ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 514.76

ПРВАНОВИЧ МИЛЕВА

РАСШИРЕННО РЕКУРРЕНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Введение

Впервые понятие рекуррентного многообразия ввел H.S. Ruse [1], [2]; он же доказал, что такое многообразие существует. Это неплоское n-мерное аналитическое риманово многообразие (M, g), тензор кривизны которого удовлетворяет условию

$$\nabla_r R_{lkji} = A_r \cdot R_{lkji} \tag{1.1}$$

для некоторого ненулевого вектора A_r, где ∇ — символ ковариантного дифференцирования в метрике многообразия.

В [3] введено понятие рекуррентного пространства второго порядка (2-рекуррентного пространства). Это риманово пространство, тензор кривизны которого удовлетворяет условию

$$\nabla_s \nabla_r R_{lkji} = C_{sr} R_{lkji}$$

для некоторого тензора C_{sr}. В.Р.Кайгородов [4]–[6] (см. также обзорную статью [7]) построил новый метод, позволивший рассматривать многообразия, удовлетворяющие условию

$$\nabla_{m_s} \cdots \nabla_{m_2} \nabla_{m_1} R_{lkji} = \Omega_{m_1 m_2 \cdots m_s} R_{lkji} + \Omega_{m_2 \cdots m_1} \nabla_{m_1} R_{lkji} + \\ + \Omega_{m_3 \cdots m_s} \nabla_{m_2} \nabla_{m_1} R_{lkji} + \cdots + \Omega_{m_s} \nabla_{m_{s-1}} \cdots \nabla_{m_1} R_{lkji},$$

где $\Omega_{m_1 m_2 \cdots m_s} \neq 0$, $\Omega_{m_2 \cdots m_1}, \dots, \Omega_{m_1}$ — некоторые тензоры. Он исследовал также вопрос о приложениях рекуррентных многообразий к задачам общей теории относительности.

Недавно появились работы, в которых также строятся обобщения рекуррентных многообразий, но в других направлениях ([8]–[12]). Используемое там условие имеет вид

$$\nabla_r R_{lkji} = B_r R_{lkji} + A_l R_{rkji} + A_k R_{lrji} + A_j R_{lkri} + A_i R_{lkjr}. \tag{1.2}$$

Очевидно, если $A_i = 0$, то (1.2) сводится к (1.1). Другое обобщение таково:

$$\nabla_r R_{lkji} = 2A_r R_{lkji} + A_l R_{rkji} + A_k R_{lrji} + A_j R_{lkri} + A_i R_{lkjr}. \tag{1.3}$$

Если ассоциированное векторное поле A_r удовлетворяет условию

$$A_r R_{lkji} + A_j R_{lkir} + A_i R_{lkrj} = 0,$$

то условие (1.3) тоже сводится к (1.1).

В [13] рассматриваются вполне омбилические подмногообразия в многообразии, удовлетворяющем условию (1.2). Оказывается, в общем случае такое подмногообразие тоже удовлетворяет условию типа рекуррентности. Одно из таких условий имеет вид

$$\nabla_r R_{lkji} = A_r[R_{lkji} + (\beta - \psi) G_{lkji}] + \frac{\beta}{2}(A_l G_{rkji} + A_k G_{lrji} + A_j G_{lkri} + A_i G_{lkjr}), \tag{1.4}$$

где β и ψ — скалярные функции, A_r — градиентное векторное поле, а

$$G_{lkji} = g_{li} g_{kj} - g_{lj} g_{ki}. \tag{1.5}$$

Величины A_r, β, ψ связаны соотношением

$$\psi_r = \beta A_r, \quad \psi_r = \frac{\partial \psi}{\partial x^r}. \tag{1.6}$$

Целью данной статьи является изучение свойств риманова многообразия, тензор кривизны которого удовлетворяет условию (1.4) совместно с (1.5) и (1.6). Предполагается, что $A_r \neq 0$, $\psi \neq \mathrm{const}$, $\beta \neq 0$. В разделе 2 доказывается, что ассоциированное векторное поле не только градиентно, но и конциркулярно. В [4] установлено, что если риманово многообразие обладает конциркулярным векторным полем, то существует локальная система координат, в которой фундаментальная квадратичная дифференциальная форма принимает вид

$$ds^2 = (dx^1)^2 + e^\sigma \cdot \overset{*}{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

где $\overset{*}{g}_{\alpha\beta} = \overset{*}{g}_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ — функции только от x^γ $(\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, \dots)$, $\sigma = \sigma(x^1)$ — функция только от x^1. В разделе 3 находятся условия на σ и $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$, при которых полуприводимое риманово пространство $I \times_{e^\sigma} \overset{*}{M}$ удовлетворяет условию (1.4). В разделе 4 рассмотрен пример.

2. Доказательство конциркулярности ассоциированного векторного поля

В силу тождества Бианки из (1.4) получаем

$$A_r(R_{lkji} - \psi G_{lkji}) + A_l(R_{krji} - \psi G_{krji}) + A_k(R_{rlji} - \psi G_{rlji}) = 0. \tag{2.1}$$

Значит, в силу (1.4)

$$\nabla_r R_{kj} = A_r\{R_{kj} + [n\beta - (n-1)\psi]g_{kj}\} + \frac{n-2}{2}\beta(A_k g_{rj} + A_j g_{kr}) \tag{2.2}$$

и

$$\nabla_r R = A_r[R + (n^2 + n - 2)\beta - n(n-1)\psi], \tag{2.3}$$

где R_{kj} — компоненты тензора Риччи, а R — скалярная кривизна. С учетом градиентности A_r из (1.6) следует

$$A_r\beta_s - A_s\beta_r = 0 \quad \text{или} \quad \beta_s = \nabla_s\beta = \varphi A_s, \tag{2.4}$$

где φ — функция.

Свертывая (2.1) с g^{rj}, получим

$$A^a R_{ailk} = A_k[R_{li} - (n-2)\psi g_{li}] - A_l[R_{ki} - (n-2)\psi g_{ki}]. \tag{2.5}$$

Свертывая (2.5) с g^{il}, имеем

$$A^a R_{ak} = \frac{1}{2}[R - (n-1)(n-2)\psi]A_k. \tag{2.6}$$

Используя (2.2), (1.6) и (2.4), легко подсчитать $\nabla_s\nabla_r R_{kj}$ и, учитывая градиентность A_r, установить равенство

$$\nabla_s\nabla_r R_{kj} - \nabla_r\nabla_s R_{kj} = T_{rj}g_{ks} + T_{rk}g_{js} - T_{sj}g_{kr} - T_{sk}g_{jr},$$

откуда в силу тождества Риччи

$$R_{aj}R^a_{krj} + R_{ka}R^a_{jrs} = T_{rj}g_{ks} + T_{rk}g_{js} - T_{sj}g_{kr} - T_{sk}g_{jr},$$

где обозначено

$$T_{rk} = \frac{n-2}{2}[(\beta - \psi)A_r A_k - \beta\nabla_r A_k].$$

Циклируя по j, r, s, суммируя и учитывая, что тензор T_{rk} симметричен, найдем

$$R_{aj}R^a_{krs} + R_{ar}R^a_{ksj} + R_{as}R^a_{kjr} = 0. \tag{2.7}$$

Следовательно,

$$(\nabla_p R_{aj})R^a_{krs} + (\nabla_p R_{ar})R^a_{ksj} + (\nabla_p R_{as})R^a_{kjr} + R_{aj}\nabla_p R^a_{krs} + R_{ar}\nabla_p R^a_{ksj} + R_{as}R^a_{kjr} = 0. \quad (2.8)$$

Используя (2.2), (2.5) и (2.7), находим

$$(\nabla_p R_{aj})R^a_{krs} + (\nabla_p R_{ar})R^a_{ksj} + (\nabla_p R_{as})R^a_{kjr} =$$
$$= \frac{n-1}{2}\beta\{A_s[g_{pj}R_{rk} - g_{pr}R_{jk} + R_{pkjr} + (n-2)\psi G_{pkjr}] +$$
$$+ A_j[g_{pr}R_{sk} - g_{ps}R_{rk} + R_{pkrs} + (n-2)\psi G_{pkrs}] + A_r[g_{ps}R_{kj} - g_{pj}R_{sk} + R_{pksj} + (n-2)\psi G_{pksj}]\}.$$

Но согласно (2.1)

$$A_s R_{pkjr} + A_j R_{pkrs} + A_r R_{pksj} = \psi(A_s G_{pkjr} + A_j G_{pkrs} + A_r G_{pksj}).$$

Значит,

$$(\nabla_p R_{aj})R^a_{krs} + (\nabla_p R_{ar})R^a_{ksj} + (\nabla_p R_{as})R^a_{kjr} =$$
$$= \frac{n-2}{2}\beta[A_s(g_{pj}R_{kr} - g_{pr}R_{jk}) + A_j(g_{pr}R_{sk} - g_{ps}R_{rk}) +$$
$$+ A_r(g_{ps}R_{kj} - g_{pj}R_{sk}) + (n-1)\psi(A_s G_{pkjr} + A_j G_{pkrs} + A_r G_{pksj})]. \quad (2.9)$$

Используя (1.4), (2.6) и (2.7), получаем

$$R^a_j\nabla_p R_{akrs} + R^a_r\nabla_p R_{aksj} + R^a_s\nabla_p R_{akjr} = \frac{\beta}{4}[R - (n-1)(n-2)\psi](A_j G_{pkrs} + A_r G_{pksj} + A_s G_{pkjr}) +$$
$$+ \frac{\beta}{2}[A_r(R_{sp}g_{kj} - R_{jp}g_{ks}) + A_s(R_{jp}g_{kr} - R_{rp}g_{kj}) + A_j(R_{rp}g_{ks} - R_{sp}g_{kr})].$$

Подставляя это выражение и (2.9) в (2.8), в силу $\beta \neq 0$ имеем

$$2(n-2)[A_s(R_{rk}g_{jp} - R_{jk}g_{rp}) + A_j(R_{sk}g_{pr} - R_{rk}g_{ps}) +$$
$$+ A_r(R_{kj}g_{ps} - R_{sk}g_{pj})] + 2[A_s(R_{jp}g_{kr} - R_{rp}g_{kj}) + A_j(R_{rp}g_{ks} - R_{sp}g_{kr}) + A_k(R_{sp}g_{kj} - R_{jp}g_{ks})] +$$
$$+ [R + (n-1)(n-2)\psi](A_s G_{pkjr} + A_j G_{pkrs} + A_r G_{pksj}) = 0.$$

Свертывая это соотношение с g^{pj} и учитывая (2.6), имеем

$$(n-3)\{2(n-1)(A_s R_{kr} - A_r R_{sk}) + [R + (n-1)(n-2)\psi](A_r g_{sk} - A_s g_{kr})\} = 0.$$

Начиная с этого места, будем предполагать, что $n > 3$. Тогда

$$A_s\{(n-1)R_{rk} - \tfrac{1}{2}[R + (n-1)(n-2)\psi]g_{kr}\} - A_r\{(n-1)R_{sk} - \tfrac{1}{2}[R + (n-1)(n-2)\psi]g_{ks}\} = 0. \quad (2.10)$$

Свертывая (2.10) с A^s и применяя (2.6), найдем

$$A_a A^a\{(n-1)R_{rk} - \frac{1}{2}[R + (n-1)(n-2)\psi]g_{kr}\} = \frac{n-2}{2}A_r A_k[R - n(n-1)\psi]. \quad (2.11)$$

Докажем, что $A_a A^a \neq 0$. Во-первых, справедлива

Лемма 2.1. *Условия $A_a A^a = 0$ и $R = n(n-1)\psi$ эквивалентны.*

Доказательство. Если $A_a A^a = 0$, то из (2.11) следует

$$R = n(n-1)\psi, \quad (2.12)$$

поскольку $n > 3$ и $A_r \neq 0$.

Обратно, пусть выполняется условие (2.12). Тогда

$$\nabla_r R = n(n-1)\nabla_r\psi \neq 0, \quad (2.13)$$

поскольку по предположению $\psi \neq \text{const}$. Но, с другой стороны, из (2.11) следует

$$A_a A^a \{(n-1)R_{rk} - \frac{1}{2}[R + (n-1)(n-2)\psi]g_{rk}\} = 0.$$

Отсюда либо $A_a A^a = 0$, либо с учетом (2.12) $R_{rk} = \frac{R}{n} g_{rk}$. Но при $n > 2$ скалярная кривизна пространства Эйнштейна постоянна, что противоречит (2.13). Поэтому из (2.12) следует $A_a A^a = 0$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть* (M, g) — *риманово многообразие, удовлетворяющее условию* (1.4) *при* $A_r \neq 0$, $\psi \neq \text{const}$, $\beta \neq 0$, *и пусть* $n = \dim M > 3$. *Тогда* (M, g) *не удовлетворяет условию* (2.12).

Доказательство. Предположим, что выполняется условие (2.12). Подставляя R в (2.3), получим $\nabla_r R = (n-1)(n+2)\beta A_r$, что противоречит (2.13), т.к. согласно (1.6) и (2.13) $\nabla_r R = n(n-1)\beta A_r$. $\square$

Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что $A_a A^a \neq 0$.

Обратимся к соотношению (2.11). Применяя оператор ∇_s и учитывая (1.6), (2.2) и (2.3), получим новое соотношение, свертывая обе части которого с A^k и используя (2.6), найдем равенство

$$[R - n(n-1)\psi]A_a A^a \nabla_s A_r = [R - n(n-1)\psi](\nabla_s A_a)A^a A_r - \\ - (n-1)\beta A_a A^a A_r A_s + (n-1)(A_a A^a)^2 g_{rs}. \quad (2.14)$$

Альтернируя (2.14), получим $[R - n(n-1)\psi]\{(\nabla_s A_a)A^a A_r - (\nabla_r A_a)A^a A_s\} = 0$, откуда в силу леммы 2.2 $(\nabla_s A_a)A^a A_r = (\nabla_r A_a)A^a A_s$. Это соотношение приводит к равенству

$$(\nabla_s A_a)A^a = \frac{(\nabla_b A_a)A^b A^a}{A_a A^a} A_s. \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.14), находим

$$\nabla_s A_r = f g_{rs} + h A_r A_s, \quad (2.16)$$

где $f = \frac{(n-1)\beta}{R-n(n-1)\psi} A_a A^a$, $h = \frac{(\nabla_b A_a)A^b A^a}{(A_a A^a)^2} - \frac{(n-1)\beta}{R-n(n-1)\psi}$. Отсюда

$$\nabla_r f = \frac{(n-1)\nabla_r \beta}{R - n(n-1)\psi} A_a A^a - \frac{(n-1)\beta \nabla_r [R - n(n-1)\psi]}{[R - n(n-1)\psi]^2} + \frac{(n-1)\beta}{R - n(n-1)\psi} \nabla_r (A_a A^a).$$

Учитывая (1.6) и (2.3), получаем $\nabla_r [R - n(n-1)\psi] = [R + 2(n-1)\beta - n(n-1)\psi]A_r$. Поэтому, используя (2.4) и (2.15), имеем

$$\nabla_r f = F A_r, \quad (2.17)$$

где F — скалярная функция. Из (2.16) и (2.17) $\nabla_r \nabla_s A_i - \nabla_s \nabla_r A_i = (F - hf)(A_r g_{si} - A_s g_{ri}) + (A_s \nabla_r h - A_r \nabla_s h)A_i$, откуда в силу тождества Риччи

$$A_a R^a_{isr} = (F - hf)(A_r g_{si} - A_s g_{ri}) + (A_s \nabla_r h - A_r \nabla_s h)A_i.$$

Свертывая с A^i и учитывая, что $A_i A^i \neq 0$, имеем

$$A_s \nabla_r h - A_r \nabla_s h = 0. \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что вектор $w_s = h A_s$ градиентен. Поэтому (2.16) можно записать в виде

$$\nabla_s A_r = f g_{rs} + w_s A_r,$$

где w_s — градиент. Но это и означает, что A_r — конциркулярное векторное поле ([15], с. 322). Поэтому справедлива

Теорема 2.1. *Пусть* (M, g) — n*-мерное* ($n > 3$) *риманово многообразие, удовлетворяющее условию* (1.4), *где* $A_r \neq 0$, $\psi \neq \text{const}$, $\beta \neq 0$. *Тогда ассоциированное векторное поле* A_r *конциркулярно.*

3. Полуприводимое риманово пространство, удовлетворяющее условию (1.4)

В [14] доказано, что риманово многобразие (M, g) обладает конциркулярным векторным полем тогда и только тогда, когда существует система координат, в которой фундаментальная квадратичная дифференциальная форма принимает вид

$$ds^2 = (dx^1)^2 + e^\sigma \overset{*}{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{3.1}$$

где $\overset{*}{g}_{\alpha\beta} = \overset{*}{g}_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ — функции только от x^γ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho = 2, 3, \ldots, n)$, а $\sigma = \sigma(x^1)$ — функция только от x^1. Поэтому согласно теореме 2.1, если n-мерное риманово многобразие (M, g) удовлетворяет условию (1.4), то при $n > 3$ (M, g) является полуприводимым римановым пространством

$$M = I \times_{e^\sigma} \overset{*}{M}, \tag{3.2}$$

где $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ — $(n-1)$-мерное риманово многобразие. В этом разделе изучим условия, налагаемые на σ и $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$, при которых полуприводимое риманово пространство (3.2) удовлетворяет условию (1.4).

Каждый объект, принадлежащий многобразию $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$, условимся помечать звездочкой. Объект, не помеченный звездочкой, будет относиться к многобразию (M, g). Компоненты Γ^h_{ij} связности Леви-Чивита пространства (3.2) имеют в используемых локальных координатах строение (см. [16])

$$\begin{gathered}
\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{1\alpha} = \Gamma^\alpha_{11} = 0, \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \\
\Gamma^\alpha_{1\beta} = \frac{1}{2}\sigma' \delta^\alpha_\beta, \quad \Gamma^1_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\sigma' e^\sigma \overset{*}{g}_{\beta\gamma}, \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{dx^1}.
\end{gathered}$$

Отличные от нуля компоненты тензора кривизны R_{lkji} здесь имеют вид

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= e^\sigma \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{4}(\sigma')^2 G_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
R_{\alpha 11\beta} &= -\frac{1}{2}[\sigma'' + \tfrac{1}{2}(\sigma')^2] g_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Поэтому для $\nabla_r R_{lkji}$ получаем выражения

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ \nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma\delta} = e^\sigma \overset{*}{\nabla}_\rho \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
&(2)\ \ \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\sigma' e^\sigma \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}\sigma'\sigma'' G_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
&(3)\ \ \nabla_\gamma R_{\alpha 11\beta} = 0, \\
&(4)\ \ \nabla_1 R_{\alpha 11\beta} = -\frac{1}{2} e^\sigma (\sigma''' + \sigma'\sigma'') \overset{*}{g}_{\alpha\beta}, \\
&(5)\ \ \nabla_1 R_{111\delta} = 0, \\
&(6)\ \ \nabla_\beta R_{111\delta} = 0, \\
&(7)\ \ \nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma 1} = -\frac{1}{2}\sigma' e^\sigma \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\rho} - \frac{\sigma'\sigma''}{4} G_{\alpha\beta\gamma\rho}, \\
&(8)\ \ \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma 1} = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

С другой стороны, условие (1.4) для пространства (3.2) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \ \nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_\rho[R_{\alpha\beta\gamma\delta} + (\beta-\psi)G_{\alpha\beta\gamma\delta}] + \\
&\qquad\qquad + \frac{\beta}{2}(A_\alpha G_{\rho\beta\gamma\delta} + A_\beta G_{\alpha\rho\gamma\delta} + A_\gamma G_{\alpha\beta\rho\delta} + A_\delta G_{\alpha\beta\gamma\rho}),\\
&(2)\ \ \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_1[R_{\alpha\beta\gamma\delta} + (\beta-\psi)G_{\alpha\beta\gamma\delta}],\\
&(3)\ \ \nabla_\gamma R_{\alpha11\beta} = A_\gamma[R_{\alpha11\beta} + (\beta-\psi)G_{\alpha11\beta}] + \frac{\beta}{2}(A_\alpha G_{\gamma11\beta} + A_\beta G_{\alpha11\gamma}),\\
&(4)\ \ \nabla_1 R_{\alpha11\beta} = A_1[R_{\alpha11\beta} + (2\beta-\psi)G_{\alpha11\beta}],\\
&(5)\ \ \nabla_1 R_{111\delta} = 0,\\
&(6)\ \ \nabla_\beta R_{111\delta} = 0,\\
&(7)\ \ \nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma1} = \frac{\beta}{2}A_1 G_{\alpha\beta\gamma\rho},\\
&(8)\ \ \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma1} = -\frac{\beta}{2}(A_\alpha G_{1\beta\gamma1} + A_\beta G_{\alpha1\gamma1}).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Если пространство (3.2) удовлетворяет условию (1.4), то правые части равенств (3.4) и (3.5) должны совпадать. Поэтому из (3.4(8)) и (3.5(8)) находим

$$e^\sigma(A_\alpha \overset{*}{g}_{\beta\gamma} - A_\beta \overset{*}{g}_{\alpha\gamma}) = 0,$$

поскольку $\beta \neq 0$ и $g_{11} = 1$. Свертывая с $\overset{*}{g}{}^{\beta\gamma}$ и учитывая, что $n > 3$, получим $A_\alpha = 0$. Следовательно, в рассматриваемых локальных координатах все компоненты ассоциированного векторного поля, за исключением A_1, равны нулю, а условия (3.5) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \ \nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0,\\
&(2)\ \ \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_1[R_{\alpha\beta\gamma\delta} + (\beta-\psi)G_{\alpha\beta\gamma\delta}],\\
&(3)\ \ \nabla_\gamma R_{\alpha11\beta} = 0,\\
&(4)\ \ \nabla_1 R_{\alpha11\beta} = A_1[R_{\alpha11\beta} + (2\beta-\psi)G_{\alpha11\beta}],\\
&(5)\ \ \nabla_1 R_{111\delta} = 0,\\
&(6)\ \ \nabla_\rho R_{111\delta} = 0,\\
&(7)\ \ \nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma1} = \frac{\beta}{2}A_1 G_{\alpha\beta\gamma\rho},\\
&(8)\ \ \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma1} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Далее, сравнивая (3.4(7)) и (3.6(7)), видим, что $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ должно быть многообразием постоянной кривизны $\overset{*}{K}$, т. е.

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \overset{*}{K}(\overset{*}{g}_{\alpha\delta}\overset{*}{g}_{\beta\gamma} - \overset{*}{g}_{\alpha\gamma}\overset{*}{g}_{\beta\delta}).$$

Поэтому первое из условий (3.3) приводится к виду

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} - \frac{(\sigma')^2}{4}\right)G_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{3.7}$$

а условия (2), (4), (7) из (3.4) и (3.6) принимают соответственно вид

$$
\begin{aligned}
&(2)\quad \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\Big(\frac{\sigma' \overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{1}{2}\sigma'\sigma''\Big) G_{\alpha\beta\gamma\delta},\\
&(4)\quad \nabla_1 R_{\alpha 11\beta} = -\frac{1}{2}(\sigma'\sigma'' + \sigma''') g_{\alpha\beta},\\
&(7)\quad \nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma 1} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\sigma' \overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{1}{2}\sigma'\sigma''\Big) G_{\alpha\beta\gamma\rho}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&(2)\quad \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_1 \Big[\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} - \frac{(\sigma')^2}{4} + \beta - \psi\Big] G_{\alpha\beta\gamma\delta},\\
&(4)\quad \nabla_1 R_{\alpha 11\beta} = A_1 \Big[-\frac{\sigma''}{2} - \frac{1}{4}(\sigma')^2 + 2\beta - \psi\Big] g_{\alpha\beta},\\
&(5)\quad \nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma 1} = \frac{\beta}{2} A_1 G_{\alpha\beta\gamma\rho}.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Из (3.8) и (3.9) находим

$$\frac{\sigma'}{e^\sigma}\overset{*}{K} + \frac{1}{2}\sigma'\sigma'' = -A_1\Big[\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} - \frac{(\sigma')^2}{4} + \beta - \psi\Big], \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2}(\sigma'\sigma'' + \sigma''') = \frac{1}{2}A_1[\sigma'' + \tfrac{1}{2}(\sigma')^2 - 4\beta + 2\psi], \tag{3.11}$$

$$\sigma'\Big(\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{1}{2}\sigma''\Big) = -\beta A_1. \tag{3.12}$$

Вычитая (3.10) из (3.11), имеем

$$\frac{1}{2}\sigma''' = \frac{\sigma'}{e^\sigma}\overset{*}{K} = A_1\Big(\frac{1}{2}\sigma'' + \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma}\Big) - \beta A_1.$$

Подставляя $-\beta A_1$ из (3.12), получаем

$$\frac{1}{2}\sigma''' - \frac{\sigma'}{e^\sigma}\overset{*}{K} = A_1\Big(\frac{1}{2}\sigma'' + \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma}\Big) + \sigma'\Big(\frac{\sigma''}{2} + \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma}\Big). \tag{3.13}$$

Если бы функция $\sigma(x^1)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{\sigma''}{2} = 0, \tag{3.14}$$

то из (3.12) следовало бы либо $\beta = 0$, либо $A_1 = 0$. Но оба эти равенства противоречат предположению. Значит, должно быть $\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{\sigma''}{2} \neq 0$, и равенство (3.13) дает

$$A_1 = -\sigma' + \Big[\log\Big(\frac{\sigma''}{2} + \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma}\Big)\Big]'. \tag{3.15}$$

Это соотношение накладывает ограничение на функцию $\sigma(x^1)$. Так, в силу $A_1 \neq 0$ не может выполняться равенство

$$\frac{\sigma'''}{2} - \frac{\sigma'}{e^\sigma}\overset{*}{K} = \sigma'\Big(\frac{1}{2}\sigma'' + \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma}\Big).$$

Другими словами, функция $\sigma(x^1)$ не может быть решением дифференциального уравнения

$$\sigma''' = \sigma'\sigma''' + 4\overset{*}{K}\frac{\sigma'}{e^\sigma}. \tag{3.16}$$

Подставляя (3.12) в (3.10), получим $A_1\left[\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} - \frac{(\sigma')^2}{4} - \psi\right] = 0$, т. е.

$$\psi = \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} - \frac{(\sigma')^2}{4}. \tag{3.17}$$

Согласно нашему предположению, $\psi \neq \mathrm{const}$. Значит, $\sigma(x^1)$ не может быть решением дифференциального уравнения

$$\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} - \frac{(\sigma')^2}{4} = \mathrm{const}\,. \tag{3.18}$$

Да и продифференцировав (3.18), мы получили бы $\sigma'\left(\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{\sigma''}{2}\right) = 0$. Значит, $\sigma(x^1)$ не удовлетворяет ни дифференциальному уравнению (3.18), ни дифференциальному уравнению (3.16).

Из (3.12) и (3.15) получаем

$$\beta = \frac{\sigma'\left(\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{\sigma''}{2}\right)}{\left[-\sigma + \log\left(\frac{\sigma''}{2} + \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma}\right)\right]'}\,. \tag{3.19}$$

Итак, справедлива

Теорема 3.1. *Пусть (M, g) — n-мерное ($n > 3$) риманово многообразие, удовлетворяющее условию* (1.4), *где $A_r \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\psi \neq \mathrm{const}$. Тогда*

(а) *(M, g) является полуприводимым римановым пространством* (3.2), *где $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ — риманово $(n-1)$-мерное многообразие постоянной кривизны $\overset{*}{K}$, и $\sigma = \sigma(x^1) \neq \mathrm{const}$ — функция, не являющаяся решением дифференциального уравнения* (3.16) *или* (3.18).

(б) *По отношению к локальным координатам* (3.1) *ассоциированное векторное поле имеет компоненты (A_1, A_α), где $A_\alpha = 0$, а компонента A_1 определена формулой* (3.15).

(в) *функции ψ и β заданы формулами* (3.17) *и* (3.19).

Замечание 3.1. Если функция $\sigma(x^1)$ является решением дифференциального уравнения (3.18), а $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ является многообразием постоянной кривизны $\overset{*}{K}$, то (3.2) будет симметрическим пространством, т. е. $\nabla_r R_{lkji} = 0$.

Если $\sigma(x^1)$ — решение дифференциального уравнения (3.16), а $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ — многообразие постоянной кривизны $\overset{*}{K}$, то тензор кривизны пространства (3.2) удовлетворяет условию

$$\nabla_r R_{lkji} = B_r G_{lkji} + \frac{1}{2}(B_l G_{rkji} + B_k G_{lrji} + B_j G_{lkri} + B_i G_{lkjr},$$

где

$$B_r = \frac{1}{(n-1)(n+2)}\nabla_r R = -\sigma'\left(\frac{\sigma''}{2} + \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma}\right).$$

Замечание 3.2. Для того чтобы пространство (3.2) было конформно-плоским, необходимо и достаточно, чтобы $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ было римановым многообразием постоянной кривизны [17]. Поэтому *риманово многообразие, удовлетворяющее условию* (1.4), *где $A_r \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\psi \neq \mathrm{const}$, является конформно-плоским.*

4. Пример

Пусть $\sigma(x^1)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma''' - \frac{\sigma'}{e^\sigma}\overset{*}{K} = F\sigma'\Big(\frac{\sigma''}{2} + \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma}\Big), \tag{4.1}$$

где F $(F \neq 1)$ — функция. Тогда (3.15) и (3.19) принимают вид

$$A_1 = -\sigma'(1-F), \qquad \beta = \frac{\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{\sigma''}{2}}{1-F}. \tag{4.2}$$

С другой стороны, используя (3.7), (3.17), (4.1) и (4.2), можем переписать (3.8) в виде (3.6). Действительно, простые вычисления дают:

$$\begin{aligned}
&(2)\ \ \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_1[R_{\alpha\beta\gamma\delta} + (\beta-\psi)G_{\alpha\beta\gamma\delta}],\\
&(4)\ \ \nabla_1 R_{\alpha 11\beta} = \Big[-\sigma'\Big(\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{\sigma''}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{2}\sigma''' - \frac{\sigma'}{e^\sigma}\overset{*}{K}\Big)\Big]g_{\alpha\beta} =\\
&\qquad\qquad = A_1[R_{\alpha 11\beta} + (2\beta-\psi)G_{\alpha 11\beta}],\\
&(7)\ \ \nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma 1} = \frac{1}{2}A_1\beta G_{\alpha\beta\gamma\rho}.
\end{aligned}$$

Поэтому полуприводимое риманово пространство (3.2), где $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ — риманово $(n-1)$-мерное многообразие постоянной кривизны $\overset{*}{K}$, а $\sigma = \sigma(x^1)$ — решение дифференциального уравнения (4.1), удовлетворяет условию (1.4), где $A_1 = -\sigma'(1-F)$, $A_\alpha = 0$, функция β задана формулой (4.2), функция ψ — формулой (3.17).

В частности, если $F = 0$, то (4.1) и (4.2) приводятся к виду

$$\frac{\sigma''}{2} + \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} = c, \quad c = \mathrm{const} \qquad \text{и} \qquad A_1 = -\sigma', \quad \beta = c$$

соответственно.

Если $F = -1$, то (4.1) принимает вид

$$\sigma''' = -\sigma'\sigma''. \tag{4.3}$$

Интегрируя, получаем $2\sigma'' + (\sigma')^2 = c$, $c = \mathrm{const}$. Следовательно,

$$A_1 = -2\sigma', \quad \beta = \frac{1}{2}\Big(\frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{\sigma''}{2}\Big), \quad \psi = \frac{\overset{*}{K}}{e^\sigma} + \frac{\sigma''}{2} - \frac{c}{4}. \tag{4.4}$$

Замечание 4.1. В силу (3.3) имеем

$$e^\sigma \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{(\sigma')^2}{4}G_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Поэтому равенства (3.4) примут вид

$$\begin{aligned}
(1),\ (4)\ \ &\nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma\delta} = e^\sigma \overset{*}{\nabla}_\rho \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \nabla_1 R_{\alpha 11\beta} = -\frac{1}{2}(\sigma''' + \sigma'\sigma'')g_{\alpha\beta},\\
(2)\ \ &\nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\sigma'\Big\{R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4}\Big[2\sigma'' + (\sigma')^2\Big]G_{\alpha\beta\gamma\delta}\Big\},\\
(7)\ \ &\nabla_\rho R_{\alpha\beta\gamma 1} = -\frac{1}{2}\sigma'\{R_{\alpha\beta\gamma\rho} + \tfrac{1}{4}[2\sigma'' + (\sigma')^2]G_{\alpha\beta\gamma\rho}\},\\
(3),\ (5),\ (6),\ (8)\ \ &\nabla_\gamma R_{\alpha 11\beta} = \nabla_1 R_{111\delta} = \nabla_\beta R_{111\delta} = \nabla_1 R_{\alpha\beta\gamma 1} = 0.
\end{aligned}$$

Если риманово многообразие $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ удовлетворяет условию $\overset{*}{\nabla}_\rho \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ и функция $\sigma(x^1)$ является решением дифференциального уравнения (4.3), то

$$R_{\alpha 11\beta} = -\frac{c}{4} g_{\alpha\beta}, \quad c = \mathrm{const}, \quad \nabla_1 R_{\alpha 11\beta} = 0,$$

и пространство (3.2) удовлетворяет условию

$$\nabla_r R_{lkji} = D_r\left(R_{lkji} + \frac{c}{4}G_{lkji}\right) + \frac{1}{2}D_l\left(R_{rkji} + \frac{c}{4}G_{rkji}\right) + \\ + \frac{1}{2}D_k\left(R_{lrji} + \frac{c}{4}G_{lrji}\right) + \frac{1}{2}D_j\left(R_{lkri} + \frac{c}{4}G_{lkri}\right) + \frac{1}{2}D_i\left(R_{lkjr} + \frac{c}{4}G_{lkjr}\right), \quad (4.5)$$

где $D_1 = -\sigma$, $D_\alpha = 0$. Поэтому полуприводимое риманово пространство (3.2), где $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ — риманово $(n-1)$-мерное многообразие постоянной кривизны и $\sigma = \sigma(x^1)$ — решение дифференциального уравнения (4.3), удовлетворят условию (1.4), в котором функции A_1, β и ψ заданы формулами (4.4), а $A_\alpha = 0$; оно удовлетворяет также условию (4.5).

Литература

1. Ruse H.S. *On simply harmonic spaces* // J. London Math. Soc. – 1946. – V. 21. – P. 243–247.
2. Ruse H.S., Walker A.G., Willmore T.J. *Harmonic spaces.* – Edizione Cremonese, Roma, 1961.
3. Lichnerowicz A. *Courbure, nombre de Betti es espaces symmetriques* // Proc. Int. Congr. Math. – 1952. – V. 2. – P. 216–233.
4. Кайгородов В.Р. *О кривизне s-рекуррентных и квазисимметрических римановых многообразий* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 212. – № 4. – С. 796–799.
5. Кайгородов В.Р. *Римановы пространства* $\overset{*}{D}{}^s_n$. *Структура кривизны пространства типа А* // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 117–127.
6. Кайгородов В.Р. *Структура кривизны* $\overset{*}{D}{}^s_n$*-пространств типа В* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 1. – С. 104–107.
7. Кайгородов В.Р. *Структура кривизны пространства-времени* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – 1989. – Т. 14. – С. 177–204.
8. Chaki M.C. *On pseudosymmetric manifolds* // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1987. – Sec. Ia. – V. 33. – № 1. – P. 53–58.
9. Chaki M.C., De U.C. *On pseudosymmetric spaces* // Acta math. – 1989. – V. 54. – P. 185–190.
10. Ewert-Krzemieniewski S. *On some generalization of recurrent manifolds* // Math. Pannonica. – 1993. – V. 4. – № 2. – P. 191–203.
11. Prvanović M. *Generalized recurrent Riemannian manifold* // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1992. – V. 38. – P. 423–434.
12. Prvanović M. *On weakly symmetric Riemannian manifold* // Publ. Math. Debrecen. – 1995. – V. 46. – № 1–2. – P. 19–25.
13. Прванович М. *О вполне омбилических подмногообразиях, погруженных в слабо симметрическое риманово многообразие* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 6. – С. 54–65.
14. Yano K. *On the torse forming directions in Riemannian spaces* // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1944. – V. 20. – P. 340–345.
15. Schouten J.A. *Ricci calculus.* – Berlin–G.–H.: Springer Verlag, 1954. – 516 s.
16. Gębarowski W. *Nearly conformally symmetric warped product manifolds* // Bull. of the Institute of Mathematics Academia Sinica. – 1992. – V. 20. – № 4. – P. 359–377.
17. Deprez J., Deszcz R., Verztraelen L. *Examples of pseudosymmetric conformally flat warped products* // Chinese J. Math. – 1989. – V. 17. - № 1. – P. 51–65.

Белградский университет
(*Югославия*)

Поступила
18.09.1996