ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 517.929

В.Г. АБДРАХМАНОВ, Ю.Н. СМОЛИН

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Рассматривается задача

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i(t)x(t-g_i(t)), && t\in[0,\infty[,\\ &x(t)=\varphi(t), && t\in[a,0[, \end{aligned} \tag{1}$$

$$x(0)=\varphi(0), \tag{2}$$

где ω-периодические ($\omega>0$) $n\times n$-матрицы A_i и ω-периодические запаздывания g_i измеримы и ограничены в существенном на $[0,\omega[$; $t-g_i(t)\triangleq h_i(t)$, $t\in[0,\infty[$; существует $s_1\in[0,\omega[$ такое, что $h_i(t)\geq s_1$ при почти всех $t\geq s_1$; h_i удовлетворяют условию независания ([1], с. 21) и определяют начальный промежуток $[a,0]$; n-мерная вектор-функция φ определена и абсолютно непрерывна на $[a,0]$.

Под решением задачи (1)–(2) понимаем локально абсолютно непрерывную на $[a,\infty[$ n-мерную вектор-функцию x, удовлетворяющую почти всюду на этом промежутке уравнению (1) и условию (2).

1. Установим достаточный признак экспоненциальной устойчивости уравнения (1) (асимптотической устойчивости по показательному закону тривиального решения уравнения (1) (см. [2], с. 113)). При этом воспользуемся некоторыми идеями работы [3].

Заменим задачу (1)–(2) равносильным ей уравнением

$$x(t)=\int_0^t\sum_{i=1}^{m}\chi(t,s)A_i(s)x(h_i(s))\,ds+f(t),\quad t\in[a,\infty[, \tag{3}$$

где $\chi(\cdot,\cdot)$ — характеристическая функция множества $\{(t,s):t\geq s\}$,

$$f(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{если } t\in[a,0[;\\ \varphi(0), & \text{если } t\in[0,\infty[.\end{cases}$$

Под решением уравнения (3) понимаем локально абсолютно непрерывную на $[a,\infty[$ n-мерную вектор-функцию x, удовлетворяющую ему всюду на этом промежутке.

В этом же смысле будем понимать и решения встречающихся ниже интегральных уравнений.

Для уравнения (3) определим итерированные ядра $K_i^l(\cdot,\cdot)$ ($i=1,\dots,m$; $l=1,2,\dots$): $K_i^{(1)}(t,s)=\chi(t,s)A_i(s)$, $K_i^{(l+1)}(t,s)=\int\limits_s^t\sum\limits_{j=1}^m K_j^{(l)}(t,\tau)\chi(h_j(\tau),s)A_i(s)\,d\tau$ и резольвентные ядра $R_i(\cdot,\cdot)$: $R_i(t,s)=\sum\limits_{l=1}^{\infty}K_i^l(t,s)$. Несложно показать, что при любом фиксированном $t\in[0,\infty[$ ряды $\sum\limits_{l=1}^{\infty}K_i^{(l)}(t,\cdot)$ сходятся в пространстве суммируемых вектор-функций $L_1^n[a,b]$ ($\forall b>a$) и справедлива

Теорема 1. *Уравнение (3) имеет единственное решение, определяемое формулой*

$$x(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^m R_i(t,s) f(h_i(s))\, ds + f(t), \quad t \in [a, \infty[; \tag{4}$$

при этом упорядоченный набор $R_i(t,\cdot)$ *при любом фиксированном* t *является решением системы*

$$R_i(t,s) = \int_s^t \sum_{j=1}^m R_j(t,\tau)\chi(h_j(\tau),s) A_i(s) d\tau + \chi(t,s)A_i(s), \quad i = 1,\dots,m, \tag{5}$$

а упорядоченный набор $R_i(\cdot,s)$ *при любом фиксированном* s *— решением системы*

$$R_i(t,s) = \int_s^t \sum_{j=1}^m \chi(t,\tau)A_j(\tau)R_i(h_j(\tau),s)d\tau + \chi(t,s)A_i(s), \quad i = 1,\dots,m. \tag{6}$$

Отметим, что для непрерывных A_i, g_i и f подобное утверждение приведено в [4].

Введем матрицу, играющую в дальнейшем основную роль, положив при любых t, s

$$C(t,s) = \int_s^t \sum_{i=1}^m R_i(t,\tau)\chi(h_i(\tau),s)d\tau + \chi(t,s)E, \tag{7}$$

где E — единичная $n \times n$-матрица.

Теорема 2. *Матрица* $C(\cdot,\cdot)$ ω*-периодична по двум аргументам, а* $C(\cdot,s)$ *при любом фиксированном* s *удовлетворяет уравнению*

$$C(t,s) = \int_s^t \sum_{i=1}^m \chi(t,\tau)A_i(\tau)C(h_i(\tau),s)d\tau + \chi(t,s)E. \tag{8}$$

Доказательство следует из (6) и (7). $\square$

Теорема 3. *Если в уравнении*

$$x(t) = \int_{s_1}^t \sum_{i=1}^m K_i^{(1)}(t,s)x(h_i(s))ds + f(t), \quad t \in [s_1, \infty[,$$

функция f *локально абсолютно непрерывна на* $[s_1, \infty[$*, то его решение определяется формулой*

$$x(t) = C(t,s_1)f(s_1) + \int_{s_1}^t C(t,s)f'(s)ds, \quad t \in [s_1, \infty[. \tag{9}$$

Доказательство вытекает из аналога формулы (4) и (7). $\square$

Замечание. Равенство (9) обобщает формулу Коши решения неоднородного дифференциального уравнения ([5], с. 155), в связи с чем $C(\cdot,\cdot)$ будем называть матрицей Коши уравнения (1).

Получим экспоненциальную оценку матрицы Коши. Положим $s_k = s_1 + (k-1)\omega$, $k = 2, 3, \dots$, $\Delta = \{(t,s) : s_1 \le s \le t < \infty\}$; $D = \{(t,s) : s_1 \le s \le t < s + \omega < s_3\}$;

$$\Gamma(t,s,z) = \sum_{k=0}^\infty C(t + k\omega, s)z^k, \tag{10}$$

где $(t,s) \in D$, z — комплексная переменная.

Теорема 4. 1) *Если существует $\rho > 0$ такое, что функция $\Gamma(t,s,\cdot)$ аналитична внутри окружности $|z| = \rho$ и ограничена на ней равномерно по t и s, то существует $c_0 > 0$ такое, что выполняется неравенство*[1]

$$\|C(t,s)\| \leq c_0 \exp(\alpha(t-s)), \quad (t,s) \in \Delta, \tag{11}$$

где $\alpha = -(\ln \rho)/\omega$.

2) *Если существуют α и $c_0 > 0$ такие, что выполняется неравенство* (11), *то функция $\Gamma(t,s,\cdot)$ аналитична внутри окружности $|z| = \exp(-\alpha\omega)$.*

Доказательство. 1) Возьмем произвольную точку $(t,s) \in \Delta$. Тогда существуют точка $(\bar{t},\bar{s}) \in D$ и $k,l \in \{0,1,\dots\}$ $(k \geq l)$ такие, что $t = \bar{t} + k\omega$, $s = \bar{s} + l\omega$, и согласно теореме 2

$$C(t,s) = C(\bar{t} + (k-l)\omega, \bar{s}). \tag{12}$$

Но вследствие неравенств Коши ([6], с. 61) $\|C(\bar{t} + (k-l)\omega, \bar{s})\| \leq c_1 \rho^{-(k-l)} = c_1 \exp(\alpha(k\omega - l\omega))$, где $\alpha = -(\ln\rho)/\omega$, $c_1 = \sup\limits_{|z|=\rho,\ (t,s)\in D} \|\Gamma(t,s,z)\|$. Очевидно, $k\omega = t - \bar{t}$, $l\omega = s - \bar{s}$, и потому $\|C(\bar{t} + (k-l)\omega, \bar{s})\| \leq c_0 \exp(\alpha(t-s))$, где $c_0 = c_1 \max\limits_{(\bar{t},\bar{s})\in D} \exp(-\alpha(\bar{t} - \bar{s}))$. Отсюда и из (12) следует (11).

2) При $(t,s) \in D$ и $k \in \{0,1,\dots\}$ в силу (11) $\|C(t+k\omega, s)\| \leq c_0 \exp(\alpha(t+k\omega-s)) \leq c_2 \exp(\alpha k\omega)$, где $c_2 = c_0 \max\limits_{(t,s)\in D} \exp(\alpha(t-s))$. А поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\exp(\alpha k\omega)} = \exp(\alpha\omega)$, то в силу признака Коши радиус ρ сходимости ряда (10) не меньше $\exp(-\alpha\omega)$. $\square$

Установим формулы коэффициентов ряда (10), что даст возможность определить область аналитичности функции $\Gamma(t,s,\cdot)$.

Лемма 1. *Коэффициенты ряда* (10), *начиная с $k = 1$, определяются формулами*

$$C(\bar{t} + k\omega, \bar{s}) = C(\bar{t} + \omega, s_1) C^{k-1}(s_2, s_1) C(s_2, \bar{s}), \quad (\bar{t},\bar{s}) \in D. \tag{13}$$

Доказательство. Вначале с помощью обобщенного принципа математической индукции покажем, что при $t \in [s_1, \infty[$, $k = 0,1,2,\dots$

$$C(t + k\omega, s_1) = C(t, s_1) C^k(s_2, s_1). \tag{14}$$

При $k = 0$ формула (14) очевидна. Предположим, что она верна при $k = 0,\dots,r-1$ $(r \in N)$. Из (8) при $t \in [s_1, \infty[$ ввиду ω-периодичности A_i, $\chi(\cdot,\cdot)$ и g_i имеем

$$C(t + r\omega, s_1) = \int_{s_1}^{t} \sum_{i=1}^{m} \chi(t,\tau) A_i(\tau) C(h_i(\tau) + r\omega, s_1)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{r-1} \int_{s_1}^{s_2} \sum_{i=1}^{m} \chi(t + (r-k)\omega, \tau) A_i(\tau) C(h_i(\tau) + k\omega, s_1)\, d\tau + \chi(t + r\omega, s_1) E.$$

Воспользуемся аналогом формулы (4). Тогда с учетом неравенства $h_i(s) \geq s_1$ при $s \geq s_1$ и (7) получим $C(t + r\omega, s_1) = C(t, s_1)\Big[\sum\limits_{k=0}^{r-1} \int\limits_{s_1}^{s_2} \sum\limits_{j=1}^{m} A_j(\tau) C(h_j(\tau) + k\omega, s_1)\, d\tau + E\Big]$. Но по индуктивному предположению $C(h_j(\tau) + k\omega, s_1) = C(h_j(\tau), s_1) C^k(s_2, s_1)$, $h_j(\tau) \in [s_1, \infty[$, $k = 0,1,\dots,r-1$, и потому согласно (8) $C(t + r\omega, s_1) = C(t, s_1)\Big[\sum\limits_{k=0}^{r-1} (C(s_2, s_1) - E) C^k(s_2, s_1) + E\Big]$. Отсюда после несложных преобразований получаем $C(t + r\omega, s_1) = C(t, s_1) C^r(s_2, s_1)$, $t \in [s_1, \infty[$, и формула

[1] $\|A\| = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ для матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$; $\|x\| = \sup\limits_i |x_i|$ для вектора $x = \mathrm{col}(x_1, \dots, x_n)$.

(14) верна при любом $k = 0,1,2,\ldots$ Теперь из (14) при $t \in [s_2,\infty[$ и $k = 0,1,2,\ldots$ в силу ω-периодичности $C(\cdot,\cdot)$ по двум аргументам имеем

$$C(t + k\omega, s_2) = C(t, s_2)C^k(s_2, s_1). \tag{15}$$

Пусть $s \in [0, s_2]$, $\alpha \in R^n$ и x_s, $\widetilde{x}_s$ — решения уравнений

$$x(t) = \int_s^t \sum_{i=1}^m \chi(t,\tau)A_i(\tau)x(h_i(\tau))d\tau + \chi(t,s)\alpha, \;\; t \in [s + a, \infty[,$$

и

$$x(t) = \int_{s_2}^t \sum_{i=1}^m \chi(t,\tau)A_i(\tau)x(h_i(\tau))d\tau + x_s(s_2), \quad t \in [s_2, \infty[,$$

соответственно. По формуле (4) с учетом (7)

$$x_s(t) = C(t,s)\alpha, \;\; t \in [s, \infty[, \tag{16}$$

а с учетом (7), (16) $\widetilde{x}_s(t) = C(t, s_2)C(s_2, s)\alpha$, $t \in [s_2,\infty[$. И поскольку $\widetilde{x}_s$ является сужением x_s на $[s_2,\infty[$, то вновь согласно (16) и произволу в выборе α получим

$$C(t,s) = C(t,s_2)C(s_2,s), \;\; 0 \le s \le s_2 \le t < \infty. \tag{17}$$

Из (17) теперь следует, что $C(t + k\omega, s) = C(t + k\omega, s_2)C(s_2, s)$ при $t \in [s_2,\infty[$ и $s \in [0, s_2[$, и с использованием (15) получаем $C(t + k\omega, s) = C(t, s_2)C^k(s_2, s_1)C(s_2, s)$. Отсюда, если положить $t = \overline{t} + \omega$, вытекает (13). $\square$

Замечание. По аналогии с доказательством (17) получается соотношение $C(t,s) = C(t,s_k)C(s_k,s)$, $0 \le s \le s_k \le t < \infty$, являющееся аналогом известного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений полугруппового равенства ([5], с. 155).

Пусть λ — наибольшее по модулю собственное число матрицы $C(s_2, s_1)$.

Теорема 5. *Для того чтобы имела место оценка* (11), *условие*

$$|\lambda| < \exp(\alpha\omega) \tag{18}$$

достаточно, а условие

$$|\lambda| \le \exp(\alpha\omega) \tag{19}$$

необходимо.

Доказательство. Пусть выполнено условие (18). Тогда для радиуса сходимости r ряда (10) ([7], с. 47) имеем $r = |\lambda|^{-1} > \exp(-\alpha\omega)$. Кроме того, как видно из (7) и (8), $\|C(\cdot, s_1)\|$ и $\|C(s_2,\cdot)\|$ ограничены в D, и в п. 1 теоремы 4 можем принять $\rho = \exp(-\alpha\omega)$, в силу которой теперь имеет место оценка (11) с показателем $\alpha = -(\ln\rho)/\omega$.

Пусть имеет место оценка (11). Тогда по п. 2 теоремы 4 $r \ge \exp(-\alpha\omega)$, и с учетом равенства $r = |\lambda|^{-1}$ приходим к (19). $\square$

Теперь можем установить достаточный признак (экспоненциальной) устойчивости уравнения (1).

Теорема 6. *Пусть имеет место неравенство* (18). *Тогда при* $\alpha = 0$ *уравнение* (1) *устойчиво, а при* $\alpha < 0$ *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Пусть $x(s_1)$ — значение решения уравнения (3) в точке s_1. Нетрудно видеть, что решение уравнения

$$x(t) = \int_{s_1}^{t} \sum_{i=1}^{m} \chi(t,s) A_i(s) x(h_i(s)) ds + x(s_1), \quad t \in [s_1, \infty[, \tag{20}$$

является сужением решения уравнения (3) на $[s_1, \infty[$. Поэтому, применяя к (20) формулу (9), получим $x(t) = C(t, s_1) x(s_1)$, $t \in [s_1, \infty[$.

Отсюда ввиду (11) и вытекает доказываемое утверждение. □

Замечание. Для широкого класса уравнений вида (1) справедливо и обратное утверждение. Действительно, пусть уравнение (1), в котором $s_1 = 0$, экспоненциально устойчиво ([2], с. 113). Ввиду (9) $x(t) = C(t,0)\varphi(0)$, $t \in [0, \infty[$, и потому $\|C(t,0)\varphi(0)\| \leq B\delta \exp(\alpha t)$, $t \in [0, \infty[$. Возьмем здесь $\varphi(0) = \mathrm{col}(0, \ldots, \delta, \ldots, 0)$, где δ стоит на i-м месте ($i = 1, \ldots, n$). Тогда получим $\|C(t,0)\| \leq Bn \exp(\alpha t)$, $t \in [0, \infty[$. Воспользовавшись теперь ω-периодичностью матрицы $C(\cdot, \cdot)$ по двум аргументам, отсюда находим $\|C(t, \omega)\| \leq Bn \exp(\alpha(t - \omega))$, $t \in [\omega, \infty[$, и ввиду (17) $\|C(t,s)\| \leq c_0 \exp(\alpha(t-s))$ при $0 \leq s \leq \omega \leq t < \infty$, где $c_0 = Bn \sup\limits_{s \in [0,\omega]} \|C(\omega, s)\| \exp(-\alpha\omega)$. Из этого неравенства в силу ω-периодичности $C(\cdot, \cdot)$ по двум аргументам следует, что эта же оценка имеет место и при $(t,s) \in \Delta$. Приходим к неравенству (19).

2. Так как матрица $C(s_2, s_1)$ может быть найдена лишь в исключительных случаях, то теорема 6 имеет главным образом теоретическое значение. Чтобы использовать ее на практике, проведем конструктивное исследование уравнения (1) ([1], с. 226), позволяющее получить $C(s_2, s_1)$ (и как следствие α в оценке (11)) приближенно, с заданной степенью точности. При этом будем поступать во многом аналогично тому, как это сделано в [8].

Возьмем некоторую монотонную бесконечно малую последовательность положительных рациональных чисел $\{\delta^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, и построим ω-периодические вычислимые ([1], с. 228) $n \times n$-матрицы $A_i^{(k)}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\int_{s_1}^{s_2} \|A_i(s) - A_i^{(k)}(s)\| ds \leq \delta^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Введем уравнение

$$x(t) = \int_{0}^{t} \sum_{i=1}^{m} \chi(t,s) A_i^{(k)}(s) x(h_i(s))\, ds + f(t), \quad t \in [a, \infty[,$$

и пусть $R_i^{(k)}(\cdot, \cdot)$ — его резольвентные ядра. Положим

$$C^{(k)}(s_2, s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \sum_{i=1}^{m} R_i^{(k)}(s_2, \tau) d\tau + E. \tag{22}$$

Лемма 2. $\lim\limits_{k \to \infty} \|C(s_2, s_1) - C^{(k)}(s_2, s_1)\| = 0.$

Возьмем теперь некоторую монотонную бесконечно малую последовательность положительных рациональных чисел $\sigma^{(l)}$ ($l = 1, 2, \ldots$), и пусть $g_i^{(l)}$ — вычислимые функции такие, что

$$\max_i \operatorname{vrai} \sup_{t \in [0, \omega[} |g_i(t) - g_i^{(l)}(t)| \leq \sigma^{(l)}, \tag{23}$$

и удовлетворяющие тем же условиям, что и g_i.

Зафиксируем некоторое $k \in N$ и наряду с уравнением

$$x(t) = \int_{s_1}^{t} \sum_{i=1}^{m} \chi(t,s) A_i^{(k)}(s) x(h_i(s))\, ds + f(t), \qquad t \in [s_1, s_2],$$

рассмотрим уравнение

$$x(t) = \int_{s_1}^{t} \sum_{i=1}^{m} \chi(t,s) A_i^{(k)}(s) x(h_i^{(l)}(s))\, ds + f(t), \quad t \in [s_1, s_2], \tag{24}$$

где $h_i^{(l)}(s) \triangleq s - g_i^{(l)}(s)$. Подобно (22), положим $C^{(kl)}(s_2,s_1) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \sum\limits_{i=1}^{m} R_i^{(kl)}(s_2,s)ds + E$, где $R_i^{(kl)}(\cdot,\cdot)$ — резольвентные ядра уравнения (24).

Лемма 3. *При фиксированном $k \in N$*

$$\lim_{l\to\infty} \|C^{(k)}(s_2,s_1) - C^{(kl)}(s_2,s_1)\| = 0.$$

Далее, для произвольных $k,l,p \in N$ положим $R_j^{(klp)}(s_2,s) = \sum\limits_{i=1}^{p} K_j^{(kli)}(s_2,s)$, $s \in [0,s_2]$, где $K_j^{(kli)}(\cdot,\cdot)$ — i-е итерированное ядро уравнения вида (3) с ядрами $K_j^{(k)}(\cdot,\cdot)$ $(K_j^{(k)}(t,s) \equiv \chi(t,s)A_j^{(k)}(s)$, $j = 1,\dots,m)$;

$$C^{(klp)}(s_2,s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \sum_{j=1}^{m} R_j^{(klp)}(s_2,s)ds + E. \tag{25}$$

Лемма 4. *При фиксированных $k,l \in N$*

$$\lim_{p\to\infty} \|C^{(kl)}(s_2,s_1) - C^{(klp)}(s_2,s_1)\| = 0.$$

Наконец, возьмем некоторую монотонную бесконечно малую последовательность положительных рациональных чисел $\{\sigma_n\}$, $n = 1,2,\dots$, и свяжем с ней последовательность матриц $\{C^{(n)}(s_2,s_1)\}$ следующим образом.

Для каждого $n \in N$ подберем наименьшие числа $k_n, l_n, p_n \in N$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|C(s_2,s_1) - C^{(k_n l_n p_n)}(s_2,s_1)\| < \sigma_n$ (сделать это можно ввиду лемм 2–4), и положим $C^{(k_n l_n p_n)}(s_2,s_1) = C^{(n)}(s_2,s_1)$. Получим $\|C(s_2,s_1) - C^{(n)}(s_2,s_1)\| < \sigma_n$.

Дальнейшее изложение просто копирует последнюю часть статьи [8] (начиная с леммы 3), в которой вместо U и U_{kl} надо взять $C(s_2,s_1)$ и $C^{(n)}(s_2,s_1)$ соответственно. Поэтому приведем лишь заключительное утверждение.

Теорема 7. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta \in]0,1[$ — заданные числа, $\lambda^{(1)}$ и $\lambda_n^{(1)}$ — наибольшие по модулю собственные числа матриц $C(s_2,s_1)$ и $C^{(n)}(s_2,s_1)$ соответственно, $\widetilde{\lambda}_n > 0$ — приближенное значение $|\lambda_n^{(1)}|$ такое, что $\widetilde{\lambda}_n - \varepsilon/2 < |\lambda_n^{(1)}| + \varepsilon/2$;*[1] *$\lambda_n \triangleq \widetilde{\lambda}_n + \varepsilon$; m_n — наименьшее натуральное число такое, что $\left\|\left(\frac{1}{\lambda_n} C^{(n)}(s_2,s_1)\right)^{m_n}\right\| < \delta$, $q_n \triangleq \left\|\left(\frac{1}{\lambda_n} C^{(n)}(s_2,s_1)\right)^{m_n}\right\|$, $\alpha_n \triangleq \max\limits_{0\le j\le m_n-1} \left\|\left(\frac{1}{\lambda_n} C^{(n)}(s_2,s_1)\right)^{j}\right\| \frac{m_n}{\lambda_n}$. Если при некотором натуральном n выполнено неравенство*

$$\sigma_n \alpha_n / (1 - q_n) < 1, \tag{26}$$

то имеет место оценка (11), где α определено равенством

$$\alpha = (1/\omega) \ln(\widetilde{\lambda}_n + \varepsilon). \tag{27}$$

Замечание 1. Конструктивное исследование уравнения (1) теперь можно разбить на следующие этапы:

1) построение вычислимых матриц $A_i^{(k)}$ и запаздываний $g_i^{(l)}$, удовлетворяющих неравенствам (21) и (23) соответственно;
2) построение матрицы $C^{(n)}(s_2,s_1)$, определяемой равенством (25);

[1] Число $\widetilde{\lambda}_n$ можно найти, например, QR-методом ([9], с. 176).

3) определение постоянных α_n и q_n, входящих в неравенство (26), и проверка этого неравенства;
4) определение показателя α по формуле (27).

Этапы 2)–4) этой схемы могут быть реализованы средствами программного комплекса “Maple”.

Замечание 2. Отметим, что уравнение (1) может являться хорошей моделью многих реальных процессов (см., напр., [10]).

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 277 с.
2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – М.: Наука, 1971. – 296 с.
3. Винокуров В.Р. *Некоторые вопросы теории устойчивости интегральных уравнений Вольтерра.* III // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 4. – С. 20–31.
4. Логунов А.И. *К вопросу об интегральных неравенствах для уравнений типа Вольтерра с запаздывающим аргументом* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 150. – № 2. – С. 256–258.
5. Барбашин Е.А. *Введение в теорию устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 223 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: ГИФМЛ, 1958. – 678 с.
7. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.
8. Абдрахманов В.Г., Сапрыкин Е.Ф., Смолин Ю.Н. *Об устойчивости решения задачи Коши для периодического функционально-дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 6. – С. 3–11.
9. Вержбицкий В.М. *Основы численных методов.* – М.: Высш. школа, 2002. – 848 с.
10. Tischler A., Bellman D. *Combustion instability in an acid–heptane rocket with a pressurized-gas propellant pumping system* // Techn. Notes. — USA: NASA. – 1953. – № 2936. – P. 201–216.

Уфимский государственный
авиационно-технический университет

Магнитогорский государственный
университет

Поступила
14.07.2003