_1}$, т. е. $-f_1^2X = X$. Аналогично, $f_2X = 0 \Rightarrow IX = 0$, $JX = 0$, $F_2X = 0$, $F_1X = f_1X$. Тогда $-F_1^2X = -f_1^2X - f_1^2f_2^2X = -f_1^2X = X$. Значит, $X \in L_{F_1}$.

4. Рассуждения аналогичны п. 3. □

Теорема 5. *Если на многообразии заданы две перестановочные f-структуры, то в касательном пространстве в каждой точке многообразия существует базис над $\mathbb{C}$, в котором матрицы этих структур диагональны.*

Доказательство. Из теоремы 1 $\mathfrak{X}(M) = L_I \oplus L_J \oplus L_{F_1} \oplus L_{F_2} \oplus N_0$. Поэтому в любой точке многообразия $m \in M$ касательное пространство разлагается в сумму подпространств

$$T_m(M) = (L_I)_m \oplus (L_J)_m \oplus (L_{F_1})_m \oplus (L_{F_2})_m \oplus (N_0)_m.$$

Зафиксируем точку $m \in M$. Будем рассматривать действие f_1 на $(L_I)_m$, т. е. ограничение $f_1|_{(L_I)_m}$. Оператор f_1 может быть приведен к своей жордановой нормальной форме. Следовательно, матрица структуры примет диагональный вид. С другой стороны, $f_1|_{(L_I)_m} = -f_2|_{(L_I)_m}$, т. е. матрица $f_2|_{(L_I)_m}$ отличается от матрицы $f_1|_{(L_I)_m}$ только знаком и также имеет диагональный вид.

Теперь рассмотрим ограничение структуры f_1 на подпространство $(L_J)_m$. Из предыдущих теорем $f_1|_{(L_J)_m} = J$. Из линейной алгебры известно, что в пространстве $(L_J)_m$ можно выбрать базис, в котором структура f_1 будет иметь диагональный вид. Но $f_1|_{L_J} = f_2|_{L_J}$, значит, ограничение f_2 на это подпространство также будет иметь диагональный вид.

Далее рассматриваем подпространство $(L_{F_1})_m$. Структура f_1, ограниченная на $(L_{F_1})_m$, приводится к жордановой нормальной форме, следовательно, матрица структуры имеет диагональный вид. Что касается структуры f_2, то $f_2|_{(L_{F_1})_m} = 0$.

Аналогично $f_1|_{(L_{F_2})_m} = 0$, а матрица ограничения f_2 на $(L_{F_2})_m$ также имеет диагональный вид.

На подпространстве N_0 обе структуры обращаются в нуль.

Таким образом, в каждом из подпространств можно выбрать базис, в котором матрицы структур f_1 и f_2, ограниченных на это подпространство, принимают диагональный вид. Значит, можно задать базис всего пространства $T_m(M)$ так, что в нем матрицы структур f_1 и f_2 диагональны. □

4. Обобщенные почти эрмитовы структуры на многообразиях с перестановочными f–структурами

Вначале рассмотрим многообразия, на которых заданы r метрических f-структур таких, что все их попарные произведения равны нулю.

Для таких структур справедлива

Теорема 6 ([6]). *Пусть $f_1, \ldots, f_r$ — линейно независимые в каждой точке риманова многообразия (M, g) метрические f-структуры, удовлетворяющие условию $f_if_j = 0$, $i, j = \overline{1, r}$,*

N_i — *соответствующий* f_i *тензор Нейенхейса. Тогда на многообразии* M *существует тензор* T *типа* $(2,1)$ *такой, что совокупность* $\{g, f_1, \ldots, f_r, T\}$ *образует обобщенную почти эрмитову структуру ранга* r. *Тензор* T *имеет вид* $T(X,Y) = \sum\limits_{i=1}^{r} T_i(X,Y)$, *где* $T_i(X,Y) = B_i(X,Y) - B_i^*(X,Y) - B_i^*(Y,X)$, $B_i(X,Y) = -f_i^2\, N(f_i^2 X, f_i^2 Y)$, B_i^* — *тензор, сопряженный тензору* B_i.

Имеются следующие взаимосвязи между свойствами обобщенной почти эрмитовой структуры, описанной в теореме 6, и свойствами структур ранга 1.

Теорема 7 ([6]). *Обобщенная почти эрмитова структура* $\{g, J_1, \ldots, J_r, T\}$ *из теоремы* 6 *является* GH*-структурой (соответственно,* GG_1*-структурой, соответственно,* GG_2*-структурой) тогда и только тогда, когда каждая обобщенная почти эрмитова структура* $\{g, J_i, T_i\}$, $i = \overline{1,n}$, *является* GH*-структурой (соответственно,* GG_1*-структурой, соответственно,* GG_2*-структурой).*

Перестановочные f-структуры не исчерпываются структурами с нулевым произведением. Рассмотрим многообразие с произвольными перестановочными f-структурами f_1 и f_2. Выше отмечалось, что структуры f_1 и f_2 могут быть представлены в виде $f_1 = F_1 + I + J$, $f_2 = F_2 - I + J$.

Введем в рассмотрение тензоры B_I, B_J, B_{F_1}, B_{F_2}, где $B_i(X,Y) = -i^2 N_i(i^2 X, i^2 Y)$, $i \in \{I, J, F_1, F_2\}$. Ранее была установлена взаимосвязь тензоров f_1, f_2, I, J, F_1 и F_2 (см. (2)). Используя эти равенства, можно получить следующие соотношения: $B_j(f_i X, Y) = B_j(X, f_i Y) = -f_i B_j(X,Y)$, где $i \in \{1,2\}$, $j \in \{I, J, F_i\}$; $B_{F_i}(f_j X, Y) = B_{F_i}(X, f_j Y) = f_j B_{F_i}(X,Y) = 0$, где $i \neq j$, $i,j \in \{1,2\}$. Кроме того, $B_i(jX,Y) = B_i(X,jY) = jB_i(X,Y) = 0$, где $i \neq j$, $i,j \in \{I, J, F_1, F_2\}$.

Отметим, что $B_i(iX,Y) = B_i(X,iY) = -iB_i(X,Y)$, где $i \in \{I, J, F_1, F_2\}$ ([2]).

Теперь построим тензор T, который будет удовлетворять всем требованиям для композиционного тензора f-структур f_1, f_2, I, J из определения обобщенной почти эрмитовой структуры. Положим $T(X,Y) = \sum\limits_{i \in \{I,J,F_1,F_2\}} T_i(X,Y)$, где $T_i(X,Y) = B_i(X,Y) - B_i^*(X,Y) - B_i^*(Y,X)$ и $\langle B_i(X,Y), Z\rangle = \langle X, B_i^*(Y,Z)\rangle$, $i \in \{I, J, F_1, F_2\}$.

Непосредственной проверкой можно установить, что для тензора T выполняются условия:

1. $T(iX,Y) = T(X,iY) = -iT(X,Y)$, $i \in \{f_1, f_2, I, J\}$;
2. $\langle T(X,Y), Z\rangle + \langle Y, T(X,Z)\rangle = 0$.

Используя результаты В.Ф. Кириченко [2] для случая структуры ранга 1, запишем полученный тензор T в явном виде $T(X,Y) = \sum\limits_{i \in \{I,J,F_1,F_2\}} \frac{1}{2}\{i\nabla_{iX}(i)(iY) - i\nabla_{i^2 X}(i)(i^2 Y)\}$.

В определении обобщенной почти эрмитовой структуры требуется, чтобы структурные аффиноры вместе со своими квадратами и тождественным аффинором являлись образующими некоторой подалгебры в алгебре всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия M. Из (2) непосредственно следует, что структуры f_1, f_2, I и J связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &= J^2 - I^2, & IJ &= 0, \\ f_1 J &= J^2, & f_1 I &= I^2, \\ f_2 J &= J^2, & f_2 I &= -I^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Значит, любой элемент подалгебры представляется посредством id, f_1, f_2, I, J, f_1^2, f_2^2, I^2, J^2.

Следует отметить, что если структуры f_1 и f_2 ненулевые и не равны между собой, то среди структур I, J, F_1, F_2 есть по крайней мере две отличные от нуля.

Рассмотрим теперь вопрос о линейной зависимости структурных аффиноров. В некоторых случаях, например, когда $Jm(f_1) \subseteq Jm(f_2)$ (т.е. $F_1 = 0$) или $Jm(f_2) \subseteq Jm(f_1)$ ($F_2 = 0$), получаем $f_1 = I + J$ или $f_2 = -I + J$ соответственно. Тогда в целях сохранения линейной независимости структурных аффиноров обобщенной почти эрмитовой структуры ограничимся рассмотрением структур $\{f_1, f_2, I\}$. В уравнениях (3) заменяем J на $(f_1 - I)$ или $(f_2 + I)$ соответственно. Тогда в первом случае имеем $f_1f_2 = f_1^2 - 2I^2$, $f_1I = I^2, f_2I = -I^2$. Для второго случая равенства примут вид $f_1f_2 = f_2^2 - 2I^2$, $f_1I = I^2, f_2I = -I^2$.

Разберем все возможные ситуации.

Если все структуры I, J, F_1, F_2 ненулевые, то структуры f_1, f_2, I, J будут линейно независимы.

В случае если обе I, J отличны от нуля, а среди структур F_1 и F_2 есть одна нулевая, то линейно независимыми будут структуры f_1, f_2 и любая из структур I или J.

Когда одна из структур I или J равна нулю, а F_1 и F_2 ненулевые, тогда рассматриваем структуры f_1, f_2 и отличную от нуля структуру I или J.

Если одна из структур I или J равна нулю (например, $I = 0$) и одна из структур F_1 и F_2 также нулевая (например, $F_1 = 0$, т. е. $f_1 = J$), то ограничиваемся рассмотрением только двух структур f_1 и f_2.

Когда обе структуры F_1 и F_2 равны нулю, а обе структуры I и J отличны от нуля, линейно независимыми будут только две структуры: любая из структур f_1 или f_2 в паре с любой из структур I или J.

В случае $I = J = 0$ имеем $f_1 = F_1$, $f_2 = F_2$, т. е. $f_1f_2 = 0$. Тогда рассматриваем f_1 и f_2.

В определении GAH-структуры требуется выполнение условия о вложимости ядер. Ниже покажем, что это условие гарантированно выполняется. Сразу отметим, что для любой f-структуры справедливо равенство $f^5 - f = 0$, т. е. ядро структуры $f^5 - f$ совпадает со всем пространством $\mathfrak{X}(M)$. Следовательно, в упомянутом выше условии на ядра достаточно рассмотреть справедливость только первого вложения.

В случае, когда F_1 и F_2 равны нулю, получаем $\ker f_i \cap \ker I = \ker f_i \cap \ker J = \ker f_i$. Далее очевидно следует $\ker f_i \subset \ker T$.

Для других случаев $N_{f_1} \cap N_{f_2} \subset N_I \cap N_J$. Значит, независимо от того, какого ранга структура рассматривается, достаточно доказать, что $N_{f_1} \cap N_{f_2} \subset \ker T$. Последнее очевидно: если $f_1X = f_2X = 0$ для любых векторных полей X и Y, то $IX = 0$, $JX = 0$, $F_1X = 0$, $F_2X = 0$. Значит, $B(X,Y) = 0 \Rightarrow T(X,Y) = 0$.

Итог вышеизложенным рассуждениям подводит

Теорема 8. *Если на римановом многообразии (M, g) имеются две перестановочные метрические f-структуры f_1 и f_2, то на этом многообразии может быть задана обобщенная почти эрмитова структура, ранг которой будет определяться из следующих условий:*

— *если все структуры I, J, F_1, F_2 отличны от нуля, то совокупность $\{g, f_1, f_2, I, J, T\}$ является обобщенной почти эрмитовой структурой ранга 4, где T — композиционный тензор;*

— *если I, J отличны от нуля, а среди структур F_1 и F_2 есть одна нулевая, то линейно независимыми будут структуры f_1, f_2 и любая из структур I, J, а на (M, g) возникает обобщенная почти эрмитова структура ранга 3;*

— *когда одна из структур I или J равна нулю (например, $I = 0$), но F_1 и F_2 ненулевые, то существует обобщенная почти эрмитова структура $\{g, f_1, f_2, J, T\}$ ранга 3;*

— *если одна из структур I или J равна нулю и одна из структур F_1 и F_2 также нулевая, то обобщенная почти эрмитова структура $\{g, f_1, f_2, T\}$ имеет ранг 2;*

— *когда обе структуры F_1 и F_2 нулевые, а обе структуры I, J отличны от нуля, на (M, g) возникает обобщенная почти эрмитова структура ранга 2 на основе структур f_1 или f_2 и любой из структур I и J;*

— *если $I = J = 0$, то $f_1 = F_1$, $f_2 = F_2$, т. е. $f_1f_2 = 0$, и существует обобщенная почти эрмитова структура $\{g, f_1, f_2, T\}$ ранга 2.*

5. Обобщенные почти эрмитовы структуры на однородном Φ-пространстве

В этом параграфе полученные результаты применяются к структурам на однородных многообразиях.

Пусть G/H — регулярное Ф-пространство, определяемое автоморфизмом Φ связной группы Ли G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, соответствующее автоморфизму $\varphi = d\Phi_e$, т. е. $\mathfrak{m} = A_\varphi \mathfrak{g}$, где $A_\varphi = \varphi - \mathrm{id}$ [7], [8]. Обозначим через θ сужение φ на $\mathfrak{m}$. Инвариантная аффинорная структура F на G/H называется *канонической* [8], если она в точке $o = \{H\}$ является полиномом от θ: $F = F(\theta)$. Все однородные Ф-пространства порядка n ($\Phi^n = \mathrm{id}$) регулярны [7], и для таких пространств в [8] получены формулы для всех канонических структур типов f и J.

Рассмотрим канонические f-структуры, заданные на однородном Ф-пространстве конечного порядка n. Пусть спектр оператора θ состоит из s пар сопряженных корней степени n из 1, где $s \leq [\frac{n}{2}]$. Тогда число элементов спектра оператора θ равно $2s$, если (-1) не входит в спектр, или $2s-1$, если корень (-1) принадлежит спектру (последнее возможно в случае $n = 2k$). Таким образом, матрица оператора θ может быть приведена над $\mathbb{C}$ соответственно к виду

$$[\theta] = \mathrm{diag}\{\varepsilon E_1, \varepsilon^2 E_2, \ldots, \varepsilon^{k-1} E_{k-1}, \varepsilon^k E_k, \ldots, \varepsilon^{n-1} E_{n-1}\}$$

или

$$[\theta] = \mathrm{diag}\{\varepsilon E_1, \varepsilon^2 E_2, \ldots, \varepsilon^{k-1} E_{k-1}, -E_k, \varepsilon^{k+1} E_{k+1}, \ldots, \varepsilon^{n-1} E_{n-1}\},$$

где ε — примитивный корень степени n из 1, причем порядки единичных матриц E_i и E_{n-i}, $i = 1, \ldots, n-1$, одинаковы и одновременно равны нулю, если ε^i не принадлежит спектру оператора θ [8]. Очевидно, что число элементов спектра будет совпадать с количеством единичных матриц ненулевого порядка в данном представлении θ. В таких обозначениях матрицу канонической f–структуры можно привести соответственно к виду

$$[f_0] = \mathrm{diag}\{\eta_1 E_1, \ldots, \eta_{k-1} E_{k-1}, \eta_k E_k, \ldots, \eta_{n-1} E_{n-1}\}$$

или

$$[f_0] = \mathrm{diag}\{\eta_1 E_1, \ldots, \eta_{k-1} E_{k-1}, 0E_k, \eta_{k+1} E_{k+1}, \ldots, \eta_{n-1} E_{n-1}\},$$

где η_j принимают значения из множества $\{-i, 0, i\}$, $\eta_j = -\eta_{n-j}$ [8], и не все $\eta_j = 0$.

Выделим из множества всех канонических f-структур набор

$$[(f_0)_j] = \mathrm{diag}\{0, \ldots, 0, iE_j, 0, \ldots, 0, -iE_{n-j}, 0, \ldots, 0\},$$

т. е. для каждого j полагаем $\eta_j = -\eta_{n-j} = i$, а все остальные $\eta_l = \eta_{n-l} = 0$, $l = 1, \ldots, a$, $l \neq j$. Количество таких структур будет $s-1$, если (-1) принадлежит спектру оператора θ, и s, если не принадлежит.

Легко заметить, что произведение любых двух структур $(f_0)_i$, $i = \overline{1,n}$, будет равно нулю. Более того, в [9] доказана согласованность всех классических структур со стандартной метрикой (порождаемой формой Киллинга). Значит, возникающие структуры будут удовлетворять условиям теоремы 6.

Теорема 9. *Пусть G/H — однородное Ф-пространство порядка n, причем спектр оператора θ состоит из s пар корней степени n из 1 [8]. Предположим, что G — полупростая группа Ли, g — инвариантная псевдориманова метрика на G/H, индуцированная формой Киллинга. Тогда на G/H может быть задана обобщенная почти эрмитова структура $\{g, f_1, \ldots, f_r, T\}$ ранга $r = s-1$, если (-1) принадлежит спектру оператора θ, и ранга $r = s$ в противном случае, где $T = \sum\limits_{i=1}^{r} T_i$. Здесь T_i обозначает композиционный тензор для структуры f_i [2], а $f_i f_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,r}$.*

Очевидно, к таким структурам применима теорема 7. В частности, на Ф-пространстве порядка 5 существуют, вообще говоря, две обобщенные почти эрмитовы структуры ранга 1, построенные на канонических f-структурах f_1, f_2 [8], которые связаны условием $f_1 f_2 = 0$. Известно, что каждая из этих структур является обобщенной эрмитовой структурой ранга 1 [10]. Тогда, применяя теоремы 9 и 7, приходим к следующему результату.

Теорема 10. *Пусть f_1 и f_2 — канонические f-структуры на естественно редуктивном однородном Φ–пространстве $(G/H, g)$ порядка 5 полупростой группы Ли G, причем спектр оператора θ максимален* [8]. *Тогда $(G/H, g, f_1, f_2, T)$ является обобщенным эрмитовым многообразием ранга 2.*

Любые две канонические f-структуры перестановочны. В то же время все такие структуры согласованы со стандартной метрикой [9]. Наличие этих двух свойств позволяет реализовать на Ф-пространствах конечного порядка случай, описанный в теореме 8.

Если структуры f_1 и f_2 канонические, то из способа задания структур I, J, F_1, F_2 очевидно следует, что они также будут являться каноническими f-структурами. Учитывая количество возникающих канонических f-структур [8], можно заключить, что примеры указанного типа обобщенных почти эрмитовых структур рангов 2, 3 и 4 могут быть построены на Ф-пространствах, порядок которых не меньше 5, 7 и 9 соответственно.

Приведем пример обобщенного почти эрмитова пространства ранга 4. Рассмотрим однородное пространство $SU(9)/T$, где T — максимальный тор. Пусть g — инвариантная риманова метрика на $SU(9)/T$, индуцированная формой Киллинга. Можно построить аналитический автоморфизм группы $SU(9)/T$: $\Phi(x) = sxs^{-1}$, где $s = \mathrm{diag}\{\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6, \varepsilon^7, \varepsilon^8, 1\}$. Нетрудно видеть, что $\Phi^9 = \mathrm{id}$. Пространство $SU(9)/T$ обладает структурой однородного Ф-пространства порядка 9. После вычислений получаем, что на этом пространстве существуют четыре канонические f-структуры f_1, f_2, f_3, f_4 такие, что их попарные произведения равны нулю, или, другими словами, спектр оператора θ состоит из четырех пар сопряженных корней. Как следует из теоремы 9, относительно совокупности этих структур $SU(9)/T$ может быть рассмотрено как обобщенное почти эрмитово многообразие ранга 4. Более того, непосредственными вычислениями можно установить некоторые свойства такой структуры.

Теорема 11. *Однородное Φ-пространство $SU(9)/T$ порядка 9 с метрикой g, индуцированной формой Киллинга, является обобщенным почти эрмитовым многообразием ранга 4. При этом GAH-структура $\{g, f_1, f_2, f_3, f_4, T\}$ является GG_1-структурой и не является GH-структурой.*

Отметим, что на этом же Ф-пространстве в классе канонических f-структур могут быть реализованы все ситуации, описанные в теореме 8.

Автор благодарен своему научному руководителю доценту В.В. Балащенко за полезные советы и замечания при написании работы.

Литература

1. Кириченко В.Ф. *Касательное расслоение с точки зрения обобщенной эрмитовой геометрии* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 7. – С. 50–59.
2. Кириченко В.Ф. *Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур* // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1986. – Т. 18. – С. 25–71.
3. Yano K. *On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3 + f = 0$* // Tensor. – 1963. – V. 14. – P. 99–109.
4. Яно К., Кон М. *CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях.* – М.: Наука, 1990. – 192 с.
5. Stong R.E. *The rank of an f-structure* // Kodai Math. Sem. Rep. – 1977. – V. 29. – P. 207–209.
6. Вылегжанин Д.В. *Естественная конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры* // Вестн. Витебск. ун-та. – 2001. – № 2. – С. 114–119.

7. Степанов Н.А. *Основные факты теории φ-пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.
8. Балащенко В.В., Степанов Н.А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ-пространствах* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 3–34.
9. Balashchenko V.V. *Riemannian geometry of canonical structures on regular Φ-spaces* // Fakultät für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum. – Preprint. – 1994. – № 174. – 19 p.
10. Балащенко В.В. *Однородные эрмитовы f-многообразия* // УМН. – 2001. – Т. 56. – С. 159–160.

Белорусский государственный университет

Поступила 09.04.2002