ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 514.755

Т.Б. ЖОГОВА

ПРОЕКТИВНОЕ И КОРРЕЛЯТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ СЕМЕЙСТВ L^m_{2n-1}

Работа является продолжением исследований автора проективного изгибания семейств L^m_{2n-1} [1] и посвящена исследованию необходимых и достаточных условий проективного изгибания 2-го порядка семейств L^m_{2n-1}. Вводятся понятия коррелятивного изгибания погруженного линейчатого многообразия в P_n и линейного элемента семейств L^m_{2n-1}, исследуется роль такого элемента при проективном и коррелятивном изгибании. Рассматривается классическое проективное изгибание Фубини–Картана ([2], гл. 5, п. 55, с. 102).

Условимся, что по индексам i, j суммирования нет, и если они находятся в одном и том же выражении, то не принимают равные значения. По другим индексам всегда проводится суммирование. Все индексы принимают значения от 1 до n включительно.

1. *Основная теорема.* В проективном пространстве P_{2n-1} введем проективный репер $\{A_i, A_{n+i}\}$ с инфинитезимальными перемещениями $dA_i = \omega_i^p A_p + \omega_i^{n+p} A_{n+p}$, $dA_{n+i} = \omega_{n+i}^p A_p + \omega_{n+i}^{n+p} A_{n+p}$ и известными уравнениями структуры проективного пространства.

Как и в работе [1], поместим точки A_i в фокусы $(n-1)$-плоскости $L_{n-1} = (A_1 \dots A_n)$, которая описывает семейство L^m_{2n-1}. Положим $\omega_i = \omega_i^{n+i}$ и определим фокальное направление фокуса A_i уравнением $\omega_i = 0$. За независимые формы семейства L^m_{2n-1} примем ω_k, $k = \overline{1,m}$, $2 \le m \le n$. Отнеся семейство L^m_{2n-1} к реперу 1-го порядка, получим

$$\omega_i^{n+j} = 0. \tag{1}$$

Аналогично, семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$, которое изгибанием 2-го порядка наложимо на семейство L^m_{2n-1}, отнесем к реперу $\{B_i, B_{n+i}\}$ 1-го порядка с инфинитезимальными перемещениями $dB_i = \Omega_i^p B_p + \Omega_i^{n+p} B_{n+p}$, $dB_{n+i} = \Omega_{n+i}^p B_p + \Omega_{n+i}^{n+p} B_{n+p}$. Тогда будут иметь место уравнения

$$\Omega_i^{n+j} = 0. \tag{2}$$

Далее будем полагать $\Omega_i = \Omega_i^{n+i}$, $\widetilde{\omega}_\alpha^\beta = \Omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\beta$, $\alpha, \beta = \overline{1,2n}$.

Как известно [1], при изгибании 2-го порядка изгибаемое семейство L^m_{2n-1} вместе со своим изгибанием $\overline{L}^m_{2n-1}$ определяется системой уравнений (1), (2) и уравнениями Пфаффа

$$\widetilde{\omega}_i = 0, \quad \widetilde{\omega}_i^i - \widetilde{\omega}_{n+i}^{n+i} = 0, \quad \widetilde{\omega}_i^j = 0, \quad \widetilde{\omega}_{n+i}^{n+j} = 0.$$

Продолжая систему (1) и используя лемму Картана, получим

$$\omega_i^j = a_i^j \omega_j + c^{\,j}_{\,i} \omega_i, \quad \omega_{n+i}^{n+j} = b_i^j \omega_i - c^{\,j}_{\,i} \omega_j.$$

Аналогичные уравнения имеют место и для семейства $\overline{L}^m_{2n-1}$. Система функций $\{a_i^j, b_i^j, c^{\,j}_{\,i}\}$ образует фундаментальный объект 2-го порядка семейства L^m_{2n-1}. Доказана

Теорема 1. *Семейства L^m_{2n-1} и $\overline{L}^m_{2n-1}$ наложимы проективным изгибанием 2-го порядка тогда и только тогда, когда их фундаментальные объекты 2-го порядка совпадают.*

Следствие. Если семейства L^m_{2n-1} и $\overline{L}^m_{2n-1}$ наложимы проективным изгибанием 2-го порядка, то их соответствующие абсолютные инварианты и инвариантные формы, охватываемые фундаментальными объектами 2-го порядка, совпадают, а относительные инварианты и инвариантные формы пропорциональны.

Замечание. Накладывая на инварианты или инвариантные формы, охваченные фундаментальным объектом 2-го порядка семейства L^m_{2n-1}, некоторые условия, будем получать различные классы семейств L^m_{2n-1}. Два семейства L^m_{2n-1} и $\overline{L}^m_{2n-1}$ могут допускать проективное изгибание 2-го порядка, если они принадлежат одному и тому же классу.

2. *Коррелятивное изгибание.* Рассмотрим r-членную группу Ли с базисными левоинвариантными формами ω^β_α, удовлетворяющими уравнениям структуры Картана

$$d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, n+1}.$$

Для этой группы Ли можно указать два линейных однородных транзитивных представления. Первое из них есть проективное пространство n измерений P_n с репером $\{A_\alpha\}$. Имеем вполне интегрируемую систему уравнений

$$dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta, \quad \sum_{\alpha=1}^{n+1} \omega^\alpha_\alpha = 0.$$

Вторе пространство представления — это n-мерное проективное пространство $\widetilde{P}_n$ с корепером $\{\widetilde{A}^\alpha\}$. Имеем вполне интегрируемую систему уравнений

$$d\widetilde{A}^\alpha = -\omega^\alpha_\beta \widetilde{A}^\beta, \quad \sum_{\alpha=1}^{n+1} \omega^\alpha_\alpha = 0.$$

Репер $\{A_\alpha\}$ можно рассматривать как корепер, полагая $A^\alpha = (-1)^\alpha (A_1 \dots A_{\alpha-1} A_{\alpha+1} \dots A_{n+1})$ (не суммировать). Аналогично, корепер можно рассматривать как репер.

Определение 1. Корреляцию $K(A_\alpha) = A^\alpha$ назовем естественной.

В проективном пространстве P_n наряду с репером $\{A_\alpha\}$ введем корепер $\{\overline{A}^\alpha\}$ так, что $d\overline{A}^\alpha = -\Omega^\alpha_\beta \overline{A}^\beta$, $d\Omega^\beta_\alpha = \Omega^\gamma_\alpha \wedge \Omega^\beta_\gamma$. Тогда естественная корреляция индуцирует репер $\{\overline{A}_\alpha\}$.
Рассматривая аналитические точки и коточки как $(n+1)$-мерные векторы, заключаем, что любая точка или коточка пространства P_n является линейной комбинацией точек репера или коточек корепера; коэффициенты этой линейной комбинации называются координатами данной точки или коточки относительно данного репера или корепера.

Определение 2. Точку M_1 и коточку M^1 назовем идентичными, если относительно некоторого репера или корепера их соответствующие однородные координаты равны; этот факт будем записывать $M_1 = M^1$.

Аналогичное определение идентичности имеет место для аналитической m-плоскости и m-коплоскости.

Определение 3. Репер и корепер называются идентичными, если установлена биекция, при которой точки репера идентичны соответствующим коточкам корепера.

Например, в естественной корреляции репер и корепер идентичны.

Теорема 2. *Для любого многообразия L, погруженного в P_n, существует такое оснащение, что корреляция на многообразии L и его оснащении переводит систему дифференциальных уравнений, определяющую многообразие L, в себя.*

Определение 4. Корреляцию на многообразии L назовем внутренней, если она переводит систему уравнений многообразия L в себя.

В P_n рассмотрим k-параметрическое семейство m-плоскостей $(L_m)_k$, отнесенное к реперу $\{A_\alpha\}$, где $L_m = (A_1 \dots A_{m+1})$, $k < (m+1)(n-m)$, $m < n$. Аналогично, семейство $(\overline{L}_m)_k$ отнесем к реперу $\{\overline{A}_\alpha\}$, где $\overline{L}_m = (\overline{A}_1 \dots \overline{A}_{m+1})$. Внутреннюю корреляцию на многообразии $(\overline{L}_m)_k$ можно выбрать так, чтобы она базировалась на естественной корреляции $K(\overline{A}_\alpha) = \overline{A}^\alpha$. Тогда получим многообразие $(\overline{L}^m)_k$, где $\overline{L}^m = (\overline{A}^1 \dots \overline{A}^{m+1})$, двойственное многообразию $(\overline{L}_m)_k$.

Рассмотрим проективное преобразование Π, переводящее корепер $\{\overline{A}^\alpha\}$ в корепер $\{\widetilde{A}^\alpha\}$, идентичный реперу $\{A_\alpha\}$ так, что $\Pi(\overline{A}^\alpha) = \widetilde{A}^\alpha = A_\alpha$. Таким образом, имеем корреляцию $\overline{K} = \Pi K$, переводящую репер $\{\overline{A}_\alpha\}$ в корепер $\{\widetilde{A}^\alpha\}$ так, что $\overline{K}(\overline{A}_\alpha) = \widetilde{A}^\alpha$, $\overline{K}(\overline{L}_m) = \widetilde{L}^m = L_m$.

Определение 5. Будем говорить, что многообразия $(L_m)_k$ и $(\widetilde{L}^m)_k$ имеют аналитическое касание порядка r, если

$$\widetilde{L}^m + \dots + \frac{1}{r!} d^r \widetilde{L}^m = (\theta_0 + \dots + \theta_r)\Big(L_m + \dots + \frac{1}{r!} d^r L_m\Big), \tag{3}$$

где θ_l — скалярные множители соответствующего порядка малости.

Определение 6. Многообразия $(L_m)_k$ и $(\overline{L}_m)_k$ называются коррелятивно наложимыми порядка r, если существует такая корреляция $\overline{K}(\overline{L}_m)_k = (\widetilde{L}^m)_k$, при которой они имеют аналитическое касание порядка r.

3. *Коррелятивное изгибание семейств* L^m_{2n-1}. Как и в п. 1 рассмотрим семейства L^m_{2n-1} и $\overline{L}^m_{2n-1}$. Так как $(n-1)$-плоскость $\overline{L}_{n-1} = (B_1 \dots B_n)$, описывающая семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$, является двойственной сама себе, то для определения внутренней корреляции семейства $\overline{L}^m_{2n-1}$ достаточно фокусу B_i поставить в соответствие его фокальную гиперплоскость

$$\overline{L}^i_{2(n-1)} = (B_1 \dots B_{n+i-1} B_{n+i+1} \dots B_{2n}) = (-1)^{n+i} B^{n+i},$$

а каждой точке B_{n+i} — гиперплоскость

$$B^i = (-1)^i (B_1 \dots B_{i-1} B_{i+1} \dots B_{2n}).$$

Тогда семейство $\widehat{L}^m_{2n-1}$, двойственное семейству $\overline{L}^m_{2n-1}$, будет описываться $(n-1)$-коплоскостью $\widehat{L}^{n-1} = (B^{n+1} \dots B^{2n})$.

При коррелятивном изгибании 2-го порядка семейств L^m_{2n-1} к системе (1), (2) в силу (3) присоединяются уравнения Пфаффа

$$\Omega_i + \omega_i = 0, \quad \widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^{n+i}_{n+i} = 0, \quad \Omega^{n+i}_{n+j} = -\omega^j_i, \quad \Omega^i_j = -\omega^{n+j}_{n+i}. \tag{4}$$

Исследование системы (1), (2), (4) показывает, что справедливы следующие три теоремы.

Теорема 3. *С произволом $2n-3$ функций двух аргументов существует семейство L^2_{2n-1}, допускающее коррелятивное изгибание 2-го порядка.*

Теорема 4. *При $n > 2$ с произволом $3n^2 - n$ функций одного аргумента существует семейство L^n_{2n-1}, допускающее коррелятивное изгибание 2-го порядка.*

Теорема 5. *При $m \neq 2, n$ и $n > 2$ существуют с произволом $n - m$ функций m аргументов семейства L^m_{2n-1}, допускающие коррелятивное изгибание 2-го порядка.*

4. *Линейный элемент семейств* L^m_{2n-1}. Рассмотрим симметрические абсолютные инвариантные формы $\Phi_{ij} = \varphi_{ij}\varphi_{ji}/\omega_i\omega_j$, где $\varphi_{ij} = \omega^j_i \omega_j + \omega^{n+j}_{n+i}\omega_i$ — относительные инвариантные формы семейства L^m_{2n-1}.

Определение 7. Абсолютную инвариантную форму $\Phi = \sum\limits_{(ij)}^{n} \Phi_{ij}$ назовем линейным проективным элементом семейства L^m_{2n-1}, а формы Φ_{ij} — его компонентами.

Рассмотрим точку $M_{ij} = A_i + \lambda_{ij} A_j$. Из условия $(M_{ij} + dM_{ij} + d^2 M_{ij}, L^j_{2(n-1)}) = 0$, где $L^j_{2(n-1)}$ — фокальная гиперплоскость фокуса A_j, выделяя главную часть в коэффициенте при λ_{ij}, получим равенство $\lambda_{ij} = -\varphi_{ij}/\omega_j$. Таким образом, $(A_i A_j M_{ij} M_{ji}) = \lambda_{ij}\lambda_{ji} = \Phi_{ij}$. Это сложное отношение четырех точек характеризует геометрический смысл форм Φ_{ij}.

Теорема 6. *Необходимым и достаточным условием проективной или коррелятивной наложимости 2-го порядка двух семейств L^m_{2n-1} является равенство их линейных проективных элементов.*

Литература

1. Жогова Т.Б. *Проективное изгибание второго порядка семейств L^m_{2n-1}* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 9. – С. 13–16.
2. Фиников С.П. *Теория пар конгруэнций.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 443 с.

Нижегородский государственный
педагогический университет

Поступили
полный текст 09.02.2000
краткое сообщение 08.11.2000