ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 8 (459)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968 : 519.6

Е.Ф. АЮПОВА (МИФТАХОВА)

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ДВУМЕРНОГО СЛАБО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Работа посвящена точным и приближенным методам решения двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения (с.с.и.у.) первого рода с логарифмическими ядрами вида

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\ln\left|\sin\frac{t-\tau}{2}\right|x(\sigma,\tau)d\sigma\,d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s-\sigma,t-\tau)x(\sigma,\tau)d\sigma\,d\tau = y(s,t); \quad (1)$$

здесь $h(s,t)$, $y(s,t)$ — известные непрерывные 2π-периодические функции по каждой из переменных, $x(\sigma,\tau)$ — искомая функция, а сингулярный интеграл понимается как несобственный.

Как и в одномерном случае [1]–[3], задача решения уравнения (1) является некорректной. Однако специальная структура ядра позволяет ставить эту задачу корректно в паре функциональных пространств, которые определим следующим образом. В качестве пространства искомых элементов X будем рассматривать пространство $L_2 \equiv L_2[0,2\pi]^2$ суммируемых с квадратом 2π-периодических функций от двух переменных с обычной нормой

$$\|x\|_{L_2} = \left(\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|x(\sigma,\tau)|^2 d\sigma\,d\tau\right)^{1/2}, \quad x\in L_2,$$

а в качестве пространства правых частей — пространство $Y = W_2^{12} \equiv W_2^{12}[0,2\pi]^2$ 2π-периодических функций $y(s,t)$ от двух переменных, которые вместе со своими первыми y'_1, y'_2 и вторыми смешанными производными $y''_{12} = y''_{21}$ являются квадратично суммируемыми 2π-периодическими функциями от двух переменных. В пространстве W_2^{12} вводим норму

$$\|y\|_{W_2^{12}} = 4[\|y\|_X + \|y'_1\|_X + \|y'_2\|_X + \|y''_{12}\|_X].$$

Всюду далее будем считать, что с.с.и.у. (1) однозначно разрешимо в пространстве $X = L_2 \equiv L_2[0,2\pi]^2$ при любой правой части $y(s,t)\in Y = W_2^{12} \equiv W_2^{12}[0,2\pi]^2$.

Будем рассматривать исходное уравнение (1) в операторном виде

$$Ax \equiv Sx + Rx = y \quad (x\in X,\ \ y\in Y),$$

где

$$Sx \equiv \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\ln\left|\sin\frac{t-\tau}{2}\right|x(\sigma,\tau)d\sigma\,d\tau;$$

$$Rx \equiv \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s-\sigma,t-\tau)x(\sigma,\tau)d\sigma\,d\tau.$$

Из известных результатов, приведенных в [1], вытекают следующие леммы.

Лемма 1. *Для оператора $A: X \to X$ справедлива оценка*

$$\|A\|_{X\to X} \le (\ln 2)^2 + \|h\|_X, \quad A: L_2 \to L_2.$$

Лемма 2. *Если существуют производные $h_1'(s,t)$, $h_2'(s,t)$, а также смешанная производная $h_{12}''(s,t)$ в пространстве X, то норма оператора $A: X \to Y$ ($X = L_2$, $Y = W_2^{12}$) может быть оценена с помощью неравенства*

$$\|A\|_{X\to Y} \le \ln 2e \cdot \ln 2 + \|h\|_Y.$$

Следуя [1], [4], установим достаточные условия обратимости оператора $A: X \to Y$, а также оценим норму построенного обратного оператора.

Лемма 3. *Пусть $X = L_2$, $Y = W_2^{12}$,*

$$c_{kj}(h) \ne -\lambda_k\lambda_j \quad (k, j = 0, \pm1, \pm2, \dots), \tag{2}$$

где $\lambda_r = \{\ln 2,\ r = 0;\ \frac{1}{2|r|},\ r = \pm1, \pm2, \dots\}$. Тогда оператор $A: X \to Y$ непрерывно обратим, и обратный оператор $A^{-1}: Y \to X$ определяется по любой из формул

$$A^{-1}y(\sigma,\tau) = \sum_{|k|=0}^{\infty}\sum_{|j|=0}^{\infty} \frac{c_{kj}(y)}{c_{kj}(h) + \lambda_k\lambda_j} e^{i(k\sigma + j\tau)}, \tag{3}$$

$$A^{-1}y(\sigma,\tau) = \frac{c_{00}(y)}{c_{00}(h) + \ln^2 2} - i\sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_{k0}(y_1')}{k\left(c_{k0}(h) + \frac{\ln 2}{2|k|}\right)} e^{ik\sigma} - i\sum_{|j|=1}^{\infty} \frac{c_{0j}(y_2')}{j\left(c_{0j}(h) + \frac{\ln 2}{2|j|}\right)} e^{ij\tau} -$$
$$- \sum_{|k|=1}^{\infty}\sum_{|j|=1}^{\infty} \frac{c_{kj}(y_{12}'')}{kj\left(c_{kj}(h) + \frac{\ln 2}{4|k|\,|j|}\right)} e^{i(k\sigma + j\tau)}, \quad y(s,t) \in Y,$$

где

$$c_{kj}(\varphi) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma,\tau) e^{-i(k\sigma + j\tau)} d\sigma\, d\tau \quad (k = 0, \pm1, \dots,\ \ j = 0, \pm1, \dots), \quad \varphi \in L_2.$$

Следствие. Пусть в условиях леммы 3 существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\min_{k,j=0,\pm1,\pm2,\dots} \{|\mu_k\mu_j[c_{kj}(h) + \lambda_k\lambda_j]|^2\} = \frac{1}{16\gamma^2},$$

где λ_r ($r = 0, \pm1, \pm2, \dots$) определены выше, а

$$\mu_r = \begin{cases} 1, & r = 0; \\ ir, & r = \pm1, \pm2, \dots \end{cases}$$

Тогда для обратного оператора $A^{-1}: W_2^{12} \to L_2$ справедлива оценка

$$\|A^{-1}\| \le \gamma < \infty.$$

Далее рассматривается общий проекционный метод решения сингулярного интегрального уравнения (1).

Обозначим через H_{nm}^T множество всех тригонометрических полиномов от двух переменных порядка не выше n по первой переменной и не выше m по второй переменной, т. е. элементов вида

$$\varphi_{nm}(s,t) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m} \alpha_{kj} e^{i(ks + jt)}. \tag{4}$$

Через $X_{nm} \subset X$ и $Y_{nm} \subset Y$ будем обозначать множество H_{nm}^T, наделенное нормами пространств X и Y соответственно.

Приближенное решение исходного уравнения (1) будем искать в виде тригонометрического полинома (4), который определим как точное решение уравнения

$$A_{nm}x_{nm} \equiv P_{nm}Sx_{nm} + P_{nm}Rx_{nm} = P_{nm}y \quad (x_{nm} \in X_{nm}, \;\; P_{nm}y \in Y_{nm}, \;\; P_{nm} \in \wp_{nm}), \tag{5}$$

где $\wp_{nm} = \{P_{nm} : Y \to Y_{nm}\}$ — некоторое множество линейных проекционных операторов.

Отметим, что уравнение (5) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений порядка $(2n+1)\cdot(2m+1)$ относительно коэффициентов полинома (4).

Обоснование метода и оценку сходимости дают следующие теоремы.

Теорема 1. *Если с.с.и.у.* (1) *имеет единственное решение* $x^* \in X$ *при любой правой части* $y \in Y$*, а ядро* $h(s,t)$ *удовлетворяет условию* (2)*, то при любых натуральных* n *и* m *приближенное уравнение* (5) *также имеет единственное решение*

$$x^*_{nm}(\sigma,\tau) = \sum_{|k|=0}^{n}\sum_{|j|=0}^{m} \frac{c_{kj}(P_{nm}y)}{c_{kj}(h) + \lambda_k\lambda_j} e^{i(k\sigma + j\tau)}.$$

При этом, если $P_{nm}y \to y$ *в пространстве* Y*, то* $x^*_{nm} \to x^*$ *в* X *и погрешность приближенного решения может быть оценена неравенством*

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_X \le \gamma\|y - P_{nm}y\|_Y.$$

Следствие. Если $P_{nm} = \Phi_{nm}$ — оператор Фурье порядка не выше n по первой переменной и не выше m по второй переменной, то для погрешности приближенного решения справедливы соотношения

$$x^* - x^*_{nm} = \sum_{|k|=n+1}^{\infty}\sum_{|j|=m+1}^{\infty} \frac{c_{kj}(y''_{12})}{\mu_k\mu_j[c_{kj}(h) + \lambda_k\lambda_j]} e^{i(k\sigma + j\tau)};$$

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_X \le \frac{E_{nm}(y''_{12})_Y}{\min\limits_{\substack{|k|\ge n+1,\\ |j|\ge m+1}} \{|\mu_k\mu_j[c_{kj}(h) + \lambda_k\lambda_j]|\}},$$

где $E_{nm}(\varphi)_Y$ — наилучшее приближение функции $\varphi(\sigma,\tau)$ элементами из H^T_{nm} в пространстве Y.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 y *и* $P_{nm}y$ *таковы, что*

$$\|y - P_{nm}y\|_X = O(n^{-r-\alpha-2} + m^{-l-\beta-2}), \quad r, l \ge 0, \;\; 0 < \alpha, \beta \le 1.$$

Тогда приближенные решения $x^*_{nm}(\sigma,\tau)$ *при* $n, m \to \infty$ *независимо друг от друга сходятся к точному решению* $x^*(\sigma,\tau)$ *со скоростью*

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_X = O(n^{-r-\alpha} + m^{-l-\beta}), \quad r + \alpha > 0, \;\; l + \beta > 0.$$

Следствие. Пусть в условиях теоремы 2 $m = O(n)$, тогда приближенные решения $x^*_{nm}(\sigma,\tau)$ при $n \to \infty$ сходятся к точному решению $x^*(\sigma,\tau)$ в пространстве непрерывных 2π-периодических функций по каждой из переменных со скоростью

$$\max_{\sigma,\tau\in[0,2\pi]} |x^* - x^*_{nm}| = O(n^{1-\min\{r+\alpha;\, l+\beta\}}), \quad r + \alpha > 1, \;\; l + \beta > 1.$$

Аналогичные оценки можно получить для невязки общего проекционного метода.

Приведем следующий результат.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *общий проекционный метод решения с.с.и.у.* (1) *сходится в том смысле, что для невязки* $r_{nm} = y - Ax^*_{nm}$ *справедлива оценка*

$$\|r_{nm}\|_X = O(n^{-r-\alpha} + m^{-l-\beta}), \quad r + \alpha > 0, \;\; l + \beta > 0.$$

Некоторые замечания и дополнения

1. Вычислительная схема (1), (4), (5) включает в себя все полиномиальные проекционные методы решения уравнения (1) в зависимости от выбранного линейного проекционного оператора $P_{nm} : Y \to Y_{nm}$, в частности, методы Галеркина ($P_{nm} = \Phi_{nm}$ — оператор Фурье порядка не выше n по первой переменной и не выше m по второй переменной) и коллокации ($P_{nm} = L_{nm}$ — оператор Лагранжа порядка не выше n по первой переменной и не выше m по второй переменной).

2. Условие (2), накладываемое выше на ядро $h(s,t)$, является лишь достаточным для существования обратного оператора $A^{-1} : Y \to X$.

3. Аналоги теорем 1 и 2 и их следствий справедливы также при отсутствии требования (2). Для сходимости исследуемого общего проекционного метода достаточно обратимости оператора $A : X \to Y$.

4. Для решения поставленной выше задачи может быть применен и другой подход, основанный на формуле (3) для обратного оператора $A^{-1} : Y \to X$. Суть этого подхода заключается в том, что коэффициенты Фурье $c_{kj}(\varphi)$ ($k = \overline{-n,n}$, $j = \overline{-m,m}$), участвующие в представлении (3), могут быть вычислены приближенно по кубатурной формуле наивысшей тригонометрической степени точности, т. е. по кубатурной формуле прямоугольников. Выбор кубатурной формулы обусловлен ее простотой и в то же время наилучшими оценками погрешности. Оценку погрешности описанного метода дает

Теорема 4. *Если с.с.и.у.* (1) *имеет единственное решение $x^* \in X$ при любой правой части $y \in Y$, а ядро $h(s,t)$ удовлетворяет условию* (2), *то для любых натуральных n и m приближенное решение может быть найдено по формуле*

$$x^*_{nm}(\sigma,\tau) = \sum_{|k|=0}^{n} \sum_{|j|=0}^{m} \frac{\widetilde{c}_{kj}(y)}{\widetilde{c}_{kj}(h) + \lambda_k \lambda_j} e^{i(k\sigma + j\tau)},$$

где $\widetilde{c}_{kj}(\varphi) = \frac{1}{NM} \sum\limits_{l=1}^{N} \sum\limits_{r=1}^{M} \varphi(s_l, t_r) e^{-i(ks_l + jt_r)}$ ($k = \overline{-n,n}$, $j = \overline{-m,m}$), $N = 2n+1$, $M = 2m+1$, $s_l = \frac{2\pi}{N} l$ ($l = \overline{1,N}$), $t_r = \frac{2\pi}{M} r$ ($r = \overline{1,M}$). *При этом $x^*_{nm} \to x^*$ в пространстве X и погрешность приближенного решения оценивается неравенством*

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_X = O\{E_{nm}(x^*) + E_{nm}(h) + E_{nm}(y)\},$$

здесь $E_{nm}(\varphi)$ — наилучшее равномерное приближение $\varphi(\sigma,\tau)$ элементами из H^T_{nm}.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун–та, 1994. – 288 с.
2. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
3. Тихоненко Н.Я. *Приближенное решение краевых задач теории аналитических функций и их приложения*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Киев, 1994. – 327 с.
4. Мифтахова Е.Ф. *Аппроксимативные методы решения многомерного слабо сингулярного интегрального уравнения.* – Казанский ун-т. – Казань, 1999. – 24 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.01.99, № 191-В99.

Казанский государственный университет

Поступила
09.03.2000