ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 512.532

Л.М. МАРТЫНОВ

РЕДУЦИРОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП

В теории абелевых групп важную роль играют понятия полноты (делимости) и редуцированности. Оказывается, к этим понятиям возможен подход, использующий теорию многообразий групп. А именно, очевидно, что абелева группа является полной (по другой терминологии — делимой) тогда и только тогда, когда она не имеет гомоморфизмов на неединичные группы из атомов решетки многообразий абелевых групп (напомним, что последние исчерпываются многообразиями абелевых групп $\mathcal{A}_p$ экспоненты p по всем простым p). Поскольку решетка подмногообразий любого многообразия алгебр является атомной, ясно, как определить понятие полной алгебры в этом многообразии, а следовательно, — и понятие редуцированной алгебры как алгебры, не имеющей неодноэлементных полных подалгебр. Эти понятия были введены в [1], а в статье [2] намечена основная проблематика и перечислены некоторые свойства, касающиеся указанных понятий.

В [2] методологический подход к развитию структурной теории алгебр состоит в сведении вопроса об изучении произвольных алгебр данного многообразия к изучению редуцированных и полных алгебр и их расширений. Поскольку редуцированные алгебры конструируются с помощью расширений из алгебр минимальных многообразий (в этом отличие редуцированных алгебр от разрешимых в смысле [3], [4], у которых все такие алгебры принадлежат одному и тому же многообразию), этот подход наиболее эффективен для многообразий с "хорошими" атомами (т. е. определяющихся хорошими тождествами и с простым строением алгебр) решетки их подмногообразий. Этому критерию вполне соответствуют изучаемые в данной работе многообразия всех полугрупп, групп, инверсных и вполне регулярных унарных полугрупп, полугрупп с нулем и моноидов (рассматриваемых как полугруппы с нульарной операцией), для которых решается задача характеризации редуцированных подмногообразий. Эта задача сформулирована в работе [2] (проблема 2) для произвольных алгебр. Актуальность ее постановки мотивируется тем, что полные и редуцированные алгебры в общем случае могут иметь очень сложное строение. Это наводит на мысль "отрезать" полные алгебры и "урезать" типы редуцированных алгебр. Поскольку в общем случае в силу утверждения 5 из [2] класс всех редуцированных алгебр многообразия является лишь предмногообразием, этого можно попытаться достичь путем рассмотрения редуцированных многообразий алгебр, т. е. многообразий, состоящих из редуцированных алгебр.

Следует отметить, что эти надежды полностью оправдались для рассматриваемых в работе многообразий. Редуцированные многообразия характеризуются здесь либо на языке тождеств, либо на языке расширений алгебр из некоторых достаточно хорошо известных многообразий (т. е. на языке произведений многообразий в смысле А.И. Мальцева [5]). Оказывается, что алгебры этих многообразий компонуются с помощью расширений из алгебр конечного набора атомов (т. е., как мы говорим, конечно редуцированы), которые в произведении группируются каким-то удивительным образом, иногда вопреки свойствам умножения многообразий; это, в частности, иллюстрируют и результаты работы [6] для моноассоциативных алгебр.

Прежде чем сформулировать основные результаты работы, напомним некоторые определения и условимся относительно обозначений. Всюду ниже буквы k, m, n, r обозначают, как правило, положительные целые числа (не будем делать оговорок, если из контекста ясно, что некоторые из них могут быть нулями), а буква p — простое число.

Пусть задано некоторое многообразие $\mathcal{U}$ алгебр фиксированной сигнатуры. Всюду ниже будем предполагать, что все рассматриваемые алгебры принадлежат $\mathcal{U}$. Через $\mathcal{E}$ будем обозначать многообразие одноэлементных алгебр. Подкласс $\mathcal{K}$ многообразия $\mathcal{U}$ называется *нетривиальным*, если он отличен от $\mathcal{U}$ и $\mathcal{E}$. Для многообразия $\mathcal{V}$ алгебр через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка его подмногообразий.

Россыпь, компоненты которой суть классы конгруэнции ρ алгебры A, являющиеся ее подалгебрами, называется *ядром конгруэнции* ρ и обозначается через $\ker\rho$. Считаем,что россыпь $\mathbf{D}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ алгебр, если либо каждая компонента $\mathbf{D}$ принадлежит $\mathcal{K}$, либо $\mathbf{D}$ есть пустая россыпь. Будем говорить, что *алгебра A есть расширение своей россыпи* $\mathbf{D}$ *посредством алгебры B*, если существует такая конгруэнция ρ на A, что $\ker\rho = \mathbf{D}$ и $A/\rho \cong B$.

Напомним, что *$\mathcal{K}$-произведение* $\mathcal{X} \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{Y}$ [5] подклассов $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ класса $\mathcal{K}$ состоит из таких алгебр из $\mathcal{K}$, каждая из которых является расширением некоторой россыпи из $\mathcal{X}$ с помощью алгебры из $\mathcal{Y}$. Если $\mathcal{K} = \mathcal{U}$, то $\mathcal{K}$-произведение $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$ будем обозначать через $\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}$.

Определение используемых в работе теоретико-полугрупповых понятий можно найти в [7].

Ниже будут использоваться следующие обозначения:

$\mathcal{A}$ — многообразие всех абелевых групп;

$\mathcal{A}^n$ — многообразие всех n-ступенно разрешимых групп;

$\mathcal{A}_n$ — многообразие абелевых групп экспоненты n;

$\mathcal{B}_m$ — бернсайдовское многообразие групп экспоненты m;

$\mathcal{B}_{r,m}$ ($\mathcal{B}^0_{r,m}$, $\mathcal{B}^1_{r,m}$) — бернсайдовское многообразие полугрупп (с нулем, единицей) типа $(r,\ m)$;

$\mathcal{C}$ (соответственно $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$) — многообразие полурешеток (с нулем, единицей);

$\mathcal{G}$ — многообразие всех групп;

$\mathcal{N}$ — класс всех нильполугрупп;

$\mathcal{Z}_k$ — многообразие k-нильпотентных полугрупп.

При получении основных результатов важную роль играет критерий наличия неодноэлементных полных алгебр относительно некоторого многообразия алгебр ([8], предложение 1.2). Заметим, что хотя этот результат относится к алгебрам с выделенным идемпотентом, его удается использовать во всех рассматриваемых случаях, в том числе и в случае полугрупп. Используется также очевидный факт о том, что аддитивная группа Q рациональных чисел является полной в любом из полугрупповых многообразий, в котором она содержится, и поэтому редуцированное многообразие соответствующих полугрупп является периодическим. Понятно также, что многообразия полугрупп или полугрупп с нулем конечного индекса являются также периодическими. В связи со сказанным, в работе существенно используются результаты статьи [9], в которой характеризуются некоторые периодические многообразия полугрупп. Доказательство всех основных результатов опирается на хорошо известное описание атомов решеток рассматриваемых в работе многообразий.

Теорема 1. *Многообразие $\mathcal{V}$ групп редуцировано тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}^n \bigcap \mathcal{B}_m$ для некоторых m и n.*

Доказательство этой теоремы использует предложение 1.2 из [8] и хорошо известный факт теории абелевых групп о том, что периодическая абелева группа, порядки элементов которой ограничены в совокупности, является прямой суммой примарных циклических групп.

Заметим, что теорема 1 показывает, что нетривиальные редуцированные многообразия групп — это в точности подмногообразия многообразий, разложимых в $\mathcal{G}$-произведение атомов из $L(\mathcal{G})$. В частности, они образуют подполугруппу S полугруппы $(L(\mathcal{G}), \circ)$. Так как последняя является свободной полугруппой с нулем и единицей (см., напр., [10], с. 85), легко понять, что S свободно порождается неразложимыми редуцированными многообразиями групп. Заметим, что в силу основного результата работы [11] полугруппа S континуальна.

Теорема 2. *Многообразие $\mathcal{V}$ инверсных полугрупп является редуцированным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq (\mathcal{A}^n \bigcap \mathcal{B}_m) \circ \mathcal{C}$.*

Доказательство этой теоремы использует полноту полугруппы B_2 (2×2)-матричных единиц с нулем; известный и легко проверяемый факт о том, что многообразие $\mathbf{V}$ инверсных полугрупп, не содержащее полугруппы B_2, состоит из вполне регулярных полугрупп; теорему 1.

Теорема 3. *Многообразие $\mathcal{V}$ полугрупп с нулем редуцировано тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ имеет конечный индекс.*

При доказательстве необходимости этой теоремы используется предложение 1.2 из [8], а при доказательстве достаточности — теорема 2 из [9].

Теорема 4. *Для полугруппового многообразия $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mathcal{V}$ редуцировано;*

(ii) *$\mathcal{V} \bigcap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}_k$ и $\mathcal{V} \bigcap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}^n \bigcap \mathcal{B}_m$ для некоторых k, n, m;*

(iii) *$\mathcal{V}$ состоит из полурешеток нильпотентных идеальных расширений вполне простых полугрупп, структурные группы которых являются периодическими и разрешимыми.*

При доказательстве этой теоремы используются теоремы 1 и 3 и результаты статьи [9].

Заметим, что поскольку редуцированные многообразия полугрупп являются периодическими, работа [9] позволяет указать другие характеризации редуцированных многообразий полугрупп.

Следствие 1. Многообразие $\mathcal{V}$ коммутативных полугрупп редуцировано тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ есть многообразие конечного индекса.

Действительно, необходимость следует из теоремы 2. Обратно, если многообразие $\mathcal{V}$ имеет конечный индекс, то $\mathcal{V}$ есть периодическое многообразие и, следовательно, $\mathcal{V} \bigcap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \bigcap \mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m$ для некоторого m. Согласно условию (ii) теоремы 4 $\mathcal{V}$ редуцировано.

Следствие 2. Любое многообразие $\mathcal{V}$ связок редуцировано.

Действительно, в этом случае $\mathcal{V} \bigcap \mathcal{N} = \mathcal{E} \subseteq \mathcal{Z}_k$ и $\mathcal{V} \bigcap \mathcal{G} = \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}^n \bigcap \mathcal{B}_m$ для любых k, m, n.

Теорема 5. *Многообразие $\mathcal{V}$ моноидов редуцировано тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq (\mathcal{A}^n \bigcap \mathcal{B}_m) \circ \mathcal{C}^1$ для некоторых m, n.*

Доказательство использует предложение 2 из [9], теорему 1 и утверждение 5 из [2], согласно которому любой моноид, являющийся расширением редуцированной группы посредством полурешетки, является редуцированным.

Следствие 3. Любое комбинаторное многообразие $\mathcal{V}$ моноидов является редуцированным по атому $\mathcal{C}^1$.

Действительно, если $\mathcal{V}$ комбинаторно, то $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}^1_{r,1}$ для некоторого r. Известно и легко проверяется, что в любом моноиде M многообразия $\mathcal{B}^1_{r,1}$ единица внешним образом присоединена, и поэтому M есть полурешетка двух подполугрупп $M \setminus \{1\}$ и $\{1\}$. Но теперь очевидно, что $M \in \mathcal{E} \circ \mathcal{C}^1$. Таким образом, $\mathcal{B}^1_{r,1} \subseteq \mathcal{E} \circ \mathcal{C}^1$ и, следовательно, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E} \circ \mathcal{C}^1$. В силу теоремы 5 $\mathcal{V}$ — редуцированное многообразие.

По аналогии с теоремой 4 доказывается

Теорема 6. *Для многообразия $\mathcal{V}$ вполне регулярных полугрупп следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mathcal{V}$ редуцировано;*

(ii) *$\mathcal{V} \bigcap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}^n \bigcap \mathcal{B}_m$ для некоторых n, m;*

(iii) *$\mathcal{V}$ состоит из полурешеток вполне простых полугрупп, структурные группы которых являются периодическими и разрешимыми.*

Литература

1. Martynov L. M. *On notions of completeness, solvability, primarity, reducibility and purity for arbitrary algebras* // Intern. conf. on Modern Algebra and Its Appl. Vanderbilt Univ., Nashville, Tennessee, May 14–18, 1996. Schedule and Abstracts. — Nashville, 1996. — P. 79–80.
2. Мартынов Л. М. *О понятиях примарности, полноты, редуцированности и чистоты для произвольных алгебр* // Тр. межд. семин. "Универсальная алгебра и ее прилож." – Волгоград: Перемена, 2000. – С. 179–190.
3. Шеврин Л.Н., Мартынов Л.М. *О достижимых классах алгебр* // Сиб. матем. журн. – 1971. – Т. 12. – № 6. – С. 1363–1381.
4. Ševrin L.N., Martynov L. M. *Attainability and solvability for classes of algebras* // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. – Amsterdam e. a.: North-Holland, 1985. – P. 397–459.
5. Мальцев А.И. *Об умножении классов алгебраических систем* // Сиб. матем. журн. – 1967. – Т. 8. – № 2. – С. 346–365.
6. Мартынов Л.М. *О примарных и редуцированных многообразиях моноассоциативных алгебр* // Сиб. матем. журн. — 2001. – Т. 42. – № 1. – С. 103–112.
7. Шеврин Л.Н. *Полугруппы* // В кн. "Общая алгебра". Гл. 4 / Под ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – Т. 2. – С. 11–191.
8. Мартынов Л.М. *О многообразиях разрешимых алгебр* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 6. – С. 85–87.
9. Сапир М. В., Суханов Е. В. *О многообразиях периодических полугрупп* // Изв. вузов. Математика. – 1981. –№ 4. – С. 48–55.
10. Нейман Х. *Многообразия групп.* – М.: Мир, 1969. – 264 с.
11. Ольшанский А.Ю. *О проблеме конечного базиса тождеств* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1970. – Т. 34. – №2. – С. 67–73.

Омский государственный
педагогический университет

Поступила
14.02.2003