Известия вузов. Математика
2014, № 10, с. 27–34

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Н. МИРОНОВ, Л.Б. МИРОНОВА

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Аннотация. Построены инварианты Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной. В терминах инвариантов Лапласа записаны определяющие уравнения. Построены классы уравнений, допускающих четырехмерные алгебры Ли.

Ключевые слова: уравнения с доминирующей частной производной, инварианты Лапласа, алгебра Ли.

УДК: 517.956

Приложения инвариантов Лапласа уравнения

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \tag{1}$$

широко известны и изложены, в частности, в работах ([1], с. 116–125; [2], [3], с. 175–186).

В данной работе построены инварианты Лапласа для уравнения

$$\begin{aligned} L(u) \equiv u_{xxxy} + a_{30}(x,y)u_{xxx} + a_{21}(x,y)u_{xxy} + a_{20}(x,y)u_{xx} + \\ + a_{11}(x,y)u_{xy} + a_{10}(x,y)u_x + a_{01}(x,y)u_y + a_{00}(x,y)u = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

а также указаны некоторые приложения этих инвариантов.

Уравнение (2) является определенным обобщением уравнения

$$u_{xxy} + c_{20}(x,y)u_{xx} + c_{11}(x,y)u_{xy} + c_{10}(x,y)u_x + c_{01}(x,y)u_y + c_{00}(x,y)u = 0, \tag{3}$$

которое с различных точек зрения исследовалось в [4]–[6]. Отметим, что частным случаем (3) является уравнение Аллера

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x,$$

встречающееся при моделировании процесса переноса почвенной влаги ([7], с. 17–18).

Построению инвариантов Лапласа и их приложениям для уравнений высокого порядка посвящены работы [8], [9].

Имя Лапласа носят инварианты преобразования

$$u = \lambda(x,y)v, \tag{4}$$

Поступила 09.04.2013

где v — новая неизвестная функция. Указанные инварианты для уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned}
&h_1 = a_{21y} + a_{30}a_{21} - a_{20}, \quad h_2 = 3a_{30x} + a_{30}a_{21} - a_{20},\\
&h_3 = a_{21x} + \frac{1}{3}a_{21}^2 - a_{11},\\
&h_4 = 3a_{30xx} + a_{30}a_{11} + \frac{2}{3}a_{21}a_{20} - \frac{2}{3}a_{30}a_{21}^2 - a_{10},\\
&h_5 = a_{21xy} + a_{30}a_{11} + \frac{2}{3}a_{21}a_{20} - \frac{2}{3}a_{30}a_{21}^2 - a_{10},\\
&h_6 = a_{21xx} + a_{21}a_{11} - \frac{2}{9}a_{21}^3 - 3a_{01},\\
&h_7 = 3a_{30xxx} + 3a_{30}a_{01} + a_{21}a_{10} + a_{20}a_{11} - 2a_{30}a_{21}a_{11} - \frac{2}{3}a_{21}^2a_{20} + \frac{2}{3}a_{21}^3a_{30} - 3a_{00},\\
&h_8 = a_{21xxy} + 3a_{30}a_{01} + a_{21}a_{10} + a_{20}a_{11} - 2a_{30}a_{21}a_{11} - \frac{2}{3}a_{21}^2a_{20} + \frac{2}{3}a_{21}^3a_{30} - 3a_{00}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Действительно, преобразование (4) переводит (2) в

$$v_{xxxy} + b_{30}(x,y)v_{xxx} + b_{21}(x,y)v_{xxy} + b_{20}(x,y)v_{xx} + b_{11}(x,y)v_{xy} + \\ + b_{10}(x,y)v_x + b_{01}(x,y)v_y + b_{00}(x,y)v = 0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
&b_{30} = \lambda_y/\lambda + a_{30}, \quad b_{21} = 3\lambda_x/\lambda + a_{21},\\
&b_{20} = 3\lambda_{xy}/\lambda + 3a_{30}\lambda_x/\lambda + a_{21}\lambda_y/\lambda + a_{20},\\
&b_{11} = 3\lambda_{xx}/\lambda + 2a_{21}\lambda_x/\lambda + a_{11},\\
&b_{10} = 3\lambda_{xxy}/\lambda + 3a_{30}\lambda_{xx}/\lambda + 2a_{21}\lambda_{xy}/\lambda + 2a_{20}\lambda_x/\lambda + a_{11}\lambda_y/\lambda + a_{10},\\
&b_{01} = \lambda_{xxx}/\lambda + a_{21}\lambda_{xx}/\lambda + a_{11}\lambda_x/\lambda + a_{10},\\
&b_{00} = L(\lambda)/\lambda.
\end{aligned} \tag{7}$$

Имеют место соотношения (при $\ln\lambda = \mu$)

$$\lambda_x/\lambda = \mu_x, \quad \lambda_y/\lambda = \mu_y,$$
$$\lambda_{xy}/\lambda = \mu_{xy} + \mu_x\mu_y, \quad \lambda_{xx}/\lambda = \mu_{xx} + (\mu_x)^2,$$
$$\lambda_{xxy}/\lambda = \mu_{xxy} + 2\mu_x\mu_{xy} + \mu_{xx}\mu_y + (\mu_x)^2\mu_y,$$
$$\lambda_{xxx}/\lambda = \mu_{xxx} + 3\mu_x\mu_{xx} + (\mu_x)^3,$$
$$\lambda_{xxxy}/\lambda = \mu_{xxxy} + \mu_y\mu_{xxx} + 3\mu_x\mu_{xxy} + 3\mu_{xx}\mu_{xy} + 3(\mu_x)^2\mu_{xy} + 3\mu_{xx}\mu_x\mu_y + \mu_y(\mu_x)^3.$$

С учетом этих соотношений формулы (7) перепишутся так

$$b_{30} = \mu_y + a_{30}, \quad b_{21} = 3\mu_x + a_{21},$$
$$b_{11} = 3\mu_{xx} + 3(\mu_x)^2 + 2a_{21}\mu_x + a_{11},$$
$$b_{20} = 3\mu_{xy} + 3\mu_x\mu_y + 3a_{30}\mu_x + a_{21}\mu_y + a_{20},$$

$$b_{10} = 3(\mu_{xxy} + 2\mu_x\mu_{xy} + \mu_{xx}\mu_y + \mu_y(\mu_x)^2) + \\ + 3a_{30}(\mu_{xx} + (\mu_x)^2) + 2a_{21}(\mu_{xy} + \mu_x\mu_y) + a_{11}\mu_y + 2a_{20}\mu_x + a_{10},$$
$$b_{01} = \mu_{xxx} + 3\mu_x\mu_{xx} + (\mu_x)^3 + a_{21}(\mu_{xx} + (\mu_x)^2) + a_{11}\mu_x + a_{01},$$

$$
\begin{aligned}
b_{00} = \mu_{xxxy} + \mu_{xxx}\mu_y + 3\mu_{xxy}\mu_x + 3\mu_{xx}\mu_{xy} + 3(\mu_x)^2\mu_{xy} + 3\mu_{xx}\mu_x\mu_y + \mu_y(\mu_x)^3 + \\
+ a_{30}(\mu_{xxx} + 3\mu_x\mu_{xx} + (\mu_x)^3) + a_{21}(\mu_{xxy} + 2\mu_x\mu_{xy} + \mu_{xx}\mu_y + (\mu_x)^2\mu_y) + \\
+ a_{11}(\mu_{xy} + \mu_x\mu_y) + a_{20}(\mu_{xx} + (\mu_x)^2) + a_{10}\mu_x + a_{01}\mu_y + a_{00}
\end{aligned}
$$

или в другой форме

$$
\begin{gathered}
b_{30} - a_{30} = \mu_y, \quad b_{21} - a_{21} = 3\mu_x, \\
b_{11} - \frac{1}{3}b_{21}^2 - a_{11} + \frac{1}{3}a_{21}^2 = 3\mu_{xx}, \\
b_{20} - b_{30}b_{21} - a_{20} + a_{30}a_{21} = 3\mu_{xy}, \\
b_{10} - \frac{2}{3}b_{21}b_{20} - b_{11}b_{30} + \frac{2}{3}b_{30}b_{21}^2 - a_{10} + \frac{2}{3}a_{21}a_{20} + a_{11}a_{30} - \frac{2}{3}a_{30}a_{21}^2 = 3\mu_{xxy}, \\
b_{01} - \frac{1}{3}b_{21}b_{11} + \frac{2}{27}b_{21}^3 - a_{01} + \frac{1}{3}a_{21}a_{11} - \frac{2}{27}a_{21}^3 = \mu_{xxx}, \\
b_{00} - b_{30}b_{01} - \frac{1}{3}b_{21}b_{10} - \frac{1}{3}b_{20}b_{11} + \frac{2}{3}b_{30}b_{21}b_{11} + \frac{2}{9}b_{21}^2b_{20} - \frac{2}{9}b_{21}^3b_{30} - \\
- a_{00} + a_{30}a_{01} + \frac{1}{3}a_{21}a_{10} + \frac{1}{3}a_{20}a_{11} - \frac{2}{3}a_{30}a_{21}a_{11} - \frac{2}{9}a_{21}^2a_{20} + \frac{2}{9}a_{21}^3a_{30} = \mu_{xxxy}.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Следовательно, уравнение (2) переходит в уравнение (6) при преобразовании (4) тогда и только тогда, когда существует функция $\mu = \ln\lambda$, удовлетворяющая условиям (8).

Ясно, что если уравнение (2) эквивалентно по функции уравнению (6), т. е. у уравнений (2) и (6) инварианты Лапласа (5) совпадают, то соответствующее преобразование (4) имеет множитель

$$
\lambda = \exp\int\left(\frac{b_{21} - a_{21}}{3}\,dx + (b_{30} - a_{30})\,dy\right),
$$

подинтегральное выражение в котором является полным дифференциалом.

Если искать допускаемый уравнением (2) оператор

$$
\alpha\partial_x + \beta\partial_y + \tau\partial_u,
$$

то оказывается, что часть системы определяющих уравнений ([1], с. 66) составит

$$
\partial_u\alpha = \partial_u\beta = 0, \quad \partial_u^2\tau = 0.
$$

Известно ([1], с. 99–100), что в таком случае алгебра Ли уравнения (2) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где алгебра L^r размерности r образована операторами вида

$$
X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y + \sigma(x,y)u\partial_u, \tag{9}
$$

а L^∞ — типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\omega(x,y)\partial_u$, ω — решение уравнения (2). Ясно, что оператор $u\partial_u$ допускается любым уравнением (2), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x,y)$ определяется в (9) с точностью до постоянного слагаемого.

Определяющие уравнения для (2) вычисляются по стандартному алгоритму и записываются в форме

$$
\begin{gathered}
\xi_y = 0, \quad \eta_x = 0, \\
3\sigma_x + (a_{21}\xi)_x + a_{21y}\eta - 3\xi_{xx} = 0, \\
\sigma_y + a_{30x}\xi + (a_{30}\eta)_y = 0, \\
3\sigma_{xx} + 2a_{21}\sigma_x + (a_{11}\xi)_x + a_{11}\xi_x + a_{11y}\eta - a_{21}\xi_{xx} - \xi_{xxx} = 0, \\
3\sigma_{xy} + 3a_{30}\sigma_x + a_{21}\sigma_y + (a_{20}\xi)_x + (a_{20}\eta)_y - 3a_{30}\xi_{xx} = 0,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$\sigma_{xxx} + a_{21}\sigma_{xx} + a_{11}\sigma_x + 3a_{01}\xi_x + a_{01x}\xi + a_{01y}\eta = 0,$$

$$3\sigma_{xxy} + 3a_{30}\sigma_{xx} + 2a_{21}\sigma_{xy} + 2a_{20}\sigma_x + a_{11}\sigma_y + \\ + (a_{10}\eta)_y + (a_{10}\xi)_x + a_{10}\xi_x - a_{20}\xi_{xx} - a_{30}\xi_{xxx} = 0,$$

$$\sigma_{xxxy} + a_{30}\sigma_{xxx} + a_{21}\sigma_{xxy} + a_{20}\sigma_{xx} + \\ + a_{11}\sigma_{xy} + a_{10}\sigma_x + a_{01}\sigma_y + 3a_{00}\xi_x + a_{00}\xi_x + (a_{00}\eta)_y = 0.$$

Вывод уравнений (10) проводится следующим образом. Находим продолженный оператор (9)

$$\underset{4}{X} = \xi^1\partial_x + \xi^2\partial_y + \sigma u\partial_u + \tau^1\partial_{u_1} + \tau^2\partial_{u_2} + \tau^{11}\partial_{u_{11}} + \\ + \tau^{12}\partial_{u_{12}} + \tau^{22}\partial_{u_{22}} + \tau^{111}\partial_{u_{111}} + \tau^{112}\partial_{u_{112}} + \tau^{122}\partial_{u_{122}} + \tau^{222}\partial_{u_{222}} + \\ + \tau^{1111}\partial_{u_{1111}} + \tau^{1112}\partial_{u_{1112}} + \tau^{1122}\partial_{u_{1122}} + \tau^{1222}\partial_{u_{1222}} + \tau^{2222}\partial_{u_{2222}},$$

где $u_1 = u_x, \ldots, u_{2222} = u_{yyyy}$. Требуются коэффициенты

$$\tau^1 = \sigma_x u + (\sigma - \xi^1_x)u_1 - \xi^2_x u_2,$$
$$\tau^2 = \sigma_y u - \xi^1_y u_1 + (\sigma - \xi^2_y)u_2,$$
$$\tau^{11} = \sigma_{xx} u + (2\sigma_x - \xi^1_{xx})u_1 - \xi^2_{xx}u_2 + (\sigma - 2\xi^1_x)u_{11} - 2\xi^2_x u_{12},$$
$$\tau^{12} = \sigma_{xy} u + (\sigma_y - \xi^1_{xy})u_1 + (\sigma_x - \xi^2_{xy})u_2 - \xi^1_y u_{11} + (\sigma - \xi^1_x - \xi^2_y)u_{12} - \xi^2_x u_{22},$$

$$\tau^{112} = \sigma_{xxy}u + (2\sigma_{xy} - \xi^1_{xxy})u_1 + (\sigma_{xx} - \xi^2_{xxy})u_2 + \\ + (\sigma_y - 2\xi^1_{xy})u_{11} + (2\sigma_x - 2\xi^2_{xy} - \xi^1_{xx})u_{12} + \xi^2_{xx}u_{22} - \\ - \xi^1_y u_{111} + (\sigma - \xi^2_y - 2\xi^1_x)u_{112} - 2\xi^2_x u_{122},$$
$$\tau^{111} = \sigma_{xxx}u + (3\sigma_{xx} - \xi^1_{xxx})u_1 - \xi^2_{xxx}u_2 + (3\sigma_x - 3\xi^1_{xx})u_{11} - 3\xi^2_{xx}u_{12} - 3\xi^1_x u_{111} - 3\xi^2_x u_{112},$$

$$\tau^{1112} = \sigma_{xxxy}u + (3\sigma_{xxy} - \xi^1_{xxxy})u_1 + (\sigma_{xxx} - \xi^2_{xxxy})u_2 + \\ + (3\sigma_{xy} - 3\xi^1_{xxy})u_{11} + (3\sigma_{xy} - \xi^1_{xxx} - 3\xi^2_{xxy})u_{12} - \xi^2_{xxx}u_{22} + \\ + (\sigma_y - 3\xi^1_{xy})u_{111} + (3\sigma_x - 3\xi^1_{xx} - 3\xi^2_{xy})u_{112} - 3\xi^2_{xx}u_{122} + \\ + (\sigma - 3\xi^1_x - \xi^2_y)u_{1112} - \xi^1_y u_{1111} - 3\xi^2_x u_{1122}.$$

Применение оператора $\underset{4}{X}$ к уравнению (2) и расщепление относительно свободных параметров u, $u_1, \ldots, u_{1122}$ приводит к определяющим уравнениям (10).

Первые два уравнения из (10) означают $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(y)$. Остальные могут быть записаны в терминах инвариантов (5). Именно, третье и четвертое уравнения дают

$$\begin{aligned} (3\sigma + a_{21}\xi + 3a_{30}\eta)_x &= (h_2 - h_1)\eta + 3\xi_{xx}, \\ (3\sigma + a_{21}\xi + 3a_{30}\eta)_y &= (h_1 - h_2)\xi. \end{aligned} \tag{11}$$

Пятое уравнение преобразуется к

$$2\xi_{xxx} - (h_3\xi)_x - h_3\xi_x - h_{3y}\eta = 0. \tag{12}$$

Шестое уравнение можно записать двумя способами:

$$(h_1\xi)_x + (h_1\eta)_y = 0, \quad (h_2\xi)_x + (h_2\eta)_y = 0. \tag{13}$$

Седьмое уравнение дает

$$\xi_{xxxx} - h_3\xi_{xx} - h_6\xi_x - \frac{1}{3}h_{6x}\xi - \frac{1}{3}h_{6y}\eta = 0. \tag{14}$$

Восьмое уравнение преобразуется к

$$h_1\xi_{xx} + (h_5\xi)_x + h_5\xi_x + (h_5\eta)_y = 0, \tag{15}$$

$$h_2\xi_{xx} + (h_4\xi)_x + h_4\xi_x + (h_4\eta)_y = 0. \tag{16}$$

Наконец, девятое уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{3}h_1\xi_{xxx} + h_5\xi_{xx} + h_8\xi_x + \frac{1}{3}h_{8x}\xi + \frac{1}{3}(h_8\eta)_y = 0, \tag{17}$$

$$h_2\xi_{xxx} + 3h_4\xi_{xx} + h_7\xi_x + \frac{1}{3}h_{7x}\xi + \frac{1}{3}(h_7\eta)_y = 0. \tag{18}$$

Проще всего убедиться в справедливости этих формул, преобразуя (11)–(18) с учетом выражений для производных функции σ из (10).

Далее ограничимся рассмотрением уравнений (2), для которых выполняется хотя бы одно из условий $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$.

Рассуждения проводятся следуя книге ([1], с. 122–123).

Введем обозначения

$$p_{12} = \frac{h_1}{h_2}, \quad p_{21} = \frac{h_2}{h_1}, \quad q_i = \frac{(\ln h_i)_{xy}}{h_i}, \quad i = 1, 2.$$

Наличие уравнений (13) позволяет сформулировать, дословно повторяя рассуждения из ([1], с. 122), достаточные условия, при которых алгебра Ли L^r не более чем одномерна.

Действительно, пусть $h_2 \neq 0$. Тогда из (13) следует уравнение

$$\xi p_{12x} + \eta p_{12y} = 0, \tag{19}$$

позволяющее утверждать, что либо p_{12} — инвариант группы G с оператором (9), либо $p_{12} = \mathrm{const}$. Далее, если отношение p_{12} инвариантов Лапласа не есть постоянная, то алгебра Ли операторов (9) не более чем одномерна. Действительно, пусть пары (ξ, η), (ξ_1, η_1) удовлетворяют уравнению (19). Тогда при $p_{12} \neq \mathrm{const}$ будет $\xi_1 = Q\xi$, $\eta_1 = Q\eta$, где $Q = \mathrm{const}$. Тогда из (11) следует $\sigma_1 = Q\sigma$, что и требовалось.

Совершенно аналогично рассуждаем в случае $h_1 \neq 0$.

Пусть теперь $p_{12} = \mathrm{const}$. Тогда, записывая второе уравнение (13) в виде

$$\xi(\ln h_2)_x + \eta(\ln h_2)_y + \xi_x + \eta_y = 0 \tag{20}$$

и дифференцируя это равенство по x и по y, получим

$$\xi((\ln h_2)_{xy})_x + \eta((\ln h_2)_{xy})_y + \xi_x + \eta_y = 0. \tag{21}$$

После вычитания из уравнения (21) уравнение (20) имеем

$$\xi q_{2x} + \eta q_{2y} = 0.$$

Снова можем утверждать, что либо q_2 — инвариант группы G с оператором (9), либо $q_2 = \mathrm{const}$.

Аналогичный вывод справедлив и относительно конструкции q_1.

Итак, имеет место утверждение: если хотя бы одна из функций p_{12}, p_{21}, q_1, q_2 не равна тождественно постоянной, то алгебра Ли L^r операторов (9) не более чем одномерна.

Отметим, что инварианты h_i удовлетворяют уравнению Лиувилля

$$(\ln h_i)_{xy} = q_i h_i, \tag{22}$$

если q_i постоянны. Общее решение уравнения Лиувилля известно ([1], с. 123):

$$h_i = \frac{2}{q_i}\frac{\alpha'(x)\beta'(y)}{(\alpha(x)+\beta(y))^2} \quad (q_i \neq 0), \quad h_i = \alpha'(x)\beta'(y) \quad (q_i \equiv 0),$$

$\alpha(x)$ и $\beta(y)$ — произвольные функции.

Укажем теперь некоторые классы уравнений вида (2), аналогичные указанным в ([1], теорема на с. 123). Точнее, сконструируем уравнения, которые являются представителями классов уравнений вида (2), допускающими алгебру Ли L^r наибольшей размерности. Поскольку q_i в этом случае постоянны, структура коэффициентов уравнений определяется из (22) однозначно (с точностью до эквивалентности, заданной преобразованиями (4)).

Анализ определяющих уравнений всюду проводится аналогично изложенному в ([1], с. 124–125).

1. Пусть

$$q_1 = q_2 \equiv 0, \quad (\ln h_2)_{xy} = 0, \quad h_1 = ph_2, \quad h_3 = \cdots = h_8 \equiv 0.$$

Учитывая вид решения уравнения Лиувилля (22) ([1], с. 123), приходим к уравнению

$$u_{xxxy} + \frac{x}{3}u_{xxx} + pyu_{xxy} + \frac{pxy}{3}u_{xx} + \frac{p^2y^2}{3}u_{xy} + \frac{p^2xy^2}{9}u_x + \frac{p^3y^3}{9}u_y + \frac{p^3xy^3}{81}u = 0.$$

Определяющие уравнения дают

$$\xi = C_1x + C_2, \quad \eta = -C_1y + C_3, \quad \sigma = -\frac{1}{3}(C_3px + C_2y).$$

Коэффициенты ξ, η получены из (13). Это означает, что если $q_1 = q_2 \equiv 0$, то размерность интересующей нас алгебры Ли L^r для любого уравнения (2) не превышает трех при выполнении условия $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ при любых $h_3, \ldots, h_8$. Построенное уравнение допускает алгебру L^3, образованную операторами

$$X_1 = x\partial_x - y\partial_y, \quad X_2 = \partial_x - \frac{1}{3}yu\partial_u, \quad X_3 = \partial_y - \frac{1}{3}pxu\partial_u.$$

2. Поменяем переменные ролями. Рассуждаем аналогично вышеизложенному. Пусть $q_1 = q_2 \equiv 0$, $(\ln h_1)_{xy} = 0$, $h_2 = ph_1$, $h_3 = \cdots = h_8 \equiv 0$. Получаем уравнение

$$u_{xxxy} + \frac{px}{3}u_{xxx} + yu_{xxy} + \frac{pxy}{3}u_{xx} + \frac{y^2}{3}u_{xy} + \frac{pxy^2}{9}u_x + \frac{y^3}{27}u_y + \frac{pxy^3}{81}u = 0.$$

Из определяющих уравнений находим $\xi = C_1x + C_2$, $\eta = -C_1y + C_3$, $\sigma = -\frac{1}{3}(C_3x + C_2py)$. Данное уравнение допускает алгебру L^3, образованную операторами

$$X_1 = x\partial_x - y\partial_y, \quad X_2 = \partial_x - \frac{1}{3}pyu\partial_u, \quad X_3 = \partial_y - \frac{1}{3}xu\partial_u.$$

3. Рассмотрим уравнение

$$u_{xxxy} + \frac{A_{30}}{x+y}u_{xxx} + \frac{A_{21}}{x+y}u_{xxy} + \frac{A_{20}}{(x+y)^2}u_{xx} + \frac{A_{11}}{(x+y)^2}u_{xy} + \\ + \frac{A_{10}}{(x+y)^3}u_x + \frac{A_{01}}{(x+y)^3}u_y + \frac{A_{00}}{(x+y)^4}u = 0, \quad (23)$$

где все $A_{ij} = \mathrm{const}$. При всевозможных значениях параметров A_{ij} данное уравнение допускает алгебру L^2, образованную операторами

$$X_1 = \partial_x - \partial_y, \quad X_2 = x\partial_x - y\partial_y.$$

В этом легко убедиться, используя определяющие уравнения (11)–(18).

Уравнение (23) может рассматриваться в качестве аналога уравнения Эйлера–Пуассона. В работах [10], [11] для некоторых уравнений с двумя независимыми переменными со сходной структурой коэффициентов разрабатывался метод каскадного интегрирования, обобщающий известный результат для уравнения Эйлера–Пуассона ([3], с. 177–181).

Нетрудно видеть, что инварианты Лапласа для уравнения (23) имеют структуру

$$h_i = \frac{\alpha_i}{(x+y)^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$h_j = \frac{\alpha_j}{(x+y)^3}, \quad j = 4, 5, 6,$$
$$h_k = \frac{\alpha_k}{(x+y)^4}, \quad k = 7, 8,$$

где α_l постоянные.

Если $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$, то из (13) следует ([1], с. 124)

$$\xi = Cx^2 + C_1 x + C_2, \quad \eta = -Cy^2 + C_1 y - C_2.$$

Ясно, что размерность допускаемой алгебры Ли L^r для любого уравнения (23) не может быть больше трех.

Дополнительно рассмотрим уравнение

$$u_{xxxy} - \frac{2}{3q(x+y)} u_{xxx} = 0, \tag{24}$$

для которого $q_2 = q \neq 0$ и

$$h_2 = \frac{2/q}{(x+y)^2}, \quad h_4 = -\frac{4/q}{(x+y)^3}, \quad h_7 = \frac{4/q}{(x+y)^4},$$

а остальные инварианты Лапласа тождественно равны нулю. Построенное уравнение является частным случаем (23) и допускает трехмерную алгебру L^3. Действительно, нетрудно убедиться, что определяющие уравнения (12) и (15)–(18) обращаются в тождества. Определив σ из (11), приходим к выводу, что уравнение (24) допускает алгебру Ли L^3, образованную операторами

$$X_1 = \partial_x - \partial_y, \quad X_2 = x\partial_x - y\partial_y, \quad X_3 = x^2\partial_x - y^2\partial_y + 2\left(x + \frac{y}{3q}\right) u\partial_u.$$

Из предыдущих рассуждений вытекает

Теорема. *Пусть выполняется условие $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$. Уравнение (2) допускает более чем одномерную алгебру Ли операторов (9) тогда и только тогда, когда функции p_{ij}, q_i $(i, j = 1, 2)$ тождественно постоянны. Если p_{ij} и q_i постоянны, то наибольшая размерность допускаемой алгебры Ли L^r операторов (9) равна трем.*

Литература

[1] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1978).

[2] Ибрагимов Н.Х. *Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике*, УМН **47** (4), 83–144 (1992).

[3] Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных* (Ин. лит., М., 1957).

[4] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка*, ДАН СССР **297** (3), 547–552 (1987).

[5] Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка*, Изв. вузов. Матем., № 10, 73–76 (1999).

[6] Джохадзе О.М. *Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка*, Матем. заметки **74** (4), 517–528 (2003).

[7] Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных* (Наука, М., 2006).

[8] Джохадзе О.М. *Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных*, Дифференц. уравнения **40** (1), 58–68 (2004).
[9] Миронов А.Н. *Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка*, Дифференц. уравнения **45** (8), 1144–1149 (2009).
[10] Уткина Е.А. *Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами*, Изв. вузов. Матем., № 9, 67–70 (2006).
[11] Уткина Е.А. *Об одном применении метода каскадного интегрирования*, Дифференц. уравнения **43** (4), 566–569 (2007).

А.Н. Миронов

доцент, кафедра математического анализа, алгебры и геометрии,
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423600, Россия

Л.Б. Миронова

доцент, кафедра математического анализа, алгебры и геометрии,
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423600, Россия,

e-mail: lbmironova@yandex.ru

A.N. Mironov and L.B. Mironova

Laplace invariants for fourth-order equation with two independent variables

Abstract. We construct the Laplace invariants for fourth-order equation with leading partial derivative. We obtain classes of equations admitting four-dimensional Lie algebras.

Keywords: equations with leading partial derivative, Laplace invariants, Lie algebra.

A.N. Mironov

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Elabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University,
89 Kazanskaya str., Elabuga, 423600 Russia

L.B. Mironova

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Elabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University,
89 Kazanskaya str., Elabuga, 423600 Russia,

e-mail: lbmironova@yandex.ru