ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 517.546

Л.Л. ГРОМОВА, Н.В. КИРЕЕВА

ОБ ОЦЕНКЕ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА В КЛАССЕ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

Обозначим через S^* класс звездообразных функций $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, регулярных и однолистных в круге $E = \{z \in C : |z| < 1\}$, отображающих E на звездообразную относительно $w = 0$ область. В [1] изучалась область B_z значений системы функционалов $\left\{ \ln\left|\frac{f(z)}{z}\right|, \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\right\}$ в классе S^* при фиксированном z, $0 < |z| < 1$. С помощью этих результатов в данной статье улучшается верхняя граница функционала $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$ в классе S^*, зависящая от $\ln\left|\frac{f(z)}{z}\right|$, полученная другим методом Сингхом в 1991 г. ([2], теорема 2, неравенство (27)).

Так как B_z на зависит от $\arg z$, то в дальнейшем полагаем $z = r$, $0 < r < 1$, и рассматриваем область B_r.

Используем известное (см., напр., [3], с. 507) интегральное представление функций класса S^* с помощью интеграла Стильтьеса $f(z) = z\exp\Big[-2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln(1 - ze^{it})d\mu(t)\Big]$, где $\mu(t)$ — неубывающая вещественная функция, $-\pi \le t \le \pi$, $\mu(-\pi) = 0$, $\mu(\pi) = 1$. Определим

$$I_1(f) = \ln\left|\frac{f(r)}{r}\right| = -\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1 - 2r\cos t + r^2)d\mu(t), \quad I_2(f) = \left|\frac{rf'(r)}{f(r)}\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1 + e^{it}r}{1 - e^{it}r}d\mu(t)\right|.$$

Для изучения верхней границы области значений B_r функционала $I(f) = I_1(f) + iI_2(f)$ в [1] ставилась вспомогательная задача нахождения в классе S^* области значений B_r^+ функционала $I^+(f) = I_1(f) + iI_2^+(f)$, где $I_2^+(f) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1+e^{it}r}{1-e^{it}r}\right|d\mu(t)$, $\mu(t)$ — неубывающая вещественная функция, $-\pi \le t \le \pi$, $\mu(-\pi) = 0$, $\mu(\pi) = 1$. Очевидно, $I_2(f) \le I_2^+(f)$. Легко видеть, что $I_2^+(f) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g^+(r,t)d\mu(t)$, где

$$g^+(r,t) = -\ln(1 - 2r\cos t + r^2) + i\sqrt{\frac{1 + 2r\cos t + r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}}. \tag{1}$$

Известно [4], что область значений функционала $I^+(f)$ есть выпуклая оболочка кривой Γ, заданной уравнением $\xi = g^+(r,t)$, $-\pi \le t \le \pi$. В нашем случае эта кривая имеет точку перегиба. Следовательно, область B_r^+, а с ней и B_r, ограничена сверху частью кривой Γ (обозначим эту часть через $\Gamma_1 : \xi = g^+(r,t)$, $\alpha \le t \le \pi$, $0 < \alpha < \pi$) и отрезком касательной к Γ, проведенной из точки $M\Big(-\ln(1-r)^2, \frac{1+r}{1-r}\Big)$. Итак, верхняя граница области B_r^+ состоит из выпуклой кверху кривой Γ_1 и отрезка прямой MM_0, где M_0 — точка касания.

Из (1) имеем параметрическое уравнение кривой Γ:

$$u = -\ln(1 - 2r\cos t + r^2), \quad v = \sqrt{\frac{2(1 + r^2) - (1 + r^2 - 2r\cos t)}{1 - 2r\cos t + r^2}}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Отсюда $v = \sqrt{2(1+r^2)e^u - 1}$, $-2\ln(1+r) \le u \le -2\ln(1-r)$. Воспользовавшись уравнением касательной, получаем, что u_0 (абсцисса точки M_0) удовлетворяет уравнению

$$\frac{1+r}{1-r} - \sqrt{2(1+r^2)e^{u_0} - 1} = \frac{(1+r^2)e^{u_0}}{\sqrt{2(1+r^2)e^{u_0}-1}}\Big(\ln\frac{1}{(1-r)^2} - u_0\Big). \tag{2}$$

Проводя обычные исследования, проверяем, что в интервале $\Big(\ln\frac{1}{(1+r)^2}, \ln\frac{1}{1+r^2}\Big)$ уравнение имеет единственный корень. Здесь $u^* = -\ln(1+r^2)$ — абсцисса точки перегиба кривой Г. Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Для любой функции $f(z) \in S^*$, $|z| = r$, $0 < r < 1$, имеют место неравенства*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \sqrt{2(1+r^2)\ln\left|\frac{f(r)}{r}\right| - 1} \tag{3}$$

при $\ln\frac{1}{(1+r)^2} \le \ln\left|\frac{f(r)}{r}\right| \le u_0$,

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le A + B\Big(\ln\left|\frac{f(r)}{r}\right| - u_0\Big), \tag{4}$$

где $A = \sqrt{2(1+r^2)e^{u_0} - 1}$, $B = \frac{(1+r^2)e^{u_0}}{\sqrt{2(1+r^2)e^{u_0}-1}}$ *при* $u_0 < \ln\left|\frac{f(r)}{r}\right| \le \ln\frac{1}{(1-r)^2}$, u_0 *— корень уравнения* (2).

Неравенство (3) является точным, т.к. для функции $f(z) = \frac{z}{(1-e^{it}z)^2}$ на кривой Γ_1 ($-2\ln(1+r) \le u \le u_0$) будет $I_2(f) = I_2^+(f)$ и $\Gamma_1 \subset B_r$.

Сингх [2] приводит оценку

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|^2 \le 2(1+r^2)\rho^2(r) - 1, \tag{5}$$

где $\rho(r) = \frac{1}{1+r} + \frac{r\ln\left[\frac{(1+r)^2}{r}|f(r)|\right]}{(1-r^2)\ln\frac{1+r}{1-r}}$. Сравнивая неравенства (3) и (5), непосредственным вычислением убеждаемся, что $\rho(r) > \sqrt{\frac{|f(r)|}{r}}$. Для сравнения неравенств (4) и (5) сначала придадим неравенству (5) более удобную форму, обозначая

$$a = \frac{\sqrt{2(1+r^2)}}{1+r}\Big(1 + \frac{r\ln(1+r)^2}{(1-r)\ln\frac{1+r}{1-r}}\Big), \quad b = \frac{r\sqrt{2(1+r^2)}}{(1-r^2)\ln\frac{1+r}{1-r}}.$$

Тогда из (5) следует, что функция $v = \sqrt{2(1+r^2)\rho^2(r) - 1}$ имеет вид $v(u) = \sqrt{(a+bu)^2 - 1}$, где $u = \ln\left|\frac{f(r)}{r}\right|$. Графиком этой функции является часть гиперболы с вершиной в точке $-\frac{a+1}{b}$, причем $-\frac{a+1}{b} < -\ln(1+r)^2$, лежащая в верхней полуплоскости и проходящая через точки $N\Big(-\ln(1+r)^2, \frac{1-r}{1+r}\Big)$ и $M\Big(-\ln(1-r)^2, \frac{1+r}{1-r}\Big)$. Так как в силу выпуклости кверху эта кривая лежит выше отрезка касательной, то оценки (3)–(4) улучшают оценку (5) на всем промежутке $[-\ln(1+r)^2, -\ln(1-r)^2]$.

Литература

1. Громова Л.Л., Лебедев Н.А. *Об области значений системы функционалов* ($|f(z)|$, $|f'(z)|$) *в классе звездообразных функций* // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр. – 1985, вып. 22. – С. 94–96.
2. Singh V. *Some inequalities for starlike and spirallike functions.* – World Sci. Publishing, River Edge, 1991. – № 7. – P. 125–135.

3. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
4. Ашневиц И.Я., Улина Г.В. *Об областях значений аналитических функций, представимых интегралом Стильтъеса* // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр. – 1955, вып. 11. – С. 31–42.

Саратовский государственный педагогический институт

Поступила 13.12.1996