ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 517.958 : 539.3

Н.Г.ГУРЬЯНОВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ОСЕСИММЕТРИЧНУЮ ДЕФОРМАЦИЮ ОРТОТРОПНОГО ПОЛОГОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

Строится точное решение уравнений типа Тимошенко для ортотропного сферического сегмента, находящегося под действием равномерно распределенной по параллели $\alpha = \alpha_0$ и направленной по нормали к срединной поверхности оболочки нагрузки с главным вектором $\mathbf{P}$. При этом используется математическая аналогия с решением аналогичной задачи в теории Кирхгофа–Лява [1].

Система уравнений равновесия в усилиях и моментах имеет вид ([2], с. 68)

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}(\alpha T_\alpha) - \frac{1}{\alpha}T_\beta = 0, \quad \frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}(\alpha M_\alpha) - \frac{1}{\alpha}M_\beta - RN_\alpha = 0, \quad \frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}(\alpha N_\alpha) - (T_\alpha + T_\beta) + RZ = 0. \tag{1}$$

Вводя функцию усилий φ так, чтобы

$$T_\alpha = \frac{1}{R^2\alpha}\frac{d\varphi}{d\alpha}, \quad T_\beta = \frac{1}{R^2}\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}, \tag{2}$$

и используя соотношения для моментов, и перерезывающей силы ([2], сс. 35, 38)

$$M_\alpha = \frac{D_\alpha}{R^2}\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{v_\beta}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\right)(\Phi - w), \quad M_\beta = \frac{D_\beta}{R^2}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha} + v_\alpha\frac{d^2}{d\alpha^2}\right)(\Phi - w), \quad N_\alpha = \frac{c^2}{R}\frac{d\Phi}{d\alpha}, \tag{3}$$

а также уравнения совместности деформаций, приходим к системе разрешающих уравнений

$$D_\alpha L(\Phi - w) - R\nabla^2\varphi + R^4 Z = 0, \quad L(\varphi) - RHE_\beta\nabla^2 w = 0, \quad \nabla^2\left(\Phi - \frac{1}{c^2R}\varphi\right) + \frac{R^2Z}{c^2} = 0. \tag{4}$$

Здесь R, H — радиус сферы и толщина сегмента; Z — интенсивность равномерно распределенной по параллели $\alpha = \alpha_0$ поперечной нагрузки с главным вектором $\mathbf{P}$; E_α, E_β — модули упругости материала в направлении меридиана и параллели; v_α, v_β — коэффициенты Пуассона, G — модуль поперечного сдвига, w — прогиб оболочки, Φ — потенциальная часть функции поперечного сдвига (вихревая компонента при осесимметричной деформации равна нулю),

$$\begin{gathered} L \equiv \frac{d^4}{d\alpha^4} + \frac{2}{\alpha}\frac{d^3}{d\alpha^3} - \frac{q^2}{\alpha^2}\frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3}\frac{d}{d\alpha}, \quad \nabla^2 \equiv \frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}, \\ q^2 = \frac{E_\beta}{E_\alpha}, \quad v_\beta = v_\alpha q^2, \quad D_\alpha = \frac{E_\alpha H^3}{12(1 - v_\alpha v_\beta)}, \quad D_\beta = D_\alpha q^2, \quad c^2 = \frac{5}{6}GH. \end{gathered} \tag{5}$$

Основным утверждением статьи является

Теорема. *Система уравнений* (4) *эквивалентна системе двух уравнений*

$$L(\Omega) - f^2 e^{2i\psi}\nabla^2\Omega - \frac{R^4Z}{D_\alpha}e^{4i\psi} = 0, \quad \nabla^2\Psi + \frac{R^2Z}{c^2} = 0, \tag{6}$$

где $\Omega = \Phi - w - r^2 e^{2i\psi}\varphi$, $\Psi = \Phi - \frac{1}{c^2 R}\varphi$,

$$r^2 = \frac{f^2}{E_\beta H R}, \quad \cos(2\psi) = \frac{3E_\beta}{5Gf^2}, \quad f^2 = \frac{qR}{H}\sqrt{12(1 - v_\alpha v_\beta)}. \tag{7}$$

Общее решение системы (6), *а следовательно, и* (4) *зависит от восьми вещественных произвольных постоянных.*

Доказательство. Умножаем первое уравнение системы (4) на $1/D_\alpha$, второе уравнение — на M, третье — на N и суммируем их. Тогда

$$L[\Phi - w + M\varphi] + N\nabla^2\left[\Phi - \frac{E_\beta RHM}{N}w - \left(\frac{1}{c^2 R} + \frac{R}{D_\alpha N}\right)\varphi\right] + \frac{R^4 Z}{D_\alpha}\left(1 + \frac{D_\alpha N}{c^2 R^2}\right) = 0. \tag{8}$$

Приравнивая коэффициенты при w и φ, получаем $N = E_\beta RHM$, а для M — квадратное уравнение $M^2 + \frac{1}{c^2 R}M + \frac{1}{D_\alpha E_\beta H} = 0$. Его дискриминант отрицателен, когда $\frac{4c^2R^2}{D_\alpha E_\beta H} = \frac{100}{3}\frac{G^2R^2(1-v_\alpha v_\beta)}{E_\alpha E_\beta H^2} > 1$, что справедливо для достаточно тонких оболочек и большинства существующих ныне анизотропных материалов. Следовательно, корни квадратного уравнения комплексные. Пусть $M = -r^2 e^{2i\psi}$, тогда $N = -f^2 e^{2i\psi}$.

В итоге уравнение (8) принимает вид

$$L[\Omega] - f^2 e^{2i\psi}\nabla^2\Omega - \frac{R^4 Z}{D_\alpha}e^{4i\psi} = 0.$$

Добавляя к нему третье уравнение из (4), получаем систему уравнений (6).

Докажем, что функции, являющиеся решением системы уравнений (6), обращают в тождества уравнения системы (4). Пусть $\Omega^* = \Phi^* - w^* - r^2 e^{2i\psi}\varphi^*$, $\Psi^* = \Phi^* - \frac{1}{c^2 R}\varphi^*$ являются решением системы уравнений (6). После подстановки в уравнения этих функций и выделения действительной и мнимой частей в первом уравнении получаем три тождества:

$$L[\Phi^* - w^* - r^2\varphi^*\cos(2\psi)] - \nabla^2[(\Phi^* - w^*)f^2\cos(2\psi) - f^2r^2\varphi^*\cos(4\psi)] - \frac{R^4 Z}{D_\alpha}\cos(4\psi) \equiv 0, \tag{9}$$

$$-L[\varphi^*]r^2\sin(2\psi) - \nabla^2[(\Phi^* - w^*)f^2\sin(2\psi) - f^2r^2\varphi^*\sin(4\psi)] - \frac{R^4 Z}{D_\alpha}\sin(4\psi) \equiv 0,$$

$$\nabla^2\left(\Phi^* - \frac{1}{c^2 R}\varphi^*\right) + \frac{R^2 Z}{c^2} \equiv 0.$$

Функции Φ^*, φ^* превращают в тождество третье уравнение системы (4), что следует из (9). Исключаем с помощью третьего тождества $\nabla^2\Phi^*$ из второго. Тогда

$$- L(\varphi^*)r^2\sin(2\psi) + f^2r^2\sin(4\psi)\left[2\cos(2\psi) - \frac{1}{r^2c^2R}\right]\nabla^2(\varphi^*) +$$
$$+ \nabla^2(w^*)f^2\sin(2\psi) - \frac{R^4 Z}{D_\alpha}\sin(2\psi)\left[2\cos(2\psi) - \frac{D_\alpha f^2}{r^2c^2}\right] \equiv 0.$$

Из соотношений (5) и (7) следует $\frac{1}{r^2c^2R} = \frac{D_\alpha f_2}{r^2c^2} = 2\cos(2\psi)$, $\frac{f^2}{r^2} = E_\beta RH$, и тождество принимает вид $L(\varphi^*) - RHE_\beta\nabla^2 w^* \equiv 0$. Это означает, что второе уравнение системы (4) также выполняется. Теперь исключим $\nabla^2\Phi^*$ из первого соотношения (9). В результате

$$L(\Phi^* - w^*) - r^2\cos(2\psi)[L(\varphi^*) - E_\beta RH\nabla^2 w^*] +$$
$$+ f^2r^2\left[\cos(4\psi) - \frac{1}{r^2c^2R}\cos(2\psi)\right]\nabla^2\varphi^* - \frac{R^4 Z}{D_\alpha}\left[\cos(4\psi) - \frac{D_\alpha f^2}{R^2c^2}\cos(2\psi)\right] \equiv 0.$$

Поскольку $\cos(4\psi)-\frac{1}{r^2c^2R}\cos(2\psi)=\cos(4\psi)-\frac{D_\alpha^2}{R^2c^2}\cos(2\psi)=-1$, что следует из вышеприведенных формул, $f^2r^2=\frac{R}{D_\alpha}$, а выражение в первых квадратных скобках тождественно равно нулю, то

$$D_\alpha L(\Phi^*-w^*)-R\nabla^2\varphi^*+R^4Z\equiv 0,$$

т. е. функции Φ^*, w^*, φ^* являются решением системы (4). Эквивалентность систем (4) и (6) доказана.

Переходим к решению системы уравнений (6). Первое уравнение только коэффициентами отличается от аналогичного уравнения работы [1], что позволяет представить его в виде

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\alpha^2\frac{d^2F}{d\alpha^2}+\alpha\frac{dF}{d\alpha}-(q^2+f^2\alpha^2e^{2i\psi})F\right]\right\}=\frac{R^4(\alpha Z)}{D_\alpha}e^{4i\psi},$$

$$F=\frac{d\Omega}{d\alpha}. \tag{10}$$

Так как линейно независимыми частными решениями однородного уравнения (10) являются функции Бесселя $J_q(b\alpha$, $Y_q(b\alpha)$ и Ломмеля $s_{0,q}(b\alpha)$ [3], причем

$$b=fe^{i(\psi+\pi/2)}, \tag{11}$$

то общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\widetilde{F}=\widetilde{C}_1J_q(b\alpha)+\widetilde{C}_2Y_q(b\alpha)+\widetilde{C}_3s_{0,q}(b\alpha), \tag{12}$$

где $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{C}_3$ — комплексные постоянные.

Частное решение уравнения (10) ищем для вышеуказанной нагрузки, которую представим с помощью дельта-функции Дирака

$$Z=\frac{P}{2\pi R^2\alpha_0}\delta(\alpha-\alpha_0), \tag{13}$$

где P — величина вектора $\mathbf{P}$. Понижаем порядок уравнения (10), учитывая при этом соотношение (13) и $\alpha\delta(\alpha-\alpha_0)=\alpha_0\delta(\alpha-\alpha_0)$, $\int\delta(\alpha-\alpha_0)d\alpha=H(\alpha-\alpha_0)$, где $H(\alpha-\alpha_0)$ — единичная функция Хевисайда. Тогда

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{dF}{d\alpha}-\left(\frac{q^2}{\alpha^2}+f^2e^{2i\psi}\right)F=\frac{PR^3}{2\pi D_\alpha\alpha}e^{4i\psi}H(\alpha-\alpha_0). \tag{14}$$

Представим выражение $\frac{1}{\alpha}H(\alpha-\alpha_0)$ рядом Фурье–Бесселя [3]

$$\frac{1}{\alpha}H(\alpha-\alpha_0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_q(\lambda_n\alpha), \tag{15}$$

причем λ_n является n-м положительным корнем функции Бесселя $J_q(z)$,

$$a_n=\frac{2}{J_{q+1}^2(\lambda_n)}\int_{\alpha_0}^{1}J_q(\lambda_n\alpha)d\alpha.$$

Частное решение уравнения (14), а следовательно, и (10) ищем в виде ряда

$$\overline{F}=\sum_{n=1}^{\infty}F_nJ_q(\lambda_n\alpha).$$

Из уравнения (14) с учетом разложения (15) определяем

$$F_n=-\frac{PR^3}{2\pi D_\alpha}e^{4i\psi}\frac{a_n}{\lambda_n^2+f^2e^{2i\psi}},\quad \text{или}\quad F_n=-\frac{PR^3}{2\pi D_\alpha}\omega_na_n,$$

$$\omega_n=\frac{[\lambda_n^2\cos4\psi+f^2\cos2\psi]+i[\lambda_n^2\sin4\psi+f^2\sin2\psi]}{(\lambda_n^4+2f^2\lambda_n^2\cos2\psi+f^4)}.$$

Очевидно,

$$\overline{F} = -\frac{PR^3}{2\pi D_\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n a_n J_q(\lambda_n\alpha). \tag{16}$$

Поскольку $|\omega_n| < \frac{M}{\lambda_n^2} < \frac{M}{n^2}$, т.к. значение корня функции Бесселя меньше его номера, то из сходимости ряда (15) по признаку Абеля будет следовать равномерная сходимость в области $0 < \alpha < 1$ ряда (16).

Общее решение неоднородного уравнения (10) есть сумма соотношений (12) и (16). Чтобы получить Ω, необходимо вычислить интеграл этой суммы. Решение однородного уравнения, соответствующего второму уравнению системы (6), имеет вид

$$\widetilde{\Psi} = C_4 + C_5\ln\alpha. \tag{17}$$

Для получения решения неоднородного уравнения представим его в виде

$$\frac{d\overline{\Psi}}{d\alpha} = -\frac{PR}{2\pi c^2}\frac{1}{\alpha}H(\alpha - \alpha_0).$$

Воспользовавшись приведенным выше разложением (15), интегрируем полученное уравнение и добавляем к нему выражение (17), в итоге

$$\Psi = \Phi - \frac{1}{c^2R}\varphi = C_5 + C_6\ln\alpha - \frac{PR}{2\pi c^2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int J_q(\lambda_n\alpha)d\alpha.$$

Итак, общее решение системы (6), а следовательно, и системы (4) построено. Оно зависит от трех комплексных $\widetilde{C}_1 = C_1 + iC_1'$, $\widetilde{C}_2 = C_2 + iC_2'$, $\widetilde{C}_3 = C_3 + iC_3'$ и двух вещественных C_4, C_5 произвольных постоянных, другими словами — от восьми действительных параметров. $\square$

Известно, что решение исходной системы уравнений (1)–(3) должно содержать шесть постоянных интегрирования. Чтобы устранить это несоответствие, подставим полученное решение в эти уравнения. Обнаруживаем, что константа C_4 не присутствует в выражениях для компонент напряженно деформированного состояния, поскольку функции Φ, φ входят только в виде производных, а $C_5 = -\frac{2}{f}(C_3\cos\psi + C_3'\sin\psi)\operatorname{ctg}(2\psi)$. Задача решена.

Литература

1. Гурьянов Н.Г. *Пологий ортотропный сферический сегмент под действием осесимметричной локальной нагрузки* // Тр. XVII Международн. конф. по теории оболочек и пластин. – Саратов, 1997. – Т. 3. – С. 65–70.
2. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек.* – М.: Наука, 1974. – 446 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции, функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.* – Т. 2. – 2-е изд. – М.: Наука, 1974. – 295 с.

Казанский государственный университет

Поступила 31.01.1997