Известия вузов. Математика
2016, № 2, с. 31–39

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.А. КОШЕЛЕВ

ЗАДАЧА ЛАНДАУ–КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ШАРЕ

Аннотация. В работе решена задача максимизации значения оператора Лапласа в нуле для функций, вторая степень оператора Лапласа которых принадлежит L_∞ на единичном шаре евклидова пространства, при ограничениях на равномерную норму функции и L_∞-норму второй степени оператора Лапласа этой функции.

Ключевые слова: задача Ландау–Колмогорова, неравенство Ландау–Колмогорова, оператор Лапласа.

УДК: 517.518

1. Постановка задачи. Формулировка результата

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, — евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i$ векторов $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in \mathbb{R}^m$. Обозначим через $\mathbb{S}_h^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = h\}$ сферу радиуса h с центром в нуле, а через $\mathbb{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq 1\}$ — единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^m$.

В дальнейшем символом $\mathbb{G}$ обозначено либо все пространство $\mathbb{R}^m$, либо единичный шар $\mathbb{B}^m$. Пусть $C = C(\mathbb{G})$ есть пространство (вещественнозначных) функций, непрерывных и ограниченных на $\mathbb{G}$, с равномерной нормой

$$\|f\|_C = \sup\{|f(x)| : x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{G}\};$$

$L_\infty = L_\infty(\mathbb{G})$ — пространство измеримых, существенно ограниченных функций на $\mathbb{G}$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in \mathbb{G}\};$$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{G})$ — пространство финитных (т. е. имеющих компактный носитель) бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$, носитель которых в случае $\mathbb{G} = \mathbb{B}$ содержится во внутренности $\overset{\circ}{\mathbb{B}}$ шара $\mathbb{B}$.

Для дважды дифференцируемых на внутренности $\overset{\circ}{\mathbb{G}}$ множества $\mathbb{G}$ функций f оператор Лапласа Δ определяется формулой

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}.$$

Поступила 15.07.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-02705) и программы государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

На классы менее гладких функций оператор Лапласа и его степени Δ^l распространяются традиционным путем с помощью теории обобщенных функций, т. е. по схеме Соболева (например, [1], гл. I, § 7, п. 1–7). А именно, относительно пары определенных в $\overset{\circ}{\mathbb{G}}$ измеримых, локально суммируемых функций f, g и натурального числа l говорят, что $g = \Delta^l f$, если для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{G}} f(x)\ \Delta^l \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{G}} g(x)\varphi(x) dx.$$

Выделим в пространстве $C(\mathbb{G})$ выпуклый центрально симметричный класс функций

$$W(\mathbb{G}) = \{f \in C(\mathbb{G}) : \Delta^2 f \in L_\infty(\mathbb{G})\}.$$

Для $\delta > 0$ функцию

$$\omega(\delta) = \sup\{\|\Delta f\|_C : f \in W(\mathbb{G}),\ \|f\|_C \le \delta,\ \|\Delta^2 f\|_{L_\infty} \le 1\}, \tag{1}$$

называют модулем непрерывности оператора Лапласа на множестве $W(\mathbb{G})$. Для $\delta > 0$ и $\lambda > 0$ определим более общую в сравнении с (1) величину

$$\Omega(\delta, \lambda) = \sup\{\|\Delta f\|_C : f \in W(\mathbb{G}),\ \|f\|_C \le \delta,\ \|\Delta^2 f\|_{L_\infty} \le \lambda\}. \tag{2}$$

Имеем $\Omega(\delta, 1) = \omega(\delta)$, $\delta > 0$. Как нетрудно убедиться, в силу линейности оператора Лапласа между величинами (1) и (2) имеет место более общее соотношение

$$\Omega(\delta, \lambda) = \lambda\, \Omega\left(\frac{\delta}{\lambda}, 1\right) = \lambda\, \omega\left(\frac{\delta}{\lambda}\right). \tag{3}$$

С задачей вычисления величины (2) связано аддитивное неравенство Ландау–Колмогорова для функций из класса $W(\mathbb{G})$

$$\|\Delta f\|_C \le M_0 \|f\|_C + M_2 \|\Delta^2 f\|_{L_\infty}. \tag{4}$$

Для случая $\mathbb{G} = \mathbb{R}^m$ аддитивное неравенство (4) эквивалентно мультипликативному неравенству

$$\|\Delta f\|_C \le \mathcal{K} \sqrt{\|f\|_C \cdot \|\Delta^2 f\|_{L_\infty}}, \quad f \in W(\mathbb{R}^m). \tag{5}$$

Нетрудно проверить ([2], гл. 4, формула (4.6)), что в этом случае для модуля непрерывности (1) справедливо равенство

$$\omega(\delta) = \mathcal{K} \delta^{1/2}, \quad \mathcal{K} = \omega(1), \tag{6}$$

где $\mathcal{K}$ — точная, т. е. наименьшая возможная, константа в неравенстве Ландау–Колмогорова (5).

В настоящее время известно большое количество точных мультипликативных неравенств типа Ландау–Колмогорова для функций одной переменной на оси и полуоси. Значительно меньше таких результатов получено для функций многих переменных, историю исследования можно найти в монографиях ([3], [4], с. 285), работах [2], [5]–[14] и приведенной там библиографии.

Неравенство (5) изучал О. Кунчев [15]. Им была получена оценка сверху для наилучшей константы

$$\mathcal{K} \le 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}, \quad m \ge 2.$$

В работе [16] автор улучшил эту оценку для случая $m = 2$ и $m = 3$ и построил оценку снизу

$$\mathcal{K} \ge 2\sqrt{0.9}\sqrt{\frac{m}{m+2}}, \quad m \ge 2.$$

В силу инвариантности оператора Лапласа относительно сдвигов пространства $\mathbb{R}^m$, неравенство (5) эквивалентно неравенству

$$|\Delta f(0)| \le \mathcal{K}\sqrt{\|f\|_C \|\Delta^2 f\|_{L_\infty}}, \quad f \in W(\mathbb{R}^m). \tag{7}$$

В связи с неравенством (7) для функций из $W(\mathbb{G})$ возникает задача о вычислении при $\delta, \lambda > 0$ величины

$$\Omega_0(\delta, \lambda) = \sup\{|\Delta f(0)| : f \in W(\mathbb{G}),\ \|f\|_C \le \delta,\ \|\Delta^2 f\|_{L_\infty} \le \lambda\} \tag{8}$$

и, в частности, модуля непрерывности

$$\omega_0(\delta) = \sup\{|\Delta f(0)| : f \in W(\mathbb{G}),\ \|f\|_C \le \delta,\ \|\Delta^2 f\|_{L_\infty} \le 1\}, \quad \delta > 0, \tag{9}$$

функционала $\Delta f(0)$. Между величинами (8) и (9) в силу линейности функционала $\Delta f(0)$ имеет место соотношение

$$\Omega_0(\delta, \lambda) = \lambda \Omega_0\left(\frac{\delta}{\lambda}, 1\right) = \lambda \omega_0\left(\frac{\delta}{\lambda}\right). \tag{10}$$

В последующей части работы будем рассматривать задачи (8) и (9) для компакта $\mathbb{G} = \mathbb{B}^m$. Задачи на компакте, с одной стороны, проще, поскольку появляется возможность явно воспользоваться инвариантностью оператора Лапласа относительно поворота пространства $\mathbb{R}^m$ и свести задачу на отрезок $[0, 1]$. С другой стороны, задача теряет однородность относительно растяжения пространства $\mathbb{R}^m$. Однако, если удастся получить решение задачи (9) для шара $\mathbb{B}^m$ при любом значении $\delta > 0$, то отсюда можно получить решение задач (2) и (1) для $\mathbb{R}^m$. Такой переход можно сделать с помощью соображений, которые применяли И. Шенберг и А. Каваретта [10] при исследовании неравенства Колмогорова в равномерной норме на полуоси. Коротко, схема состоит в следующем. Сначала, используя однородность оператора Лапласа относительно растяжения пространства, осуществляем переход от задачи на единичном шаре $\mathbb{B}^m$ к той же задаче на шаре $\mathbb{B}^m(r)$ радиуса $r > 0$; задаче на шаре $\mathbb{B}^m(r),\ r > 0$, соответствует одномерная задача на отрезке $[0, r]$. Затем при определенной связи между r и δ осуществляется предельный переход при $r \to \infty$.

Решение задачи (9), а в силу (10) и задачи (8), при некоторых естественных ограничениях на параметры представляет

Теорема. *При $m \ge 2$ для*

$$\delta \ge \delta_m = \frac{1}{64m(m+2)}$$

величина (9) *в зависимости от ограничений на параметр δ имеет следующие значения*:

$$\omega_0(\delta) = 2\sqrt{\delta}\sqrt{\frac{m}{m+2}}, \quad \delta_m \le \delta \le 4\delta_m; \tag{11}$$

$$\omega_0(\delta) = \frac{32m^{3/2}(m+2)^{1/2}\delta^{3/2}}{8\sqrt{m(m+2)\delta} - 1}, \quad \delta \ge 4\delta_m = \frac{1}{16m(m+2)}. \tag{12}$$

Замечание. В силу соотношения (10) утверждение теоремы можно переписать в терминах величины (8).

2. Вспомогательные построения

При $m \geq 2$ и $0 < h \leq 1$ через $J_{h,m}f$ обозначим среднее значение функции $f \in C(\mathbb{B}^m)$ на m-мерной сфере $\mathbb{S}_h^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = h\}$ радиуса h с центром в нуле:

$$J_{h,m}f = \frac{1}{\Omega_m h^{m-1}} \int_{\mathbb{S}_h^m} f(y)dl, \tag{13}$$

где Ω_m — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^m$, а dl — элемент сферы $\mathbb{S}_h^m$.

Обозначим через $\mathscr{E}_m^{(2)}$ и $\mathscr{E}_m^{(4)}$ фундаментальные функции (на всем пространстве $\mathbb{R}^m$) операторов Δ и Δ^2 соответственно, т. е. функции, обладающие свойствами

$$\varphi(0) = (\mathscr{E}_m^{(2)}, \Delta\varphi), \quad \varphi(0) = (\mathscr{E}_m^{(4)}, \Delta^2\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m). \tag{14}$$

Фундаментальные функции имеют следующие явные представления ([1], гл. I, § 7, п. 8, с. 47–51; [17], гл. II, § 6, п. 5, с. 118–119; [18], гл. IV, § 2, п. 2, с. 265):

$$\mathscr{E}_m^{(2)}(x) = \mathfrak{E}_m^{(2)}(|x|), \quad \mathscr{E}_m^{(4)}(x) = \mathfrak{E}_m^{(4)}(|x|), \tag{15}$$

в которых при $m = 2$

$$\mathfrak{E}_2^{(2)}(r) = \frac{1}{2\pi}(\ln r + 1), \quad \mathfrak{E}_2^{(4)}(r) = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r; \tag{16}$$

при $m = 4$

$$\mathfrak{E}_4^{(2)}(r) = -\frac{1}{2\Omega_4}\frac{1}{r^2}, \quad \mathfrak{E}_4^{(4)}(r) = -\frac{1}{4\Omega_4}\ln r; \tag{17}$$

при $m = 3$ или $m \geq 5$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_m^{(2)}(r) &= -\frac{1}{(m-2)\Omega_m}\frac{1}{r^{m-2}}, \\ \mathfrak{E}_m^{(4)}(r) &= \frac{1}{2(m-2)(m-4)\Omega_m}\frac{1}{r^{m-4}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим также аналоги $\mathscr{E}_{h,m}^{(2)}$ и $\mathscr{E}_{h,m}^{(4)}$ $(0 < h \leq 1)$ фундаментальных функций операторов Δ и Δ^2, соответствующие функционалу (13), а точнее функции, обладающие свойствами

$$(\mathscr{E}_{h,m}^{(2)}, \Delta\varphi) = J_{h,m}\varphi, \quad (\mathscr{E}_{h,m}^{(4)}, \Delta^2\varphi) = J_{h,m}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m). \tag{19}$$

Естественно считать, что в случае $h = 0$ эти функции совпадают с обычными фундаментальными функциями оператора Лапласа и его второй степени, т. е.

$$\mathscr{E}_{0,m}^{(2)} = \mathscr{E}_m^{(2)}, \quad \mathscr{E}_{0,m}^{(4)} = \mathscr{E}_m^{(4)}.$$

В работах автора [19], [16] приведены явные выражения для функций $\mathscr{E}_{h,m}^{(2)}$ и $\mathscr{E}_{h,m}^{(4)}$ при $m \geq 2$. Обе эти функции радиальные, т. е. зависят лишь от $r = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_m^2)^{1/2}$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Первая из них имеет вид

$$\mathscr{E}_{h,m}^{(2)}(x) = \mathfrak{E}_{h,m}^{(2)}(r) = \begin{cases} 0, & r \leq h; \\ \mathfrak{E}_m^{(2)}(r) - \mathfrak{E}_m^{(2)}(h), & r > h. \end{cases} \tag{20}$$

Для функции $\mathscr{E}_{h,m}^{(4)}$ справедливо следующее представление в зависимости от размерности m: при $m = 2$

$$\mathscr{E}_{h,2}^{(4)}(x) = \mathfrak{E}_{h,2}^{(4)}(r) = \frac{1}{8\pi}\begin{cases} h^2 \ln h, & r \leq h; \\ r^2 \ln r - r^2 \ln h - r^2 + h^2 \ln r + h^2, & r > h, \end{cases} \tag{21}$$

при $m = 4$

$$\mathscr{E}^{(4)}_{h,4}(x) = \mathfrak{E}^{(4)}_{h,4}(r) = \frac{1}{16\Omega_m} \begin{cases} -4\ln h, & r \le h; \\ -4\ln r + \frac{r^2}{h^2} - \frac{h^2}{r^2}, & r > h, \end{cases} \tag{22}$$

в случае $m = 3$ или $m \ge 5$

$$\mathscr{E}^{(4)}_{h,m}(x) = \mathfrak{E}^{(4)}_{h,m}(r) = \frac{1}{2(m-2)\Omega_m} \begin{cases} \frac{h^{4-m}}{m-4}, & r \le h; \\ \frac{r^{4-m}}{m-4} + \frac{r^2}{mh^{m-2}} - \frac{h^2}{mr^{m-2}}, & r > h. \end{cases} \tag{23}$$

Определим на $\mathbb{R}^m$, а точнее на $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, радиальную функцию $\overline{\psi}_m(x) = \overline{\psi}_m(r)$, $r = |x| > 0$, соотношением

$$\overline{\psi}_m(r) = \mathscr{E}^2_m(|x|) + \frac{2m}{h^2}\mathscr{E}^4_m(|x|) - \frac{2m}{h^2}\mathscr{E}^4_{m,h}(|x|), \quad r > 0. \tag{24}$$

Эта функция обладает свойством

$$\overline{\psi}_m(r) = br^2, \quad r \ge h, \tag{25}$$

где $b = b_m(h)$ — некоторая константа (не зависящая от x). В этом легко убедиться с помощью формул (15)–(18) и (21)–(23). Более точно, при $r \ge h$ в случае $m = 2$ имеем

$$\overline{\psi}_2(r) = \frac{\ln h + 1}{2\pi h^2} r^2, \tag{26}$$

а если $m \ge 3$, то

$$\overline{\psi}_m(r) = -\frac{r^2}{(m-2)\Omega_m h^m}.$$

С помощью функции (24) определим на $\mathbb{R}^m$ радиальную функцию $\psi_m(x) = \psi_m(r)$, $r = |x| > 0$, соотношением

$$\psi_m(r) = \overline{\psi}_m(r) - br^2 = \mathscr{E}^2_m(r) + \frac{2m}{h^2}\mathscr{E}^4_m(r) - \frac{2m}{h^2}\mathscr{E}^4_{m,h}(r) - br^2. \tag{27}$$

Лемма 1. *При всех $m \ge 2$ функция (27) по переменному $r > 0$ обладает следующими свойствами.*

1. *Функция ψ_m неположительная при $r > 0$ и, кроме того,*

$$\psi_m(r) \equiv 0, \quad r \ge h. \tag{28}$$

2. *Функция ψ_m дважды непрерывно дифференцируема по r при $r > 0$.*

Доказательство. Равенство (28) есть следствие свойства (25). Проверим оставшиеся утверждения леммы лишь в случае $m = 2$; случаи $m \ge 3$ исследуются аналогично. В силу (15), (16) и (21), (26) при $0 < r \le h$ имеем

$$\psi_2(r) = \mathscr{E}^2_m(r) + \frac{2m}{h^2}\mathscr{E}^4_m(r) - \frac{2m}{h^2}\mathscr{E}^4_{m,h}(r) - br^2 = \frac{1}{2\pi}v(r),$$

$$v(r) = (\ln r + 1) + \frac{r^2 \ln r}{h^2} - \ln h - \frac{\ln h + 1}{h^2} r^2.$$

Непосредственным дифференцированием находим

$$v'(r) = \frac{1}{r} + \frac{2r\ln r + r}{h^2} - 2\frac{\ln h + 1}{h^2} r,$$

$$v''(r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{2\ln r + 3}{h^2} - 2\frac{\ln h + 1}{h^2},$$

$$v'''(r) = \frac{2}{r^3} + \frac{2}{rh^2}.$$

Функция v и ее производные первого и второго порядков в точке $r = h$ равны нулю. Отсюда следует, что функция v, а значит, и ψ_2 дважды непрерывно дифференцируемы на полуоси $(0, \infty)$.

Третья производная v''' функции v на $(0, h]$ положительная. Следовательно, v'' на $(0, h]$ возрастает. Поскольку $v''(h) = 0$, то $v''(r) < 0$, $r \in (0, h)$. Поэтому $v'(r) > 0$, $r \in (0, h)$, и, наконец, $v(r) < 0$, $r \in (0, h)$. $\square$

В работе автора [19] при изучении неравенства (5) был введен функционал

$$\Psi_m f = -\frac{2m}{h^2} f(0) + \frac{2m}{h^2} J_{h,m} f;$$

этим же функционалом воспользуемся для обоснования теоремы. Видно, что если $0 < h \leq 1$, то Ψ_m есть линейный ограниченный функционал на $C(\mathbb{B}^m)$ с нормой

$$\|\Psi_m\| = \|\Psi_m\|_{C^*(\mathbb{B}^m)} = \frac{4m}{h^2}.$$

Норма достигается на любой функции $f \in C(\mathbb{B}^m)$ со свойствами

$$\|f\|_{C(\mathbb{B}^m)} = -f(0) = f(x), \quad |x| = h.$$

Лемма 2. 1. *У любой функции $f \in W(\mathbb{B})$ оператор Лапласа Δf существует и является непрерывной функцией на внутренности $\mathring{\mathbb{B}}$ шара $\mathbb{B}$.*

2. *При $0 < h \leq 1$ на классе $W(\mathbb{B}^m)$ имеет место представление*

$$\Delta f(0) = \Psi_m f + \int_{\mathbb{B}^m} \psi_m(|x|) \Delta^2 f(x)\, dx, \quad f \in W(\mathbb{B}^m). \tag{29}$$

Для всего пространства $\mathbb{G} = \mathbb{R}^m$ это утверждение доказано в работе автора [20]. Для шара $\mathbb{G} = \mathbb{B}^m$ оно обосновывается с помощью тех же рассуждений.

В дополнение к первому утверждению леммы отметим, что у функции $f \in W(\mathbb{B})$ оператор Лапласа Δf может быть неограничен на $\mathring{\mathbb{B}}$. Действительно, при $m = 3$ рассмотрим (радиальную) функцию $z(x) = |x|$. Эта функция лишь константой отличается от характеристической функции (15), (18) оператора Δ^2, поэтому $(\Delta^2 z)(x) = 0$, $x \neq 0$. На радиальных функциях $f(x) = g(r)$, $r = |x|$, оператор Лапласа принимает вид

$$\Delta f(x) = g''(r) + \frac{m-1}{r} g'(r), \quad r = |x|. \tag{30}$$

Следовательно, $(\Delta z)(x) = 2/|x|$, $x \neq 0$. Пусть x_0 — (произвольная) точка единичной сферы пространства $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим на единичном шаре $\mathbb{B} = \mathbb{B}^3$ функцию $f(x) = |x - x_0|$. В силу только что приведенных соображений она принадлежит множеству $W(\mathbb{B}^3)$. Однако функция $(\Delta f)(x) = 2/|x - x_0|$ неограничена на открытом единичном шаре.

3. Доказательство теоремы

В силу (29) для любой функции $f \in W(\mathbb{B}^m)$ выполняется неравенство

$$|\Delta f(0)| \leq \|\Psi_m\| \, \|f\|_{C(\mathbb{B}^m)} + \|\psi_m\|_{L(\mathbb{B}^m)} \|\Delta^2 f\|_{L_\infty(\mathbb{B}^m)}. \tag{31}$$

Отсюда следует, что для величины (9) справедлива оценка

$$\omega_0(\delta) \leq \|\Psi_m\| \delta + \|\psi_m\|_{L(\mathbb{B}^m)} \tag{32}$$

при любых $\delta > 0$ и любом выборе параметра h, $0 < h \leq 1$. Сейчас при значениях параметра δ, указанных в формулировке теоремы, для специально выбранного параметра $h = h(\delta) \in (0, 1]$ будет построена функция $f \in W(\mathbb{B}^m)$ со свойствами $\|f\|_{C(\mathbb{B}^m)} = \delta$, $\|\Delta^2 f\|_{L_\infty} = 1$, на которой неравенство (31) обратится в равенство. Для этой функции правые части (31) и (32) совпадут, а потому $\omega_0(\delta) = |\Delta f(0)|$.

Будем исходить из полинома Чебышева (первого рода) четвертой степени $T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$. На отрезке $[0, 1]$ полином T_4 имеет три точки альтернанса, т. е. достигает своей равномерной нормы в точках $t_0 = 0$, $t_1 = 1/\sqrt{2}$, $t_2 = 1$ с чередованием знака.

При $\alpha > 0$ определим функцию

$$g_\alpha(x) = T_4(\alpha|x|) = 8\alpha^4|x|^4 - 8\alpha^2|x|^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

В силу формулы (30) при любом вещественном s имеем

$$\Delta r^s = s(s + m - 2)r^{s-2}, \quad r = |x|.$$

Применяя это соотношение, находим

$$\Delta g_\alpha(x) = 32(m + 2)\alpha^4|x|^2 - 16m\alpha^2, \quad \Delta^2 g_\alpha(x) = 64m(m + 2)\alpha^4.$$

Если $0 < \alpha \le 1$, то $\|g_\alpha\|_{C(\mathbb{B}^m)} = 1$. Предположим сначала, что $1/\sqrt{2} \le \alpha \le 1$. При этом условии имеем $g_\alpha(0) = 1$ и $g_\alpha(x) = -1$ для точек x, принадлежащих сфере $|x| = h$, $h = h(\alpha) = 1/(\alpha\sqrt{2})$. Пронормируем функцию g_α, а точнее, определим функцию

$$f_\alpha = -\frac{1}{64m(m + 2)\alpha^4} g_\alpha. \tag{33}$$

Эта функция принадлежит множеству $W(\mathbb{B}^m)$ и, более того, обладает свойствами

$$\Delta^2 f_\alpha(x) = -1, \quad x \in \mathbb{B}^m, \tag{34}$$

$$\Delta f_\alpha(0) = \frac{1}{4(m + 2)\alpha^2}, \tag{35}$$

$$\|f_\alpha\|_{C(\mathbb{B}^m)} = \frac{1}{64m(m + 2)\alpha^4} = -f_\alpha(0) = f_\alpha(x), \quad |x| = h(\alpha). \tag{36}$$

Применяя лемму 1, заключаем, что функция f_α обращает в равенство неравенство (31) со значением параметра $h = h(\alpha) = 1/(\alpha\sqrt{2})$. Отсюда следует

$$\omega_0(\delta) = \frac{1}{4(m + 2)\alpha^2}, \quad \delta = \delta(\alpha) = \frac{1}{64m(m + 2)\alpha^4}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le \alpha \le 1. \tag{37}$$

На отрезке $\alpha \in [1/\sqrt{2}, 1]$ функция $\delta = \delta(\alpha)$ убывает от значения $4\delta_m$ до значения δ_m. Выразив α^2 из соотношения $\delta = \delta(\alpha)$ и подставив это выражение в формулу для $\omega_0(\delta)$, получаем утверждение (11), эквивалентное (37).

Предположим теперь, что $0 < \alpha \le 1/\sqrt{2}$. При этих значениях α многочлен $T_4(\alpha t)$ на отрезке $t \in [0, 1]$ убывает от значения $T_4(0) = 1$ до значения $T_4(\alpha) \ge -1$. Следовательно, многочлен

$$G_\alpha(t) = T_4(\alpha t) - \frac{1 + T_4(\alpha)}{2}$$

на отрезке $[0, 1]$ убывает и

$$G_\alpha(0) = \frac{1 - T_4(\alpha)}{2} \ge G_\alpha(t) \ge \frac{T_4(\alpha) - 1}{2}, \quad t \in [0, 1].$$

Положим

$$g_\alpha(x) = \frac{G_\alpha(|x|)}{G_\alpha(0)} = \frac{2T_4(\alpha|x|)}{1 - T_4(\alpha)} - \frac{1 + T_4(\alpha)}{1 - T_4(\alpha)}, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

С помощью функции g_α определим функцию f_α формулой (33). Для функции f_α, очевидно, выполняются свойства (34) и (36) при $h = 1$. Свойство (35) в данном случае принимает вид

$$\Delta f_\alpha(0) = \frac{1}{2(m+2)(1-T_4(\alpha))\alpha^2}.$$

Функция f_α обращает в равенство неравенство (31) со значением параметра $h = 1$. Отсюда делаем вывод о справедливости

$$\omega_0(\delta) = \frac{1}{16(m+2)(1-\alpha^2)\alpha^4}, \quad \delta = \delta(\alpha) = \frac{1}{64m(m+2)\alpha^4}, \quad 0 < \alpha \le \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{38}$$

На полуинтервале $\alpha \in (0, 1/\sqrt{2}]$ функция

$$\delta = \delta(\alpha) = \frac{1}{64m(m+2)\alpha^4}$$

убывает от $+\infty$ до $4\delta_m$. Из последнего выражения находим $\alpha^{-4} = 64m(m+2)\delta$. Подставив это значение в (38), получаем эквивалентное утверждение (12). $\square$

Литература

[1] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс* (Наука, М., 1965).

[2] Арестов В.В. *Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи*, УМН **51** 6(312), 89–124 (1996).

[3] Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А. *Неравенства для производных и их приложения* (Наук. думка, Киев, 2003).

[4] Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений* (Изд-во МГУ, М., 1976).

[5] Арестов В.В. *Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные задачи*, Матем. заметки **40** (2), 269–285 (1986).

[6] Арестов В.В. *Наилучшее приближение одного класса функций многих переменных другим и родственные экстремальные задачи*, Матем. заметки **64** (3), 323–340 (1998).

[7] Колмогоров А.Н. *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале* (Избран. тр. Матем., механика. Наука, М., 1985), 252–263.

[8] Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.Г. *Неравенства для производных* (Колмогоров А.Н. Избран. тр. Т. 1. Матем. и механ., Наука, М., 2005), 428–431.

[9] Domar Y. *An extremal problem related to Kolmogoroff's inequality for bounded functions*, Arkiv för Mat. **7**, 433–441 (1968).

[10] Schoenberg I.J., Cavaretta A. *Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the halfline*, Proc. Int. Conf. "Constructive function theory", Varna, May 19–25 1970 (Sofia, 1972), 297–308.

[11] Коновалов В.Н. *Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных или косых производных*, Матем. заметки **23** (1), 67–78 (1978).

[12] Тимофеев В.Г. *Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных*, Матем. заметки **37** (2), 676–689 (1985).

[13] Тимошин О.А. *Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядка*, Докл. РАН **344** (1), 20–22 (1995).

[14] Буслаев А.П. *О приближении оператора дифференцирования*, Матем. заметки **25** (5), 731–742 (1981).

[15] Kounchev O. *Extremizers for the multivariate Landau–Kolmogorov inequality*, Multivariate approximation. Recent trends and results. Akademie Verlag **101**, 123–132 (1997).

[16] Кошелев А.А. *Наилучшее L_p приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на классах функций двух и трех переменных*, Тр. Ин-та матем. механ. УрО РАН **17** (3), 217–224 (2011).

[17] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1981).

[18] Курант Р. *Уравнения с частными производными* (Мир, М., 1964).

[19] Кошелев А.А. *Наилучшее приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами в пространстве L_p*, Изв. вузов. Матем., № 6, 63–74 (2011).

[20] Koshelev A.A. *Best approximation of the Laplace operator on the plane by linear bounded operators*, East J. Approx. **14** (2), 29–40 (2008).

А.А. Кошелев

доцент, кафедра математического анализа и теории функций,
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия;
старший научный сотрудник, отдел теории приближения функций,
Институт математики и механики,
Уральское отделение Российской Академии наук,
пр. Ленина, д. 51, г. Екатеринбург, 620000, Россия,

e-mail: Anton.Koshelev@urfu.ru

A.A. Koshelev

The Landau–Kolmogorov problem for the Laplace operator on a ball

Abstract. In this paper we solve the problem of maximizing the value of the Laplace operator at the origin for functions such that the second degree of the Laplace operator belongs to the space L_∞ on the unit ball of the Euclidean space. The problem is solved under restrictions on the uniform norm of a function and the L_∞-norm of ther second degree of the Laplace operator of this function.

Keywords: Landau–Kolmogorov problem, Landau–Kolmogorov inequality, Laplace operator.

A.A. Koshelev

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis and Function Theory,
Ural Federal University,
19 Mira str., Ekaterinburg, 620002 Russia;
Senior Researcher, Department of Approximation Theory,
Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
51 Lenin Ave., 51, Ekaterinburg, 620000 Russia,

e-mail: Anton.Koshelev@urfu.ru