И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 629.78

Ю.В. КОЖЕВНИКОВ

АДАПТИВНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Поставлена задача адаптивной аппроксимации функции из L_2. Предложен метод последовательных приближений решения задачи. Доказаны теоремы о достаточных условиях сходимости последовательных приближений к искомому решению.

1. Постановка задачи

Полиномиальная аппроксимация функций имеет целью создание дополнительных возможностей их приближенного аналитического исследования и практической реализации. Это достигается за счет применения в качестве координатных функций аппроксимаций хорошо исследованных выражений, а также числовых параметров — коэффициентов полиномов ([1], гл. 3, § 7, с. 42). При этом предполагается, что вычислимость параметров гарантирует их физическую реализуемость.

Между тем, последнее не всегда имеет место. В частности, в целом ряде случаев искомые оптимальные значения параметров аппроксимаций практически могут быть получены лишь последовательными уточнениями (коррекциями) их некоторых начальных состояний с использованием последовательно накапливаемой измерительной информации об аппроксимирующих функциях. Такого рода ситуации относятся к числу достаточно распространенных и не требуют специального исследования ([2], с. 135).

В связи с этим рассмотрим задачу об оптимальной аппроксимации вещественной функции $x^*(t) \in L_2$ на интервале T значений вещественного аргумента t в классе аппроксимирующих функций вида

$$x(t) = U^T u + V^T v + W^T w + \theta^T \vartheta \quad (t \in T). \tag{1.1}$$

Здесь $U^T = \|U^1(t), \dots, U^n(t)\|$, $V^T = \|V^1(t), \dots, V^m(t)\|$, $W^t = \|W^1(t), \dots, W^r(t)\|$, $\theta^T = \|\theta^1(t), \dots, \theta^q(t)\|$ — матрицы-строки координатных функций из L_2; $u = \|u^1, \dots, u^n\|^T$, $v = \|v^1, \dots, v^m\|^T$, $w = \|w^1, \dots, w^r\|^T$, $\vartheta = \|\vartheta^1, \dots, \vartheta^q\|^T$ — матрицы-столбцы параметров аппроксимации; T — знак транспонирования матрицы.

Аппроксимацию

$$x_f(t) = U^T u_f + V^T v_f + W^T w_f + \theta^T \vartheta, \tag{1.2}$$

параметры которой $u_f = \|u_f^1, \dots, u_f^n\|^T$, $v_f = \|v_f^1, \dots, v_f^m\|^T$ доставляют минимум функции

$$Y = \int_T [x(t) - x^*(t)]^2 dt \tag{1.3}$$

по переменным u, v при условии $w = w_f = \|w_f^1, \dots, w_f^r\|^T$, где w_f — заданная матрица, будем называть оптимальной.

Очевидно, что u_f и v_f должны определяться из уравнений ([1], гл. 3, § 7, с. 43)

$$\begin{aligned} (U, U^T)u_f + (U, V^T)v_f &= (x^*, U) - (U, W^T)w_f - (U, \theta^T)\vartheta, \\ (V, U^T)u_f + (V, V^T)v_f &= (x^*, V) - (V, W^T)w_f - (V, \theta^T)\vartheta. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь круглые скобки — выражения вида

$$(U, V^T) = \int_T U V^T dt,$$

и предполагается выполненным условие

$$\begin{vmatrix} (U, U^T) & (U, V^T) \\ (V, U^T) & (V, V^T) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.5}$$

Известно, что обычная задача оптимальной аппроксимации функций в классе (1.1) сводится к решению уравнений вида (1.4) относительно u_f, v_f. Однако учет условий физической реализуемости аппроксимаций и их параметров существенно меняют дело.

Будем считать, что построение оптимальной аппроксимации (1.2) с ее параметрами должно проводиться с соблюдением следующих условий физической реализуемости $x(t)$ и ее параметров.

1. Оптимальная аппроксимация $x_f(t)$ может быть получена только переходом от некоторого начального состояния

$$x_0(t) = U^T u_0 + V^T v_0 + W^T w_0 + \theta^T \vartheta \quad (t \in T) \tag{1.6}$$

аппроксимации $x(t)$ за счет последовательных изменений (коррекций) параметров u_0, v_0, w_0 на некоторые известные величины δu_k, δv_k, δw_k $(k = 0, 1, \dots)$. Здесь $u_0 = \|u_0^1, \dots, u_0^n\|^T$, $v_0 = \|v_0^1, \dots, v_0^m\|^T$, $w_0 = \|w_0^1, \dots, w_0^r\|^T$ — начальные состояния параметров u, v, w; $\delta u_k = \|\delta u_k^1, \dots, \delta u_k^n\|^T$, $\delta v_k = \|\delta v_k^1, \dots, \delta v_k^m\|^T$, $\delta w_k = \|\delta w_k^1, \dots, \delta w_k^r\|^T$ — $k+1$-я $(k = 0, 1, \dots)$ коррекция параметров u_0, v_0, w_0; ϑ — неизвестный неизменяемый параметр.

2. Аппроксимация $x(t)$ после $k+1$-й коррекции может быть представлена в виде

$$x_{k+1}(t) = U^T u_{k+1} + V^T v_{k+1} + W^T w_{k+1} + \theta^T \vartheta \quad (t \in T; \;\; k = 0, 1, \dots), \tag{1.7}$$

где

$$u_{k+1} = u_0 + \delta u_k, \quad v_{k+1} = v_0 + \delta v_k, \quad w_{k+1} = w_0 + \delta w_k \;\; (k = 0, 1, \dots). \tag{1.8}$$

3. Любая аппроксимация $x_k(t)$ $(k = 0, 1, \dots)$ может быть реализована в виде случайного процесса

$$X_k(t) = x_k(t) + Y_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots), \tag{1.9}$$

где $Y_k(t)$ — случайная ошибка реализации, $x_k(t)$ — гильбертовский случайный процесс с характеристиками

$$M(Y_k(t)) = 0, \quad M[Y_k(t) \cdot Y_k(t')] = K_y(t, t'). \tag{1.10}$$

Здесь M — операция математического ожидания; $K_y(t, t')$ — интегрируемая на $T \times T$ автокорреляционная функция процесса $Y_k(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered} \forall \gamma(t) \in L_2 \; : \; \iint\limits_{TT} \gamma(t) \gamma(t') K_y(t, t') dt\, dt' > 0; \\ K_y(t, t') = K_y(t', t). \end{gathered} \tag{1.11}$$

4. Любая реализация измерения случайного процесса $X_k(t)$ может быть получена в виде реализации случайного процесса

$$Z_k(t) = X_k(t) + \Delta_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{1.12}$$

Здесь $\Delta_k(t)$ — случайная ошибка измерений процесса, $X_k(t)$ — гильбертовский случайный процесс с характеристиками

$$M[\Delta_k(t)] = 0, \quad M[\Delta_k(t) \cdot \Delta_k(t')] = K_\delta(t, t'), \tag{1.13}$$

где $K_\delta(t,t')$ — интегрируемая на $T\times T$ автокорреляционная функция процесса $\Delta_k(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered} M[\Delta_k(t)Z_j(t')] = 0 \quad (t,t' \in T;\;\; k,j=0,1,\dots); \\ \forall\gamma(t)\in L_2 \,:\, \iint\limits_{TT} \gamma(t)\gamma(t')K_\delta(t,t')dt\,dt' > 0; \\ K_\delta(t,t') = K_\delta(t',t). \end{gathered} \tag{1.14}$$

5. Коррекция параметров, реализации и измерение аппроксимаций могут осуществляться как при известных, так и неизвестных состояниях параметров u_0, v_0, w_0, ϑ. Здесь дополнительно будем предполагать, что u_0 и w_f — известные матрицы, а матрицы v_0, w_0, ϑ неизвестны.

В связи с этим подчеркнем специфику параметров u, v, w, ϑ, связанную со спецификой прикладных задач:

u — параметр, который подлежит преобразованию от известного начального u_0 к неизвестному оптимальному состоянию u_f (программный параметр);

v — параметр, который подлежит преобразованию от неизвестного начального v_0, к неизвестному оптимальному состоянию v_f;

w — параметр, который должен быть преобразован от неизвестного начального w_0 к заданному конечному состоянию w_f;

ϑ — неизвестный неизменяемый параметр (мешающий параметр).

Теперь видно, что в отличие от обычной задачи оптимальной аппроксимации условие (1.4) в нашем случае необходимо, но не достаточно для фактического построения параметров u_f, v_f, w_f и функции $x_f(t)$. Действительно, во-первых, в рассматриваемом случае правые части уравнений (1.4) содержат неизвестный параметр ϑ; во-вторых, даже если в частных случаях из этих уравнений найдется параметр v_f, его нельзя будет реализовать практически методом коррекций исходного состояния v_0, т. к. искомое физически реализуемое уточнение $\delta v_f = v_f - v_0$, где по условию v_0 неизвестен, останется неизвестной величиной.

Аналогично обстоит дело с преобразованием неизвестного параметра w_0 в заданное состояние w_f.

В связи с этим, учитывая сформулированные условия физической реализуемости, будем решать задачу методом последовательных приближений, цикл которого состоит в следующем.

1. Реализация аппроксимации $x_k(t)$ k-го приближения на T в виде $X_k(t)$ с результатами измерения процесса $X_k(t)$ в виде $Z_k(t)$ $(k=0,1,\dots)$.

2. Определение с использованием $Z_0(t),\dots,Z_k(t)$ подходящих коррекций δu_k, δv_k, δw_k параметров u_0, v_0, w_0 $(k=0,1,\dots)$.

3. Реализация параметров u_{k+1}, v_{k+1}, w_{k+1} следующего приближения в соответствии с формулами (1.8).

Ясно, что предлагаемый метод последовательных приближений будет приемлемым, если коррекции δu_k, δv_k, δw_k $(k=0,1,\dots)$ будут формироваться таким образом, чтобы была обеспечена сходимость в каком-то практически приемлемом смысле последовательностей $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, $\{w_k\}$, $\{x_k(t)\}$ соответственно к u_f, v_f, w_f, $x_f(t)$.

Таким образом, имеем задачу: при заданных n, m, $\varkappa$, q, u_0, w_f, $x^*(t)$, U, V, W, θ, $K_y(t,t')$, $K_\delta(t,t')$, $Z_k(t)$ $(k=0,1,\dots)$ и неизвестной матрице ϑ требуется построить последовательности $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, $\{w_k\}$, $\{x_k(t)\}$, которые сходятся в каком-то смысле соответственно к u_f, v_f, w_f, $x_f(t)$ при условиях (1.1), (1.2), (1.4)–(1.14) и обеспечивают в пределе минимизацию выражения (1.3) по переменным u, v. Эту задачу будем называть адаптивной аппроксимацией функций из L_2.

Отметим, что поскольку коррекции параметров u_0, v_0, w_0 формируются в зависимости от результатов измерений случайных функций $X_k(t)$ со случайными ошибками $\Delta_k(t)$, то рассматриваемые последовательности являются случайными. Поэтому их сходимость может формулироваться в терминах сходимости случайных последовательностей.

2. Решение задачи

В качестве достаточного алгоритма метода решения задачи адаптивной аппроксимации может быть принят следующий порядок действий и вычислений.

1. Осуществить на T процесс $X_k(t)$ и получить результат его измерения $Z_k(t)$ на k-м шаге приближений $(k = 0, 1, \dots)$.

2. Определить на T функции

$$\begin{aligned} &Z_k^*(t) = Z_k(t) - U^T u_k && (k = 0), \\ &Z_k^*(t) = Z_k(t) - U^T u_k - V^T \delta v_{k-1} - W^T \delta w_{k-1} && (k = 1, 2, \dots), \\ &\overline{Z}_k(t) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} Z_i^*(t) && (k = 0, 1, \dots). \end{aligned} \tag{2.1}$$

3. Используя $Z_k^*(t)$, $\overline{Z}_k(t)$, построить оценки $\widetilde{v}_k$, $\widetilde{w}_k$, $\widetilde{\vartheta}_k$ k-го приближения параметров v_0, w_0, ϑ_0, например, по формулам вида

$$\begin{aligned} &\widetilde{v}_k = \gamma_v^0 + \int_T \gamma_v(t) \overline{Z}_k(t) dt; \\ &\widetilde{w}_k = \gamma_w^0 + \int_T \gamma_w(t) \overline{Z}_k(t) dt; \qquad k = 0, 1, \dots \\ &\widetilde{\vartheta}_k = \gamma_\vartheta^0 + \int_T \gamma_\vartheta(t) \overline{Z}_k(t) dt, \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь и далее γ^0 и $\gamma(t)$ с соответствующими индексами — матрицы-столбцы параметров и функций из L_2 соответствующих размерностей, определяемые методами статистического точечного оценивания.

4. Построить k-е приближение оценок $\widetilde{u}_{fk}$, $\widetilde{v}_{fk}$ параметров u_f, v_f из уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(UU^T)\widetilde{u}_{fk} + (UV^T)\widetilde{v}_{fk} = (x^*, U) - (U, W^T) w_f - (U, \theta^T) \widetilde{\vartheta}_k, \\ &(VU^T)\widetilde{u}_{fk} + (VV^T)\widetilde{v}_{fk} = (x^*, V) - (V, W^T) w_f - (V, \theta^T) \widetilde{\vartheta}_k, \end{aligned}\right. \quad k = 0, 1, \dots \tag{2.3}$$

5. Построить оценку k-го приближения $\widetilde{x}_{fk}(t)$ функции $\widetilde{x}_f(t)$ в виде

$$\widetilde{x}_{fk}(t) = U(t)^T \widetilde{u}_{fk} + V(t)^T \widetilde{\gamma}_{fk} + W(t)^T w_f + \theta(t)^T \widetilde{\vartheta}_k, \qquad k = 0, 1, \dots \tag{2.4}$$

6. Вычислить меры точности оценок параметров, например, в виде их среднеквадратических отклонений

$$J_\vartheta^j = M[(\widetilde{\vartheta}_k^i - \vartheta_0^i)^2], \ \ J_V^j = M[(\widetilde{w}_k^j - w_0^j)^2], \ \ J_\vartheta = M[(\widetilde{\vartheta}_k^r - \vartheta_s)^2] \ \ (i = \overline{1, m}; \ \ j = \overline{1, \varkappa}; \ \ s = \overline{1, q}). \tag{2.5}$$

7. Определить коррекции параметров k-го приближения по формулам

$$\delta u_k = \widetilde{u}_{fk} - u_0, \quad \delta v_k = \widetilde{v}_{fk} - \widetilde{v}_k, \quad \delta w_k = w_f - \widetilde{w}_k, \qquad k = 0, 1, \dots \tag{2.6}$$

8. Реализовать полученные коррекции и получить параметры следующего приближения в соответствии с формулами (1.8).

9. Используя u_{k+1}, v_{k+1}, w_{k+1} в качестве исходных данных для построения $x_{k+1}(t)$, повторить пп. 1–8 алгоритма с увеличением индекса действий на единицу; процесс продолжать до тех пор, пока не будет достигнута удовлетворительная точность оценок параметров u_f, v_f, w_f и функции $x_f(t)$.

Достаточные условия применимости этого алгоритма устанавливает следующая

Теорема 1. *Если случайные последовательности $\{\widetilde{v}_k\}$, $\{\widetilde{w}_k\}$, $\{\widetilde{\vartheta}_k\}$ оценок параметров v_0, w_0, ϑ сходятся по вероятности к этим параметрам, то случайные последовательности $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, $\{w_k\}$, $\{x_k(t)\}$ сходятся по вероятности соответственно к u_f, v_f, w_f, $x_f(t)$ $(\forall t \in T)$.*

Доказательство. Из уравнений (2.3) и условия (1.5) следует, что $\widetilde{u}_{fk}$ и $\widetilde{v}_{fk}$ являются линейными функциями аргумента $\widetilde{\vartheta}_k$. Отсюда и из системы (1.4), учитывая известную теорему вероятностей о сходимости последовательности значений непрерывных функций, соответствующей последовательности значений случайных аргументов, сходящихся по вероятности к некоторому пределу, находим, что если выполнено условие о сходимости по вероятности последовательности $\{\widetilde{\vartheta}_k\}$ к ϑ, то имеет место аналогичная сходимость последовательностей $\{\widetilde{u}_{fk}\}$ и $\{\widetilde{v}_{fk}\}$ соответственно к u_f и v_f.

Учитывая это обстоятельство, соотношения (2.6), а также условие теоремы о сходимости по вероятности последовательностей $\{\widetilde{v}_k\}$ и $\{\widetilde{w}_k\}$ к v_0, и w_0, в силу той же теоремы находим, что случайные последовательности $\{\delta u_k\}$, $\{\delta v_k\}$, $\{\delta w_k\}$ сходятся по вероятности соответственно к $u_f - u_0$, $v_f - v_0$, $w_f - w_0$.

Теперь, принимая во внимание (1.8), нетрудно убедиться, что случайные последовательности $\{u_{k+1}\}$, $\{v_{k+1}\}$, $\{w_{k+1}\}$ действительно сходятся по вероятности соответственно к $u_0+u_f-u_0 = u_f$, $v_0 + v_f - v_0 = v_f$, $w_0 + w_f - w_0 = w_f$.

Аналогично с учетом формул (1.2) и (2.4) устанавливается сходимость по вероятности случайной последовательности $\{x_k(t)\}$ к $x_f(t)$ для всякого $t \in T$, что и требовалось. □

Из этой теоремы следует, что построение состоятельных оценок параметров v_0, w_0, ϑ_0 по результатам $Z_k(t)$ измерений функций $X_k(t)$ $(k = 0, 1, \dots)$ достаточно для сходимости в статистическом смысле предлагаемого метода последовательных приближений.

Конструктивное условие сходимости алгоритма устанавливает следующая

Теорема 2. *Если оценки $\widetilde{v}_k$, $\widetilde{w}_k$, $\widetilde{\vartheta}_k$ вида* (2.2) *являются несмещенными, то последовательности $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, $\{w_k\}$, $\{x_k(t)\}$ $(t \in T)$ сходятся по вероятности соответственно к u_f, v_f, w_f, $x_f(t)$ $(t \in T)$.*

Доказательство. Из соотношений (1.7)–(1.14), (2.1) после несложных преобразований получим

$$\begin{gathered} Z_k^*(t) = \chi(t) + \overline{\Delta}_k(t), \quad \overline{Z}_k(t) = \chi(t) + \overset{\circ}{\overline{Z}}_k(t), \quad M[\overset{\circ}{\overline{Z}}_k(t)] = 0, \\ M[Z_k^*(t)] = M[\overline{Z}_k(t)] = \chi(t), \quad M[\overset{\circ}{\overline{Z}}(t)\overset{\circ}{\overline{Z}}(t')] = \frac{1}{k+1}K(t,t'). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \overline{\Delta}_k = J_k(t) + \Delta_k(t), \quad \overset{\circ}{\overline{Z}}_k(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\overline{\Delta}_i(t); \\ \chi(t) = V^T v_0 + W^T w_0 + \theta^T \vartheta_0; \\ K(t,t') = K_y(t,t') + K_\delta(t,t'). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Теперь из (2.2) следует

$$\widetilde{v}_k^j = \gamma_v^{0j} + \int_T \gamma_v^j(t)\chi(t)dt + \int_T \gamma_v^j(t)\overset{\circ}{\overline{Z}}_k(t)dt \quad (j = \overline{1,n}).$$

Отсюда, учитывая соотношение (2.7), находим

$$\begin{gathered} M(\widetilde{v}_k^j) = \gamma_{vk}^{0j} + \int_T \gamma_v^j(t)\chi(t)dt; \\ \widetilde{v}_k^j - M(\widetilde{v}_k^j) = \int_T \gamma_v^j(t)\overset{\circ}{\overline{Z}}_k(t)dt \quad (j = \overline{1,n}). \end{gathered}$$

Следовательно, если оценка $\widetilde{v}_k^j$ является несмещенной, т. е. $M(\widetilde{v}_k^j) = v_0^j$, то

$$M[(\widetilde{v}_k^j - v_0^j)^2] = \iint\limits_{TT} \gamma_{vk}^j(t)\gamma_{vk}^j(t')M[\overset{\circ}{\overline{Z}}_k(t)\overset{\circ}{\overline{Z}}_k(t')]dt\,dt' \quad (j = \overline{1,n}).$$

Отсюда и из (2.7) следует, что при условии теоремы 2

$$M[(\widetilde{v}_k^j - v_0^j)^2] = \frac{1}{k+1}\iint\limits_{TT} \gamma_v^j(t)\gamma_v^j(t')K(t,t')dt\,dt'.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} M[(\widetilde{v}_k^j - v_0^j)^2] = 0.$$

Последнее означает сходимость оценки $\widetilde{v}_k^j$ к v_0^j в среднем квадратическом и, следовательно, сходимость по вероятности.

Аналогично доказывается состоятельность оценок других элементов матриц $\widetilde{v}_k$, $\widetilde{w}_k$, $\widetilde{\vartheta}_k$.

Поскольку в соответствии с теоремой 1 из состоятельности оценок $\widetilde{v}_k$, $\widetilde{w}_k$, $\widetilde{\vartheta}_k$ следует сходимость метода последовательных приближений, то теорему 2 следует считать доказанной. $\square$

Теорема 3. *Если оценки $\widetilde{v}_k$, $\widetilde{w}_k$, $\widetilde{\vartheta}_k$ определяются из системы уравнений*

$$\begin{aligned}(V,V^T)\widetilde{v}_k + (V,W^T)\widetilde{w}_k + (V,\theta^T)\widetilde{\vartheta}_k &= (V,\overline{Z}_k),\\ (W,V^T)\widetilde{v}_k + (W,W^T)\widetilde{w}_k + (W,\theta^T)\widetilde{\vartheta}_k &= (W,\overline{Z}_k),\\ (\theta,V^T)\widetilde{v}_k + (\theta,W^T)\widetilde{w}_k + (\theta,\theta^T)\widetilde{\vartheta}_k &= (\theta,\overline{Z}_k),\end{aligned} \tag{2.9}$$

определитель которой отличен от нуля, то последовательности $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, $\{w_k\}$, $\{x_k(t)\}$ $(t \in T)$ сходятся по вероятности соответственно к u_f, v_f, w_f, $x_f(t)$ $(t \in T)$.

Доказательство. Учитывая введенное ранее определение выражений–круглых скобок в уравнении (2.9) и независимость их от индекса k, очевидным образом устанавливаем, что оценки параметров, определяемые из этих уравнений, относятся к классу (2.2). Далее, учитывая соотношения (2.7) и (2.8), относящиеся к функции $\overline{Z}_k(t)$, и применяя операцию математического ожидания к обеим частям уравнений (2.8), получим

$$\begin{aligned}(V,V^T)M(\widetilde{v}_k) + (V,W^T)M(\widetilde{w}_k) + (V,\theta^T)M(\widetilde{\vartheta}_k) &= (V,V^T)v_0 + (V,W^T)w_0 + (V,\theta^T)\vartheta,\\ (W,V^T)M(\widetilde{v}_k) + (W,W^T)M(\widetilde{w}_k) + (W,\theta^T)M(\widetilde{\vartheta}_k) &= (W,V^T)v_0 + (W,W^T)w_0 + (W,\theta^T)\vartheta,\\ (\theta,V^T)M(\widetilde{v}_k) + (\theta,W^T)M(\widetilde{w}_k) + (\theta,\theta^T)M(\widetilde{\vartheta}_k) &= (\theta,V^T)v_0 + (\theta,W^T)w_0 + (\theta,\theta^T)\vartheta.\end{aligned}$$

По условию определитель этой системы отличен от нуля, поэтому имеем

$$M(\widetilde{v}_k) = v_0, \quad M(\widetilde{w}_k) = w_0, \quad M(\widetilde{\vartheta}_k) = \vartheta.$$

Таким образом, оценки $\widetilde{v}_k$, $\widetilde{w}_k$, $\widetilde{\vartheta}_k$, определяемые из уравнений (2.9), являются несмещенными, а поскольку они относятся к классу оценок (2.2), то они удовлетворяют условиям теоремы 2. Отсюда следует их требуемая сходимость и, следовательно, достаточность для рассматриваемого метода последовательных приближений. $\square$

Можно показать, что достаточными для алгоритма метода являются также минимаксные оценки параметров, полученные в ([3], с. 14).

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. *Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1967. – 368 с.
2. Кожевников Ю.В. *Адаптивная коррекция параметрических систем* // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 10. – С. 135–143.
3. Кожевников Ю.В. *Минимаксная оценка параметров регрессий при непрерывных измерениях.* – Вестн. КГТУ. – 1997. – № 2. – С. 19–25.

Казанский государственный технический университет

Поступила 05.10.1998