ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 517.946

Т.В. ЧЕКМАРЁВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Введение. Для системы дифференциальных уравнений

$$\Phi_i\Big(x, y, z, w, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = 0, \quad i = 1, 2,$$

где z, w — неизвестные функции независимых переменных x и y, задача Коши состоит в отыскании решения системы, которое на заданной линии $L : x = x^{(0)}(s)$, $y = y^{(0)}(s)$, $\alpha < s < \beta$, удовлетворяло бы начальным условиям

$$z(x^{(0)}(s), y^{(0)}(s)) = z^{(0)}(s), \quad w(x^{(0)}(s), y^{(0)}(s)) = w^{(0)}(s).$$

В работах [1], [2] доказано, что при существовании у функций Φ_i, $i = 1, 2$, непрерывных частных производных до третьего порядка включительно и выполнении других естественных условий задача Коши имеет единственное решение в достаточно малой окрестности L. В данной работе доказывается существование и единственность решения задачи Коши при наличии у функций Φ_i, $i = 1, 2$, лишь непрерывных частных производных до второго порядка включительно. Кроме того, дается точное описание области, в которой существует решение. Получение данных новых результатов достигается с помощью использования не употребляемых в работах [1], [2] канонических форм линейных и квазилинейных систем уравнений.

1. *Приведение к каноническому виду линейной системы уравнений.* Пусть дана система уравнений

$$A_i\frac{\partial z}{\partial x} + B_i\frac{\partial z}{\partial y} + C_i\frac{\partial w}{\partial x} + D_i\frac{\partial w}{\partial y} = f_i, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

где $f_i = \varphi_i - K_i z - L_i w$, $i = 1, 2$, A_i, B_i, C_i, D_i, K_i, L_i, φ_i, $i = 1, 2$, — функции аргументов x и y. Вводя новые независимые переменные $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ и используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta},$$

линейную систему (1) приводим к виду

$$\Big(A_i\frac{\partial \xi}{\partial x} + B_i\frac{\partial \xi}{\partial y}\Big)\frac{\partial z}{\partial \xi} + \Big(A_i\frac{\partial \eta}{\partial x} + B_i\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big)\frac{\partial z}{\partial \eta} + \\ + \Big(C_i\frac{\partial \xi}{\partial x} + D_i\frac{\partial \xi}{\partial y}\Big)\frac{\partial w}{\partial \xi} + \Big(C_i\frac{\partial \eta}{\partial x} + D_i\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big)\frac{\partial w}{\partial \eta} = f_i, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Умножая первое и второе уравнения системы (2) соответственно на $A_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_2\frac{\partial\eta}{\partial y}$, $A_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_1\frac{\partial\eta}{\partial y}$ и производя вычитание, получаем

$$\begin{aligned}\Big[\Big(A_1\frac{\partial\xi}{\partial x}+B_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big)\Big(A_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)-\Big(A_2\frac{\partial\xi}{\partial x}+B_2\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big)\Big(A_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)\Big]\frac{\partial z}{\partial\xi}+\\ +\Big[\Big(C_1\frac{\partial\xi}{\partial x}+D_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big)\Big(A_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)-\Big(C_2\frac{\partial\xi}{\partial x}+D_2\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big)\Big(A_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)\Big]\frac{\partial w}{\partial\xi}+\\ +\Big[\Big(C_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+D_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)\Big(A_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)-\Big(C_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+D_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)\Big(A_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)\Big]\frac{\partial w}{\partial\eta}=\\ =\Big(A_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)f_1-\Big(A_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)f_2.\end{aligned}\quad (3)$$

Пусть для функций ξ, η выполняются соотношения

$$\frac{C_1\frac{\partial\xi}{\partial x}+D_1\frac{\partial\xi}{\partial y}}{A_1\frac{\partial\xi}{\partial x}+B_1\frac{\partial\xi}{\partial y}}=\frac{C_1\frac{\partial\xi}{\partial x}+D_2\frac{\partial\xi}{\partial y}}{A_2\frac{\partial\xi}{\partial x}+B_2\frac{\partial\xi}{\partial y}}\equiv\mu',\quad (4)$$

$$\frac{C_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+D_1\frac{\partial\eta}{\partial y}}{A_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_1\frac{\partial\eta}{\partial y}}=\frac{C_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+D_2\frac{\partial\eta}{\partial y}}{A_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_2\frac{\partial\eta}{\partial y}}\equiv\mu.\quad (5)$$

В силу (4) и (5) уравнение (3) принимает вид

$$(A_1B_2-A_2B_1)\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial z}{\partial\xi}+\mu'\frac{\partial w}{\partial\xi}\Big)=\Big(A_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)f_1-\Big(A_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)f_2$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}+\mu'\frac{\partial w}{\partial\xi}=F,\quad (6)$$

где

$$F=\frac{\Big(A_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)f_1-\Big(A_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+B_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)f_2}{(A_1B_2-A_2B_1)\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\Big)}.$$

Для выполнения условий (4), (5) необходимо и достаточно, чтобы функции ξ и η удовлетворяли дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\nu'\frac{\partial\xi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}+\nu\frac{\partial\eta}{\partial y}=0,\quad (7)$$

где ν и ν' — корни уравнения

$$\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}\nu^2-\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A_1 & D_1\\ A_2 & D_2\end{vmatrix}\right)\nu+\begin{vmatrix}B_1 & D_1\\ B_2 & D_2\end{vmatrix}=0.\quad (8)$$

Относительно уравнения (8) будем предполагать, что его корни ν и ν' различны и вещественны. Это означает, что система (1) имеет гиперболический тип. Из (4), (5), (7) следует

$$\begin{aligned}\mu'&=\frac{-C_1\nu'+D_1}{-A_1\nu'+B_1}=\frac{-C_2\nu'+D_2}{-A_2\nu'+B_2},\\ \mu&=\frac{-C_1\nu+D_1}{-A_1\nu+B_1}=\frac{-C_2\nu+D_2}{-A_2\nu+B_2}.\end{aligned}\quad (9)$$

Таким же образом, как и уравнение (6), получается уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial\eta}+\mu\frac{\partial w}{\partial\eta}=F',\quad (10)$$

где
$$F' = \frac{-\left(A_2\frac{\partial\xi}{\partial x} + B_2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)f_1 + \left(A_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + B_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)f_2}{(A_1B_2 - A_2B_1)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}.$$
С помощью введения новых неизвестных функций $z_1 = z + \mu' w$, $w_1 = z + \mu w$, при условии дифференцируемости функций μ и μ', система уравнений (6), (10) преобразуется в систему вида
$$\frac{\partial z_1}{\partial\xi} = a_1z_1 + b_1w_1 + c_1, \quad \frac{\partial w_1}{\partial\eta} = a_2z_1 + b_2w_1 + c_2.$$
Далее с помощью подстановок
$$z_1 = z_2\exp\int_{\xi_0}^{\xi} a_1(t,\eta)dt, \quad w_1 = w_2\exp\int_{\eta_0}^{\eta} b_2(\xi,t)dt$$
она приводится к каноническому виду
$$\frac{\partial z_2}{\partial\xi} = aw_2 + A, \quad \frac{\partial w_2}{\partial\eta} = bz_2 + B.$$
Для данной канонической системы формулы решения задачи Коши содержатся в ([3], с. 99-100).

2. *Приведение к каноническому виду квазилинейной системы уравнений.* Для квазилинейной системы используем обозначение (1), считая при этом, что A_i, B_i, C_i, D_i, φ_i, $i=1,2$, являются функциями аргументов x, y, z, w и $K_i = L_i = 0$, $i=1,2$. Предположим, что у такой системы имеется решение $z = z(x,y)$, $w = w(x,y)$, и переменные z и w заменены в (1) функциями $z(x,y)$, $w(x,y)$. Это означает, что систему (1) можно рассматривать как совокупность двух тождеств относительно переменных x и y. По-прежнему предполагаем, что корни ν, ν' уравнения (8) вещественны, различны
$$(A_1B_2 - A_2B_1)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \neq 0.$$
Тогда система тождеств (1) равносильна системе тождеств (6), (10), в которых величины x и y определяются системой (7) как функции аргументов ξ и η. Используя равенства
$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial\eta}\Big/\Delta, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial\eta}\Big/\Delta, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial\xi}\Big/\Delta, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\Big/\Delta, \quad \Delta = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)},$$
систему (7) и формулы для F, F' запишем в виде
$$\frac{\partial y}{\partial\xi} - \nu\frac{\partial x}{\partial\xi} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial\eta} - \nu'\frac{\partial x}{\partial\eta} = 0, \tag{11}$$
$$F = \frac{\left(-A_2\frac{\partial y}{\partial\xi} + B_2\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)f_1 - \left(-A_1\frac{\partial y}{\partial\xi} + B_1\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)f_2}{A_1B_2 - A_2B_1},$$
$$F' = \frac{-\left(-A_2\frac{\partial y}{\partial\eta} - B_2\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)f_1 + \left(A_1\frac{\partial y}{\partial\eta} - B_1\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)f_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$
Обозначив
$$\frac{\partial x}{\partial\xi} = \Lambda, \quad \frac{\partial x}{\partial\eta} = \Lambda', \quad \frac{\partial z}{\partial\xi} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial\eta} = q, \quad \frac{\partial w}{\partial\xi} = u, \quad \frac{\partial w}{\partial\eta} = v, \tag{12}$$
вместо (11), (6), (10) имеем
$$\frac{\partial x}{\partial\xi} = \Lambda, \quad \frac{\partial x}{\partial\eta} = \Lambda', \quad \frac{\partial y}{\partial\xi} = \nu\Lambda, \quad \frac{\partial y}{\partial\eta} = \nu'\Lambda', \tag{13}$$
$$p + \mu' u = F_0\Lambda, \quad q + \mu v = F_0'\Lambda',$$

где

$$F_0 = \frac{(-A_2\nu + B_2)f_1 - (-A_1\nu + B_1)f_2}{A_1B_2 - A_2B_1},$$
$$F_0' = \frac{(-A_2\nu' + B_2)f_1 - (-A_1\nu' + B_1)f_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Дифференцируя (13) по ξ и η, с учетом равенства $\frac{\partial^2 T}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial^2 T}{\partial\eta\partial\xi}$ применительно к функциям x, y, z, w приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta} = \frac{\partial\Lambda'}{\partial\xi}, \quad \nu\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta} + \Lambda\frac{\partial\nu}{\partial\eta} = \nu'\frac{\partial\Lambda'}{\partial\xi} + \Lambda'\frac{\partial\nu'}{\partial\xi},\\
\frac{\partial p}{\partial\eta} + \mu'\frac{\partial u}{\partial\eta} = \Lambda\frac{\partial F_0}{\partial\eta} + F_0\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta} - u\frac{\partial\mu'}{\partial\eta},\\
\frac{\partial q}{\partial\xi} + \mu\frac{\partial v}{\partial\xi} = \Lambda\frac{\partial F_0}{\partial\eta} + F_0\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta} - u\frac{\partial\mu'}{\partial\eta},\\
\frac{\partial q}{\partial\xi} + \mu\frac{\partial v}{\partial\xi} = \Lambda'\frac{\partial F_0'}{\partial\xi} + F_0'\frac{\partial\Lambda'}{\partial\xi} - v\frac{\partial\mu}{\partial\xi},\\
\frac{\partial p}{\partial\eta} + \mu\frac{\partial u}{\partial\eta} = \Lambda'\frac{\partial F_0'}{\partial\xi} + F_0'\frac{\partial\Lambda'}{\partial\xi} - v\frac{\partial\mu}{\partial\xi}.
\end{gathered} \tag{14}$$

Из (14) находим

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta} = \frac{\partial\Lambda'}{\partial\xi} = P, \quad \frac{\partial p}{\partial\eta} = \frac{\partial q}{\partial\xi} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{\partial v}{\partial\xi} = R, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\nu - \nu'}\left(\Lambda'\frac{\partial\nu'}{\partial\xi} - \Lambda\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\right),\\
Q &= \frac{\mu F_0 - \mu' F_0'}{(\nu-\nu')(\mu-\mu')}\left(\Lambda'\frac{\partial\nu'}{\partial\xi} - \Lambda\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\mu-\mu'}\left(\mu\Lambda\frac{\partial F_0}{\partial\eta} - \mu'\Lambda'\frac{\partial F_0'}{\partial\xi} - u\mu\frac{\partial\mu'}{\partial\eta} + v\mu'\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\right),\\
R &= \frac{F_0' - F_0}{(\nu-\nu')(\mu-\mu')}\left(\Lambda'\frac{\partial\nu'}{\partial\xi} - \Lambda\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\mu-\mu'}\left(\Lambda'\frac{\partial F_0'}{\partial\xi} - \Lambda\frac{\partial F_0}{\partial\eta} - v\frac{\partial\mu}{\partial\xi} + u\frac{\partial\mu'}{\partial\eta}\right).
\end{aligned}$$

В формулах для P, Q, R предполагается, что производные $\frac{\partial\nu}{\partial\eta}$, $\frac{\partial\nu'}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\mu}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\mu'}{\partial\eta}$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial\xi} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\xi} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial\xi} = \frac{\partial T}{\partial x}\Lambda + \frac{\partial T}{\partial y}\nu\Lambda + \frac{\partial T}{\partial z}p + \frac{\partial T}{\partial w}u,\\
\frac{\partial T}{\partial\eta} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\eta} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial\eta} = \frac{\partial T}{\partial x}\Lambda' + \frac{\partial T}{\partial y}\nu'\Lambda' + \frac{\partial T}{\partial z}q + \frac{\partial T}{\partial w}v.
\end{aligned}$$

Тогда функции P, Q, R можно рассматривать как функции вектора $\vec{\omega}(\xi,\eta)$ с координатами $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$, $\Lambda(\xi,\eta)$, $\Lambda'(\xi,\eta)$, $z(\xi,\eta)$, $w(\xi,\eta)$, $p(\xi,\eta)$, $q(\xi,\eta)$, $u(\xi,\eta)$, $v(\xi,\eta)$: $P = P(\vec{\omega}(\xi,\eta))$, $Q = Q(\vec{\omega}(\xi,\eta))$, $R = R(\vec{\omega}(\xi,\eta))$. Пополняя систему (15) уравнениями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial\xi} &= \Lambda(\xi,\eta), \quad &\frac{\partial y}{\partial\xi} &= \nu(\vec{\omega}(\xi,\eta))\Lambda(\xi,\eta),\\
\frac{\partial z}{\partial\xi} &= p(\xi,\eta), \quad &\frac{\partial w}{\partial\xi} &= u(\xi,\eta),
\end{aligned}$$

приходим к канонической системе уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial x}{\partial \xi}=\Lambda(\xi,\eta), \quad \frac{\partial y}{\partial \xi}=\nu(\omega(\xi,\eta))\Lambda(\xi,\eta),\\
\frac{\partial z}{\partial \xi}=p(\xi,\eta), \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}=u(\xi,\eta),\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta}=\frac{\partial \Lambda'}{\partial \xi}=P(\vec{\omega}(\xi,\eta)),\\
\frac{\partial p}{\partial \eta}=\frac{\partial q}{\partial \xi}=Q(\vec{\omega}(\xi,\eta)),\\
\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial v}{\partial \xi}=R(\vec{\omega}(\xi,\eta)).
\end{gathered} \tag{16}$$

Пополняя систему (15) уравнениями

$$\begin{gathered}
\frac{\partial x}{\partial \eta}=\Lambda'(\xi,\eta), \quad \frac{\partial y}{\partial \eta}=\nu'(\vec{\omega}(\xi,\eta))\Lambda'(\xi,\eta),\\
\frac{\partial z}{\partial \eta}=q(\xi,\eta), \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}=v(\xi,\eta),
\end{gathered}$$

приходим к канонической системе

$$\begin{gathered}
\frac{\partial x}{\partial \eta}=\Lambda'(\xi,\eta), \quad \frac{\partial y}{\partial \eta}=\nu'(\vec{\omega}(\xi,\eta))\Lambda'(\xi,\eta),\\
\frac{\partial z}{\partial \eta}=q(\xi,\eta), \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}=v(\xi,\eta),\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta}=\frac{\partial \Lambda'}{\partial \xi}=P(\vec{\omega}(\xi,\eta)),\\
\frac{\partial p}{\partial \eta}=\frac{\partial q}{\partial \xi}=Q(\vec{\omega}(\xi,\eta)),\\
\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial v}{\partial \xi}=Q(\vec{\omega}(\xi,\eta)).
\end{gathered} \tag{17}$$

3. *Постановка задачи Коши для квазилинейной системы уравнений.* Введем ряд обозначений: k_i, $i=1,2,3,4,$ — постоянные, $k_1<k_2<0<k_3<k_4$, Δ ($\overline{\Delta}$) — открытый (замкнутый) треугольник, ограниченный прямыми $y=0$, $y=k_1(x-a)$, $y=k_4(x-b)$ $(a<b)$, D — замкнутая цилиндрическая область переменных $x,y,z,w:(x,y)\in\overline{\Delta}$, $-\infty<z<+\infty$, $-\infty<w<+\infty$.

Отметим условия, при которых будет рассматриваться задача.

a) В области D функции A_i, B_i, C_i, D_i, φ_i, $i=1,2$, непрерывны, ограничены и имеют непрерывные, ограниченные частные производные первого порядка по каждому из аргументов x, y, z, w.

b) В области D выполняются неравенства

$$\begin{gathered}
k_1\le\nu\le k_2, \quad k_3\le\nu'\le k_4, \quad |A_1B_2-A_2B_1|>\delta>0,\\
|B_1-A_1\nu'|>\delta>0, \quad |B_1-A_1\nu|>\delta>0.
\end{gathered}$$

Задача Коши. Требуется найти решение $z=z(x,y)$, $w=w(x,y)$ квазилинейной системы (1) в некоторой области, примыкающей к отрезку (a,b) оси Ox со стороны полуплоскости $y<0$, которое удовлетворяло бы граничным условиям

$$z(x,-0)=z^{(0)}(x), \quad w(x,-0)=w^{(0)}(x), \quad a\le x\le b, \tag{18}$$

где $z^{(0)}(x)$, $w^{(0)}(x)$ — непрерывно дифференцируемые заданные функции.

4. *Решение задачи Коши для квазилинейной системы уравнений.* Введем обозначения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_*, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q_*, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = u_*, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = v_*,$$
$$p_*(x,-0) = p_*^{(0)}(x), \quad q_*(x,-0) = q_*^{(0)}(x),$$
$$u_*(x,-0) = u_*^{(0)}(x), \quad v_*(x,-0) = v_*^{(0)}(x).$$

С помощью подстановки в системе (1)

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w & \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ x & 0 & z^{(0)}(x) & w^{(0)}(x) & p_*^{(0)}(x) & q_*^{(0)}(x) & u_*^{(0)}(x) & v_*^{(0)}(x) \end{pmatrix}$$

получаем систему уравнений с неизвестными функциями $q_*^{(0)}(x)$, $v_*^{(0)}(x)$. Определитель этой системы в силу условия b) отличен от нуля, и функции $q_*^{(0)}(x)$, $v_*^{(0)}(x)$ определяются однозначно. Следовательно, все функции $z_*^{(0)}(x)$, $w_*^{(0)}(x)$, $p_*^{(0)}(x)$, $q_*^{(0)}(x)$, $u_*^{(0)}(x)$, $v_*^{(0)}(x)$ будем считать известными. Начальным условиям (18) соответствуют определенные начальные условия применительно к системам (16), (17). Чтобы установить вид этих условий, заметим, что в системе координат ξ, η координатными линиями являются интегральные линии дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \nu \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \nu'. \tag{19}$$

Учитывая это, установим более конкретную связь между x, y и ξ, η. Пусть $a \le \eta \le \xi \le b$; Γ — интегральная кривая первого уравнения (19), проходящая через точку $(\eta, 0)$ и Γ' — интегральная кривая второго уравнения (19), проходящая через точку $(\xi, 0)$, (x, y) — точка пересечения кривых Γ и Γ'. При этом точке (x, y) припишем новые координаты (ξ, η). В силу первых двух условий b) соответствие между (x, y) и (ξ, η) является взаимно однозначным. Функции $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ представляют собой решения дифференциальных уравнений (7) и удовлетворяют условиям $\xi(x, 0) = x$, $\eta(x, 0) = x$, $a \le x \le b$. Соответственно этому $x(\xi, \xi) = \xi$, $y(\xi, \xi) = 0$, $a \le \xi \le b$. В данном случае граничным условиям (18) на отрезке (a, b) оси Ox соответствуют следующие граничные условия на отрезке прямой $a \le \eta = \xi \le b$:

$$\begin{gathered}
\Lambda(\xi,\xi) \equiv \Lambda_0(\xi) = \frac{-\nu'}{\nu - \nu'}, \quad \Lambda'(\xi,\xi) \equiv \Lambda'_0(\xi) = \frac{\nu}{\nu - \nu'}, \\
p(\xi,\xi) \equiv p_0(\xi) = -\frac{\nu'}{\nu - \nu'}(p_*^{(0)}(\xi) + \nu q_*^{(0)}(\xi)), \\
q(\eta,\eta) \equiv q_0(\eta) = \frac{\nu}{\nu - \nu'}(p_*^{(0)}(\eta) + \nu' q_*^{(0)}(\eta)), \\
u(\xi,\xi) \equiv u_0(\xi) = -\frac{\nu'}{\nu - \nu'}(u_*^{(0)}(\xi) + \nu v_*^{(0)}(\xi)), \\
v(\eta,\eta) \equiv v_0(\eta) = (v_*^{(0)}(\eta) + \nu' v_*^{(0)}(\eta))\frac{\nu}{\nu - \nu'}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Система дифференциальных уравнений (16) совместно с начальными условиями на линии

$a \le \xi = \eta \le b$ равносильна системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered}
x(\xi,\eta) = \eta + \int_\eta^\xi \Lambda(t,\eta)dt, \quad y(\xi,\eta) = \int_\eta^\xi \nu(\vec{\omega}(t,\eta))\Lambda(t,\eta)dt, \\
z(\xi,\eta) = z_*^{(0)}(\eta) + \int_\eta^\xi p(t,\eta)dt, \quad w(\xi,\eta) = w_*^{(0)}(\eta) + \int_\eta^\xi u(t,\eta)dt, \\
\Lambda'(\xi,\eta) = \Lambda_0'(\eta) + \int_\eta^\xi P(\vec{\omega}(t,\eta))dt, \quad \Lambda(\xi,\eta) = \Lambda_0(\xi) + \int_\xi^\eta P(\vec{\omega}(\xi,\tau))d\tau, \\
p(\xi,\eta) = p_0(\xi) + \int_\xi^\eta Q(\vec{\omega}(\xi,\tau))d\tau, \quad q(\xi,\eta) = q_0(\eta) + \int_\eta^\xi Q(\vec{\omega}(t,\eta))dt, \\
u(\xi,\eta) = u_0(\xi) + \int_\xi^\eta R(\vec{\omega}(\xi,\tau))d\tau, \quad v(\xi,\eta) = v_0(\eta) + \int_\eta^\xi R(\vec{\omega}(t,\eta))dt.
\end{gathered} \tag{21}$$

При выполнении условий a) и b) и достаточно малом значении h система интегральных уравнений (21), что нетрудно доказать, имеет единственное решение в области, ограниченной прямыми $\xi - \eta = 0$, $\xi - \eta = h$ и характеристиками Γ, Γ', исходящими из точек (a,a), (b,b). Это решение при начальных данных на прямой $\xi - \eta = h$ может быть продолжено в область, ограниченную прямыми $\xi - \eta = h$, $\xi - \eta = h'$ $(h < h')$ и теми же характеристиками Γ, Γ'. В результате неограниченного продолжения указанного процесса получим решение системы (21) в треугольнике, ограниченном прямой $\xi - \eta = 0$ и характеристиками Γ, Γ', исходящими из точек (a,a), (b,b). Решение системы интегральных уравнений (21) для системы (16) является решением задачи Коши с указанными начальными условиями на отрезке $a \le \eta = \xi \le b$. Оно также является и решением системы (17) с теми же граничными условиями. Системы (16), (17) получены из системы (1) с помощью обратимых подстановок. Поэтому система функций $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$, $z = z(\xi,\eta)$, $w = w(\xi,\eta)$ выражает собой решение в параметрическом виде задачи Коши с граничными условиями (18) для системы (1). Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *При выполнении условий* a) *и* b) *задача Коши с граничными условиями* (18) *для квазилинейной системы* (1) *имеет единственное решение* $z = z(x,y)$, $w = w(x,y)$ *в области, не задаваемой заранее, ограниченной отрезком* $[a,b]$ *оси* Ox *и интегральными кривыми дифференциальных уравнений* $\frac{dy}{dx} = \nu$, $\frac{dy}{dx} = \nu'$, *выходящими из точек* $(a,0)$, $(b,0)$, *соответствующими решению* $z = z(x,y)$, $w = w(x,y)$. *Отмеченная область существования решения является частью треугольника, ограниченного прямыми* $y = 0$, $y = k_1(x-a)$, $y = k_4(x-b)$, *и содержит в себе как часть треугольник, ограниченный прямыми* $y = 0$, $y = k_2(x-a)$, $y = k_3(x-b)$.

5. *Приведение системы*

$$\Phi_i\left(x,y,z,w,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0, \quad i = 1,2, \tag{22}$$

к каноническому виду. Вводя обозначения $\frac{\partial z}{\partial x} = z_1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z_2$, $\frac{\partial w}{\partial x} = w_1$, $\frac{\partial w}{\partial y} = w_2$, систему (22) запишем в виде

$$\Phi_i(x,y,z,w,z_1,z_2,w_1,w_2) = 0, \quad i = 1,2. \tag{23}$$

Предполагая, что у системы (22) существует решение $z = z(x,y)$, $w = w(x,y)$, условимся (23) рассматривать как систему тождеств относительно независимых переменных x и y. В результате дифференцирования системы (23) по переменным x, y и учета неравенств $\frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial y}$, $\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial y}$ приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\widehat{A}_i\frac{\partial z_1}{\partial x} + \widehat{B}_i\frac{\partial z_1}{\partial y} + \widehat{C}_i\frac{\partial w_1}{\partial x} + \widehat{D}_i\frac{\partial w_1}{\partial y} = f_{i1}, \quad i = 1,2, \\
\widehat{A}_i\frac{\partial z_2}{\partial x} + \widehat{B}_i\frac{\partial z_2}{\partial y} + \widehat{C}_i\frac{\partial w_2}{\partial x} + \widehat{D}_i\frac{\partial w_2}{\partial y} = f_{i2}, \quad i = 1,2,
\end{gathered} \tag{24}$$

где $\widehat{A}_i$, $\widehat{B}_i$, $\widehat{C}_i$, $\widehat{D}_i$, f_{i1}, f_{i2}, $i = 1, 2$, — известные функции аргументов x, y, z, w, z_1, z_2, w_1, w_2. Входящие в (24) системы имеют ту же структуру, что и квазилинейная система (1). Для них аналогами величин ν, ν', μ, μ' являются функции, определяемые уравнением (8) и формулами (9) при условии замены в (8) и (9) функций A_i, B_i, C_i, D_i, $i = 1, 2$, соответственно функциями $\widehat{A}_i$, $\widehat{B}_i$, $\widehat{C}_i$, $\widehat{D}_i$, $i = 1, 2$. С помощью введения новых независимых переменных ξ, η, удовлетворяющих уравнениям (7), (11), система (24) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z_1}{\partial \xi} + \mu' \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = F_{01}\Lambda, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = F'_{01}\Lambda', \\
&\frac{\partial z_2}{\partial \xi} + \mu' \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = F_{02}\Lambda, \quad \frac{\partial z_2}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial w_2}{\partial \eta} = F'_{02}\Lambda',
\end{aligned} \tag{25}
$$

где $\Lambda = \frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\Lambda' = \frac{\partial x}{\partial \eta}$, F_{0i}, F'_{0i}, $i = 1, 2$, — известные функции аргументов x, y, z, w, z_1, z_2, w_1, w_2. Вводя обозначения $\frac{\partial z_i}{\partial \xi} = p_i$, $\frac{\partial z_i}{\partial \eta} = q_i$, $i = 1, 2$, $\frac{\partial w_i}{\partial \xi} = u_i$, $\frac{\partial w_i}{\partial \eta} = v_i$, $i = 1, 2$, имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \xi} = \Lambda, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \nu\Lambda, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \Lambda', \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \nu'\Lambda', \\
&p_i + \mu' u_i = F_{0i}\Lambda, \quad q_i = \mu v_i = F'_{0i}\Lambda', \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{26}
$$

С помощью тех же рассуждений, что и в случае системы (13), приходим к каноническим системам уравнений, являющимся аналогами систем (16), (17). Для определенности выпишем аналог системы (16)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \xi} = \Lambda(\xi, \eta), \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \nu(\vec{\omega}(\xi, \eta))\Lambda(\xi, \eta), \\
&\frac{\partial z}{\partial \xi} = (z_2(\xi, \eta) + \nu(\vec{\omega}(\xi, \eta))z_2(\xi, \eta))\Lambda(\xi, \eta), \\
&\frac{\partial w}{\partial \xi} = [w_1(\xi, \eta) + \nu(\vec{\omega}(\xi, \eta))w_2(\xi, \eta)]\Lambda(\xi, \eta), \\
&\frac{\partial z_i}{\partial \xi} = p_i(\xi, \eta), \quad \frac{\partial w_i}{\partial \xi} = u_i(\xi, \eta), \quad i = 1, 2, \\
&\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} = \frac{\partial \Lambda'}{\partial \xi} = P(\vec{\omega}(\xi, \eta)), \\
&\frac{\partial p_i}{\partial \eta} = \frac{\partial q_i}{\partial \xi} = Q_i(\vec{\omega}(\xi, \eta)), \quad i = 1, 2, \\
&\frac{\partial u_i}{\partial \eta} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = R_i(\vec{\omega}(\xi, \eta)), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{27}
$$

6. *Постановка задачи Коши для системы* (22). Предварительно, сохраняя обозначения п. 3 k_1, k_2, k_3, k_4 ($k_1 < k_2 < k_3 < k_4$), Δ, $\overline{\Delta}$, введем условия, при которых будет рассматриваться задача Коши.

a*) Функции $\Phi_i(x, y, z, w, z_1, z_2, w_1, w_2)$, $i = 1, 2$, в цилиндрической области $D^* : (x, y) \in \Delta$, $-\infty < z < +\infty$, $-\infty < w < +\infty$, $-\infty < z_1 < +\infty$, $-\infty < z_2 < +\infty$, $-\infty < w_1 < +\infty$, $-\infty < w_2 < +\infty$ непрерывны и имеют непрерывные, ограниченные частные производные второго порядка по всем аргументам x, y, z, w, z_1, z_2, w_1, w_2, включая частные производные смешанного типа.

b*) В области D^* корни ν и ν' квадратного уравнения

$$
\begin{vmatrix} \widehat{A}_1 & \widehat{C}_1 \\ \widehat{A}_2 & \widehat{C}_2 \end{vmatrix} \nu^2 - \left(\begin{vmatrix} \widehat{B}_1 & \widehat{C}_1 \\ \widehat{B}_2 & \widehat{C}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \widehat{A}_1 & \widehat{D}_1 \\ \widehat{A}_2 & \widehat{D}_2 \end{vmatrix} \right) \nu + \begin{vmatrix} \widehat{B}_1 & \widehat{D}_1 \\ \widehat{B}_2 & \widehat{D}_2 \end{vmatrix} = 0
$$

вещественны и различны.

c*) В области D^* выполняются неравенства

$$k_1 \le \nu \le k_2, \quad k_3 \le \nu' \le k_4, \quad |\widehat{A}_1\widehat{B}_2 - \widehat{A}_2\widehat{B}_1| > \delta > 0,$$
$$|\widehat{B}_1 - \widehat{A}_1\nu'| > \delta > 0, \quad |\widehat{B}_1 - \widehat{A}_1\nu| > \delta > 0.$$

Задача Коши. Для системы функций $z^{(0)}(x)$, $w^{(0)}(x)$, $z_1^{(0)}(x)$, $z_2^{(0)}(x)$, $w_1^{(0)}(x)$, $w_2^{(0)}(x)$, дважды непрерывно дифференцируемых на сегменте $[a,b]$, для которых выполняются равенства

$$\Phi_i(x,0,z^{(0)}(x),w^{(0)}(x),z_1^{(0)}(x),z_2^{(0)}(x),w_1^{(0)}(x),w_2^{(0)}(x)) = 0, \quad i = 1,2,$$

требуется в некоторой области, примыкающей к отрезку (a,b) оси Ox со стороны полуплоскости $y < 0$, найти решение $z = z(x,y)$, $w = w(x,y)$ системы уравнений (22), удовлетворяющее граничным условиям

$$z(x,-0) = z^{(0)}(x), \quad w(x,-0) = w^{(0)}(x), \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=-0} = z_1^{(0)}(x), \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=-0} = z_2^{(0)}(x),$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y=-0} = w_1^{(0)}(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=-0} = w_2^{(0)}(x), \quad a \le x \le b.$$

7. *Решение задачи Коши для системы уравнений* (22). Используя полученные результаты, относящиеся к системе уравнений (1), ограничимся лишь схемой решения задачи Коши для системы (22). После получения канонической системы (27), исходя из начальных данных для функций z, w, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ на отрезке $a \le x \le b$, $y = 0$, устанавливаем начальные данные для функций x, y, Λ, Λ', z, w, z_i, w_i, p_i, q_i, u_i, v_i, $i = 1,2$, на отрезке прямой $a \le \xi = \eta \le b$. Соответственно этому систему (27) преобразуем в систему интегральных уравнений, которая однозначно разрешима. Для решения системы интегральных уравнений доказываем, что оно удовлетворяет не только системе (27), но и системе, являющейся аналогом системы (17). В итоге имеет место

Теорема 2. *При выполнении условий* a*), b*), c*) *задача Коши с граничными условиями* $z(x,-0) = z^{(0)}(x)$, $w(x,-0) = w^{(0)}(x)$, $a \le x \le b$, *для системы* (22) *имеет единственное решение* $z = z(x,y)$, $w = w(x,y)$ *в области, не задаваемой заранее, ограниченной отрезком* $[a,b]$ *оси* Ox *и интегральными кривыми дифференциальных уравнений* $\frac{dy}{dx} = \nu$, $\frac{dy}{dx} = \nu'$, *выходящими из точек* $(a,0)$, $(b,0)$, *соответствующих решению* $z = z(x,y)$, $w = w(x,y)$. *Отмеченная область существования решения является частью треугольника, ограниченного прямыми* $y = 0$, $y = k_1(x-a)$, $y = k_4(x-b)$ *и содержит в себе как часть треугольник, ограниченный прямыми* $y = 0$, $y = k_2(x-a)$, $y = k_3(x-b)$.

Литература

1. Чекмарёв Т.В. *Сведе́ние задачи Коши для системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями к системе интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 5. – С. 197–207.
2. Чекмарёв Т.В. *Решение гиперболической системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями* // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 6. – С. 220–228.
3. Чекмарёв Т.В. *Задачи Коши, Гурса и Коши–Гурса для вырождающихся систем уравнений.* II // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 1. – С. 98–107.

Нижегородский технический университет

Поступила 22.09.1998