И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 517.977

А.И. МАЛИКОВ

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЧНЫХ СИСТЕМ СРАВНЕНИЯ

1. Введение

Построение оценок множества решений дифференциальных уравнений является важной задачей в теории динамических систем. Для ее решения, начиная с работ Н.Г. Четаева [1], стал применяться метод функций Ляпунова [2], [3]. В сложных системах для построения оценок решений используется метод вектор-функций Ляпунова [4], [5]. Для аппроксимации множества достижимости неавтономных систем в [6] разработан метод эллипсоидов. В данной статье для построения оценок множества решений дифференциальных уравнений применяется метод матричных систем сравнения, предложенный в [7], [8] и развитый в [9]–[11]. В качестве матричных систем сравнения используются матричные дифференциальные уравнения с условием квазимонотонности правой части относительно конуса неотрицательно определенных симметрических матриц. Такие системы изучены в [12]. На основе полученных в [12] результатов здесь предлагается способ построения матричной системы сравнения для класса дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью. Устанавливается связь матричных систем сравнения с квадратичными функциями Ляпунова, выделяющими в фазовом пространстве инвариантные множества, а для линейных неавтономных систем — с эволюционными уравнениями метода эллипсоидов. Показывается, что матричная система сравнения описывает эволюцию эллипсоидов, которым принадлежат решения исходной системы, начинающиеся из заданного эллипсоида. Результаты иллюстрируются примерами, для которых даются эллипсоидальные оценки множества решений в сравнении с оценками, полученными другими методами.

2. Постановка задачи

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T = [t_0, t_0+\tau), \tag{2.1}$$

где функция $f: T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности классических решений.

Пусть в начальный момент времени t_0 состояние системы считается неопределенным, и известно только, что оно принадлежит эллипсоиду $E(a_0, Q_0)$, т. е.

$$x(t_0) = x_0 \in E(a_0, Q_0) = \{x : (x-a_0)^T Q_0^{-1}(x-a_0) \le 1\}, \tag{2.2}$$

где a_0 — заданный n-мерный вектор — центр эллипсоида, Q_0 — заданная симметрическая положительно определенная $n \times n$-матрица. Ставится задача построения оценок множества, в котором находятся решения $x(t, t_0, x_0)$ при t из T. Отметим, что данная задача рассматривалась

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 00-01-00293.

в [6], где для ее решения был разработан метод эллипсоидов. Здесь эта задача решается на основе метода матричных систем сравнения.

3. Оценивание множества решений с помощью матричных систем сравнения

Предположим, что для системы (2.1) с матричной функцией

$$V(t,x) = [x - a(t)][x - a(t)]^T, \tag{3.1}$$

получена матричная система сравнения

$$dQ(t)/dt = F(t, Q(t)), \quad Q \in G, \quad t \in T, \tag{3.2}$$

где F — квазимонотонно неубывающая относительно конуса G_+ (неотрицательно определенных симметрических матриц размера $n \times n$) матричная функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1 из [12] существования и единственности решения. Вектор-функция $a(t) = a(t, t_0, a_0)$ есть частное решение с $a(t_0) = a_0$ дифференциального уравнения

$$dx/dt = f^*(t, a), \tag{3.3}$$

где функция $f^* : T \times R^n \to R^n$ либо совпадает с функцией f из уравнения (2.1), либо является некоторым ее приближением. Пусть $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ — решение матричной системы сравнения (3.2) с $Q(t_0) = Q_0$, где Q_0 — положительно определенная матрица из (2.2). Отметим, что в силу инвариантности G_+ для решений системы (3.2) (теорема 3 из [12]) и $Q_0 \in G_+$ матричная функция $Q(t, t_0, Q_0) \in G_+$ при всех $t > t_0$. Так как Q_0 — положительно определенная матрица, то решение $Q(t, t_0, Q_0)$ будет положительно определенным по крайней мере на некотором интервале времени $T_1 = [t_0, t_0 + \delta)$ $(\delta \le \tau)$ и неотрицательно определенным при всех $t \in T$. Определим на T_1 квадратичную форму

$$v(t,x) = [x - a(t)]^T Q^{-1}(t)[x - a(t)]. \tag{3.4}$$

Лемма 1. *Множества* $P(t) = \{x : V(t,x) \le Q(t)\}$ *и* $E(t) = \{x : v(t,x) \le 1\}$ *положительно инвариантны для решений системы* (2.1).

Доказательство. Возьмем любое $x_0 \in \{x : v(t,x) \le 1\}$. Это означает, что $x_0 \in E(a_0, Q_0)$, поэтому при $t = t_0$ будет выполняться [13] неравенство

$$V(t_0, x_0) = [x_0 - a_0][x_0 - a_0]^T \le Q_0.$$

Так как (3.2) является матричной системой сравнения для (2.1), то в силу леммы сравнения (лемма 9 из [12]) имеем матричное неравенство (относительно конуса G_+) для всех $t \in T$

$$V(t, x(t)) \le Q(t), \tag{3.5}$$

где $V(t, x(t, t_0, x_0))$ — матричная функция (3.1), определенная на решениях $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (2.1), $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ — решение системы сравнения (3.2) с $Q(t_0) = Q_0$. Это доказывает инвариантность множества $P(t)$.

С учетом (3.1) неравенство (3.5) перепишется в виде

$$Q(t) - [x(t) - a(t)][x(t) - a(t)]^T \ge 0.$$

Такой неотрицательно определенной матрице соответствует [14] квадратичная форма (при условии $Q(t) > 0$)

$$[x(t) - a(t)]^T Q^{-1}(t)\{Q(t) - [x(t) - a(t)][x(t) - a(t)]^T\} Q^{-1}(t)[x(t) - a(t)] \ge 0$$

или

$$[x(t) - a(t)]^T Q^{-1}(t)[x(t) - a(t)] \ge \{[x(t) - a(t)]^T Q^{-1}(t)[x(t) - a(t)]\}^2.$$

Отсюда следует $[x(t) - a(t)]^T Q^{-1}(t)[x(t) - a(t)] \le 1$ или $v(t, x(t)) \le 1$ для всех $t \in T_1$. $\square$

Итак, согласно данной лемме решения уравнения (2.1), начинающиеся из начального эллипсоида $E(a_0, Q_0)$, в дальнейшем для всех $t \in T_1$ будут находиться в эллипсоиде

$$E[a(t), Q(t)] = \{x : [x - a(t)]^T Q^{-1}(t)[x - a(t)] \le 1\},$$

размеры которого определяются положительно определенным частным решением $Q(t)$ матричной системы сравнения (3.2). Это же частное решение системы сравнения (3.2) определяет квадратичную функцию Ляпунова $v(t, x)$ (3.4), которая выделяет в фазовом пространстве системы (2.1) инвариантное множество $E[a(t), Q(t)] = \{x : v(t, x) \le 1\}$. Таким образом, матричная система сравнения (3.2) и уравнение (3.3) описывают эволюцию эллипсоидов, являющихся инвариантными множествами для решений исходной системы (2.1). Кроме того, эти множества можно рассматривать как верхние оценки множеств достижимости исходной нелинейной системы (2.1) при $x_0 \in E_0 = E(a_0, Q_0)$.

Замечание 1. Если не оговаривать дополнительных условий на правую часть системы сравнения, то $Q(t)$, являющаяся частным решением системы сравнения, может в некоторые моменты времени оказаться вырожденной неотрицательно определенной матрицей. В случае стремления $\det Q(t)$ к нулю можно использовать при оценивании неравенство (3.5). Можно также, несколько огрубляя, строить эллипсоидальную оценку, используя неособую матрицу $Q(t) + \varepsilon I$, где I — единичная $(n \times n)$-матрица, а ε — малое положительное число.

На основании леммы 1 можно предложить следующий способ эллипсоидального оценивания с помощью матричной системы сравнения множества решений, начинающихся из заданного эллипсоида:

1) построение матричной системы сравнения;

2) нахождение при $t \in T$ частного решения $a(t)$ системы вида (3.3) с $a(t_0) = a_0$ и частного решения $Q(t)$ матричной системы сравнения (3.2) с $Q(t_0) = Q_0$;

3) отображение множества $E(t)$ (если $Q(t)$ — положительно определенная при $t \in T$ матрица) или множества $P(t)$ (если $Q(t)$ — неотрицательно определенная и при некоторых $t \in T$ вырожденная матрица) в заданном сечении фазового пространства.

Рассмотрим каждый из этих пунктов подробнее.

Так же, как для функций Ляпунова, для матричных систем сравнения не существует универсального способа их построения. Однако для отдельных классов систем такие способы построения функций Ляпунова, вектор-функций Ляпунова и векторных систем сравнения разработаны, реализованы программно [4], [5] и применялись в прикладных исследованиях. Матричные системы сравнения в виде дифференциального матричного уравнения Ляпунова и Риккати строились в [7] для автономных линейных и регулируемых систем с одной нелинейностью из сектора. Далее в статье предлагаются способы построения матричных систем сравнения для неавтономных систем дифференциальных уравнений с неопределенными параметрами и для нелинейных систем с полиномиальной правой частью.

Для нахождения частных решений матричной системы сравнения используются стандартные процедуры численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Построение и отображения множества $E(t)$ производится в такой последовательности:

1) задается направление в заданном сечении фазового пространства в виде вектора $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{i+1}, \sin\varphi, p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}, \cos\varphi, p_{j+1}, \ldots, p_n)^T$, у которого все элементы, кроме i-го и j-го, фиксированы, а i-й и j-й элементы являются проекциями единичного вектора, направленного под углом φ;

2) вектор $x - a$, лежащий на границе эллипсоида в заданном направлении p, представляется в виде $x - a = \alpha p$, где α — длина вектора, определяемая из уравнения $\alpha^2 p^T Q^{-1}(t) p = 1$;

3) варьируя φ в интервале $[0, 2\pi]$ с заданным шагом h_φ, последовательно определяем $\alpha(\varphi) = 1/p(\varphi)^T Q^{-1}(t) p(\varphi)$ и точки $\alpha(\varphi) p(\varphi)$ границы эллипсоида в заданном сечении.

4. Построение матричной системы сравнения для линейной неавтономной системы

Рассмотрим линейную систему вида

$$dx/dt = A(t)x + b(t), \tag{4.1}$$

где $x \in R^n$, $t \in T$, $A(t)$ — $(n \times n)$-матрица, $b(t)$ — n-вектор, все элементы которых суммируемы на каждом отрезке, содержащемся в интервале T. Тогда согласно теореме 3 из [15] при любом $x(t_0) = x_0$ существует решение системы (4.1) на всем интервале T и оно единственно.

Пусть в начальный момент времени t_0 вектор состояния $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in E(a_0, Q_0)$, где Q_0 — заданная положительно определенная $(n \times n)$-матрица, a_0 — заданный n-вектор.

Возьмем квадратичную форму $v(t,x) = [x-a(t)]^T Q^{-1}(t)[x-a(t)]$, где $Q^{-1}(t)$ — положительно определенная симметрическая $n \times n$ матрица, и продифференцируем ее по времени в силу (4.1)

$$dv(t)/dt = d\{(x-a(t))^T Q^{-1}(t)(x-a(t))\}/dt = [A(t)x(t) - da(t)/dt]^T Q^{-1}(t)[x(t)-a(t)] +$$
$$+ [x(t)-a(t)]^T Q^{-1}(t)[A(t)x(t) + da(t)/dt] + x^T(t) dQ^{-1}(t)/dt\, x(t) + b^T(t)Q^{-1}(t)x(t) + x^T(t)Q(t)b(t).$$

Определим $a(t)$ из исходного уравнения (4.1), т. е.

$$da/dt = A(t)a + b(t), \quad a(t_0) = a_0. \tag{4.2}$$

Тогда, подставляя da/dt в выражение для $dv(t)/dt$, получаем

$$dv(t)/dt = [x(t)-a(t)]^T [A^T(t)Q^{-1}(t) + Q^{-1}(t)A(t) + dQ^{-1}(t)/dt][x(t)-a(t)].$$

Приравнивая нулю производную $dv(t)/dt$ и учитывая (4.1), получаем следующее уравнение, которому должна удовлетворять матричная функция $Q^{-1}(t)$, чтобы квадратичная форма $v(t)$ оставалась постоянной вдоль решений системы (4.1):

$$dQ^{-1}(t)/dt = -A^T(t)Q^{-1}(t) - Q^{-1}(t)A(t).$$

Учитывая правило дифференцирования обратной матричной функции $dQ^{-1}/dt = -Q^{-1}(dQ/dt)Q^{-1}$ [16], после подстановки и умножения слева и справа на неособую матрицу $Q(t)$ получаем матричное дифференциальное уравнение Ляпунова

$$dQ(t)/dt = Q(t)A^T(t) + A(t)Q(t), \quad Q(t_0) = Q_0, \tag{4.3}$$

которое совпадает с эволюционным уравнением метода эллипсоидов [6] и, как известно [7], является матричной системой сравнения для исходной системы (4.1) (при $b(t) = 0$ и $V(x) = xx^T$).

Получить уравнение (4.3) можно и путем вычисления производной от матричной функции (3.1) в силу системы (3.1). Согласно лемме 10 из [12] правая часть (4.3) удовлетворяет условию квазимонотонности относительно конуса G_+. Поэтому уравнение (4.3) будет являться матричной системой сравнения для (4.1). По лемме 1 для решений системы (4.1), начинающихся из заданного эллипсоида E_0, будем иметь оценки

$$x(t) \in P(t) = \{x : [x-a(t)][x-a(t)]^T \le Q(t)\} \quad \text{при} \quad t \in T$$

или $x(t) \in E(t) = \{x : [x-a(t)]^T Q^{-1}(t)[x-a(t)] \le 1\}$ при $t \in T_1$.

Отметим, что согласно лемме 1 множества $P(t)$ и $E(t)$ положительно инвариантны для решений системы (4.1), а уравнение (4.3) вместе с уравнением (4.2) описывают эволюцию эллипсоида $E[a(t), Q(t)]$, который в точности является множеством достижимости всех решений линейной неавтономной системы (2.1), начинающихся из заданного эллипсоида E_0. Таким образом, матричная система сравнения (4.3), как и эволюционное уравнение метода эллипсоидов, дает точные эллипсоидальные оценки для множества решений линейной неавтономной системы. Другие известные способы на основе функций и вектор-функций Ляпунова не нашли применения для оценивания множества решений неавтономных систем.

5. Построение матричной системы сравнения для дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью

В данном и следующем пунктах предлагаются способы построения матричной системы сравнения, основанные на использовании нелинейного (степенного) [7], [17] преобразования координат исходной системы с последующим оптимальным в некотором смысле мажорированием производной от матричной функции преобразования в силу исходной системы. Степенное преобразование $H = xx^T$ переменных вводится по формуле (3.1) при $a(t) = 0$. Элементами симметрической матрицы H размерности $n \times n$ являются $h_{ij} = x_i x_j$. Число различных элементов матрицы H равно $n(n+1)/2$. При мажорировании производной от матричной функции H будем использовать очевидное матричное неравенство (относительно G_+): для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и любой положительной переменной q

$$xy^T + yx^T \leq \frac{1}{q}xx^T + qyy^T. \tag{5.1}$$

Рассмотрим систему

$$dx/dt = A(t)x + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\varphi_i(t, \sigma_i), \quad \sigma_i = c_i^T(t)x, \tag{5.2}$$

где, как и выше, $A(t)$ — $(n \times n)$-матрица, $b_i(t)$, $c_i(t)$ — n-векторы, а

$$\varphi_i(t, \sigma_i) = \xi_i(t)\sigma_i^{\mu_i},$$

$\mu_i \geq 2$ — целое число, $\xi_i(t)$ — известные измеримые функции ($i = 1, \ldots, m$).

Возьмем матричную функцию H и, продифференцировав ее в силу системы (5.1), получим

$$dH/dt = A(t)H + HA^T(t) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t, \sigma_i)[b_i(t)x^T + xb_i^T(t)]. \tag{5.3}$$

Пусть J_1 — множество индексов i, для которых $\varphi_i(t, \sigma_i)$ являются степенными функциями σ_i нечетной степени, т. е. $\mu_i = 2l_i + 1$, $l_i \geq 1$, — целое число, и J_2 — множество индексов i, для которых $\varphi_i(t, \sigma_i)$ являются степенными функциями σ_i четной степени, т. е. $\mu_i = 2l_i$, $l_i \geq 1$, — целое число. Разобьем сумму в правой части равенства (5.3) на две: в одну включим члены с нелинейностями в виде нечетных степеней, а в другую — члены с нелинейностями в виде четных степеней σ_i. Учитывая тождество $\sigma_i^2(t) = c_i^T(t)H(t)c_i(t)$, для первой суммы (случай $\mu_i = 2l_i + 1$) имеем

$$\sum_{i \in J_1} \varphi_i(t, \sigma_i)[b_i(t)x^T + xb_i^T(t)] = \sum_{i \in J_1} \frac{\xi_i(t)\sigma_i^{2l_i+1}}{\sigma_i}[b_i(t)c_i^T(t)H + Hc_i(t)b_i^T(t)] =$$
$$= \sum_{i \in J_1} \xi_i(t)[c_i^T(t)Hc_i(t)]^{l_i}[b_i(t)c_i^T(t)H + Hc_i(t)b_i^T(t)].$$

Для второй суммы (случай $\mu_i = 2l_i$) с учетом матричного неравенства (5.1) и тождества $\sigma_i^2(t) = c_i^T(t)H(t)c_i(t)$ находим

$$\sum_{i \in J_2} \varphi_i(t, \sigma_i)[b_i(t)x^T + xb_i^T(t)] = \sum_{i \in J_2} \sigma_i^{2l_i}\xi_i(t)[b_i(t)x^T + xb_i^T(t)] \leq$$
$$\leq \sum_{i \in J_2} [c_i^T(t)Hc_i(t)]^{l_i}\left[\frac{1}{q_i}H + q_i\xi_i^2(t)b_i(t)b_i^T(t)\right].$$

В итоге, подставляя выражения для первой и второй сумм в (5.3), получаем матричное дифференциальное неравенство для производной от матричной функции H в силу системы (5.2)

$$dH/dt \le A(t)H + HA^T(t) + \sum_{i\in J_1} \xi_i(t)[c_i^T(t)Hc_i(t)]^{l_i}[b_i(t)c_i^T(t)H + Hc_i(t)b_i^T(t)] +$$
$$+ \sum_{i\in J_2}[c_i^T(t)Hc_i(t)]^{l_i}\left[\frac{1}{q_i}H + q_i\xi_i^2(t)b_i(t)b_i^T(t)\right].$$

Легко показать с применением леммы 10 из [12], что правая часть неравенства удовлетворяет условию квазимонотонности относительно конуса G_+. Поэтому соответствующее неравенству дифференциальное уравнение

$$dQ/dt = A(t)Q + QA^T(t) + \sum_{i\in J_1} \xi_i(t)[c_i^T(t)Qc_i(t)]^{l_i}[b_i(t)c_i^T(t)Q + Qc_i(t)b_i^T(t)] +$$
$$+ \sum_{i\in J_2}[c_i^T(t)Qc_i(t)]^{l_i}\left[\frac{1}{q_i}Q + q_i\xi_i^2(t)b_i(t)b_i^T(t)\right] \quad (5.4)$$

будет являться матричной системой сравнения для исходной системы (5.2).

Отметим, что если правая часть исходной системы (5.2) содержит нелинейности только нечетной степени, то для производной от матричной функции H в силу системы будет справедливо, как было показано, дифференциальное равенство. Поэтому система сравнения

$$dQ/dt = A(t)Q + QA^T(t) + \sum_{i\in J_1} \xi_i(t)[c_i^T(t)Qc_i(t)]^{l_i}[b_i(t)c_i^T(t)Q + Qc_i(t)b_i^T(t)] \quad (5.5)$$

будет давать точное описание поведения матричной функции H на решениях исходной системы. Как известно, другие способы (на основе функций, вектор-функций Ляпунова, метода эллипсоидов) не дают точного описания поведения множества решений рассмотренного класса дифференциальных уравнений (с нелинейностями нечетной степени).

В случае автономности исходного уравнения (5.2) система сравнения (5.4) будет также автономной. Тогда теорема 8 из [12] дает условия ее асимптотической устойчивости в виде разрешимости алгебраических матричных неравенств. На основе следствия 3 из [12] можно получить оценки области притяжения. Для этого путем численного интегрирования матричной системы сравнения (5.3) находится положительно определенная матрица Q_0, для которой выполняется условие: найдется такой момент времени τ, при котором правая часть системы сравнения станет отрицательно определенной матрицей:

$$AQ + QA^T + \sum_{i\in J_1}\xi_i[c_i^TQc_i]^{l_i}[b_ic_i^TQ + Qc_ib_i^T] + \sum_{i\in J_2}[c_i^TQc_i]^{l_i}\left[\frac{1}{q_i}Q + q_i\xi_i^2b_ib_i^T\right] < 0.$$

Тогда оценками области притяжения будут являться множества

$$\Pi_1 = \bigcup_{t\in[0,\tau]} P(t), \quad \Pi_2 = \bigcup_{t\in[0,\tau]} E(t).$$

Если решение $Q(t,t_0,Q_0)\to 0$ при $t\to\infty$ для некоторой положительно определенной матрицы Q_0, то нулевое решение исходной системы (5.3) асимптотически устойчиво. Если это имеет место при любой положительно определенной матрице Q_0, то нулевое решение автономной системы (5.2) асимптотически устойчиво в целом. Это следует из того, что в автономном случае для решений исходной системы с $x(0) = x_0$ и $x_0x_0^T \le Q_0$ будет иметь место при всех $t > 0$ матричное неравенство $x(t)x^T(t) \le Q(t)$, из которого вытекают покомпонентные для диагональных элементов неравенства $(x_i)^2 \le q_{ii}$, а также неравенство $\mathrm{Tr}[x(t)x^T(t)] \le \mathrm{Tr}[Q(t)]$, где $\mathrm{Tr}[Q]$ — след матрицы Q. Поэтому при стремлении $Q(t)$ к нулевой матрице будет стремиться к нулю ее след и след матрицы $x(t)x^T(t)$. Осталось заметить, что $\mathrm{Tr}[x(t)x^T(t)] = \|x(t)\|^2$.

В качестве примера рассмотрим систему второго порядка с кубической нелинейностью $dx/dt = A(t)x + b\sigma^3$, $\sigma = c^T(t)x$. Для нее матричная система сравнения (5.4) принимает вид

$$dQ/dt = AQ + QA^T + c^TQc(bc^TQ + Qcb^T).$$

На основе интегрирования матричной системы сравнения получены матрицы, определяющие размеры эллипсоидов, при следующих значениях параметров:

1) $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, $c = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $Q_0 = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{smallmatrix}\right]$, $T = [0, 6]$,

2) $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -0.1 \end{smallmatrix}\right]$, $c = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $Q_0 = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{smallmatrix}\right]$, $T = [0, 6]$,

3) $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, $c = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $Q_0 = \left[\begin{smallmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{smallmatrix}\right]$, $T = [0, 15]$.

Эволюция эллипсоидов показана соответственно на рисунках 1–3. Следует отметить, что в первых двух случаях матрица A линейной части имеет одно отрицательное и одно нулевое собственное значение. Тем не менее, как видно из рисунков 1, 2 (эллипсоиды сжимаются к началу координат), система с кубической нелинейностью асимптотически устойчива в большом. В третьем случае матрица линейной части имеет одно положительное собственное значение, поэтому система с кубической нелинейностью является неустойчивой. Это можно наблюдать на рис. 3, где эллипсоиды расширяются с течением времени

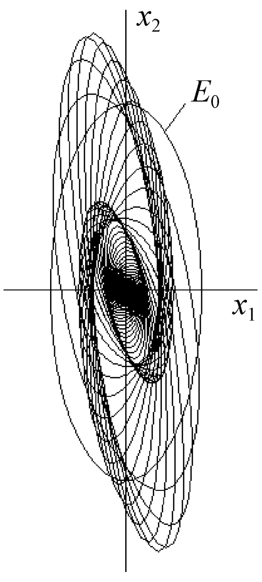

Рис. 1.

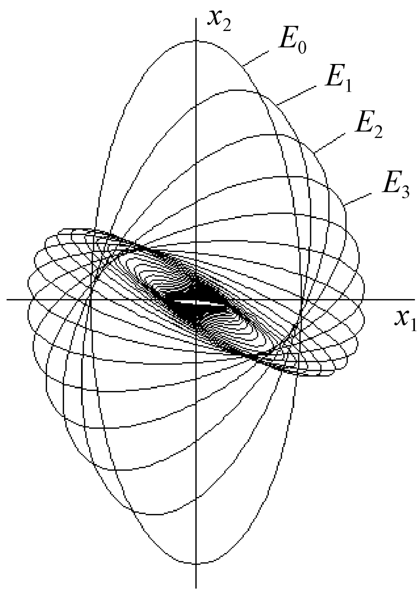

Рис. 2.

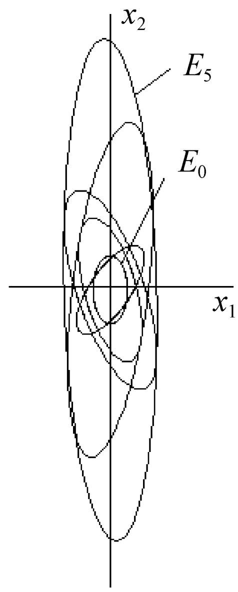

Рис. 3.

Для системы с одной квадратичной нелинейностью

$$dx/dt = A(t)x + b(t)\sigma^2, \quad \sigma = c^T(t)x,$$

где $A(t)$ — $n \times n$-матрица; $b(t)$, $c(t)$ — n-векторы, матричная система сравнения принимает вид

$$dQ/dt = AQ + QA^T + c^TQc\left(\frac{1}{q}Q + qbb^T\right),$$

где $q > 0$ — параметр, подлежащий определению. В частности, для наиболее точного мажорирования рекомендуется выбирать параметр q по формуле

$$q = (c^TQc)^{1/2}/|c^Tb| \quad \text{при} \quad c^Tb \neq 0 \quad \text{или} \quad q = \sqrt{\operatorname{Tr}(Q)/\operatorname{Tr}(bb^T)}.$$

На рисунках 4, 5 отображены эллипсоиды, построенные интегрированием системы сравнения при $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, $c = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. В качестве начального условия приняты соответственно матрицы $Q_{01} = \left[\begin{smallmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{smallmatrix}\right]$ и $Q_{02} = \left[\begin{smallmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{smallmatrix}\right]$. В первом случае (рис. 4) эллипсоиды с течением времени сжимаются к началу координат, а во втором случае (рис. 5) расширяются

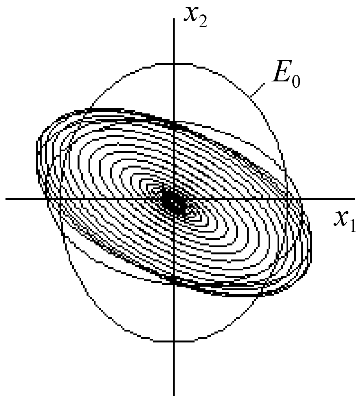

Рис. 4.

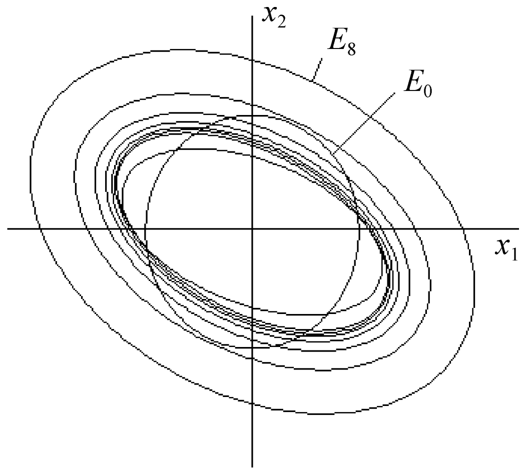

Рис. 5.

Следовательно, эллипсоид $\{x : x^T \operatorname{diag}[2,\ 2]x \le 1\}$ содержится в области притяжения системы с квадратичной нелинейностью.

6. Построение матричной системы сравнения для линейной дифференциальной системы с неопределенными параметрами

Рассмотрим линейную систему с неопределенной матрицей

$$dx/dt = A(t)x + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\eta_i(t)\sigma_i, \quad \sigma_i = c_i^T(t)x, \tag{6.1}$$

где, как и выше, $A(t)$ — известная $n \times n$-матрица, $b_i(t)$, $c_i(t)$ — известные n-векторы. Будем предполагать, что $\eta_i(t)$ — неопределенная измеримая функция со значениями из отрезка $[0, k_i]$, где $k_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1, \dots, m$.

Способ построения матричной системы сравнения основан на применении неравенства (5.1) при мажорировании производной от матричной функции H в силу системы (6.1)

$$dH/dt = AH + HA^T + \sum_{i=1}^{m}(\eta_i\sigma_i x b_i^T + b_i\eta_i\sigma_i x^T) \le AH + HA^T +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\left(q_i\eta_i^2\sigma_i^2 H + \frac{1}{q_i}b_i b_i^T\right) \le AH + HA^T + \sum_{i=1}^{m}\left(q_i k_i^2\sigma_i^2 H + \frac{1}{q_i}b_i b_i^T\right).$$

С учетом равенства $\sigma_i^2 = c_i^T H c_i$ получаем матричную дифференциальную систему

$$dQ/dt = AQ + QA^T + \sum_{i=1}^{m}\left(q_i k_i^2 c_i^T Q c_i Q + \frac{1}{q_i}b_i b_i^T\right), \tag{6.2}$$

где q_i — положительные переменные, подлежащие определению. Отметим, что правая часть (6.2) согласно лемме 10 из [12] является квазимонотонной относительно G_+ матричной функцией, поэтому (6.2) является матричной системой сравнения для исходной системы (6.1).

Для применения системы сравнения (6.2) необходимо определить параметр q. Параметром q можно распорядиться для получения наиболее точных оценок решений исходной системы или наилучшего мажорирования производной dH/dt (в силу системы) матричной функцией правой части соответствующей системы сравнения. Очевидно, можно указать различные способы задания параметра q и получать различные уравнения, которые будут являться системами сравнения для исходной системы, если правая часть этого уравнения будет оставаться квазимонотонной матричной функцией относительно G_+. Например, выбор параметра q_i можно производить из условия минимизации квадратичной формы, образованной с помощью матриц правой части системы сравнения (6.2)

$$\min_{q_i}\left\{\frac{1}{q_i}z_i^TE_iz_i+q_iz_i^TD_iz_i\right\}$$

при некотором заданном $z_i \in \{z_i : z_i^TE_iz_i > 0\}$. Здесь $E_i = b_ib_i^T$, $D_i = k_i^2c_i^TQc_iQ$. Приравнивая нулю производную по q_i, получим

$$q_i^2 = z_i^TE_iz_i/(z_i^TD_iz_i). \tag{6.3}$$

Вторая производная при q_i из (6.3) $(z_i^TE_iz_i)/q_i^3 = (z_i^TD_iz_i)^3/(z_i^TE_iz_i)$ будет положительна, если $(z_i^TD_iz_i)(z_i^TE_iz_i) > 0$, что является достаточным условием минимума. Таким образом, выбираем параметр $q_i = [(z_i^TE_iz_i)/(z_i^TD_iz_i)]^{1/2}$, где вектор z_i удовлетворяет условию $(z_i^TD_iz_i)(z_i^TE_iz_i) > 0$.

Для системы (6.2), таким образом, находим

$$q_i = \{z_i^TE_iz_i/z_i^TD_iz_i\}^{1/2} = k_i^{-1}|z_i^Tb_i|/(z_i^TQz_ic_i^TQc_i)^{1/2},\quad i = 1,\dots,m,$$

при которых будет обеспечиваться наилучшее (в указанном выше смысле) мажорирование производной матричной функции H в силу исходной системы, а система сравнения (6.2) после подстановки q_i принимает вид

$$dQ/dt = AQ + QA^T + \sum_{i=1}^{m} k_i(c_i^TQc_i)^{1/2}\{(z_i^TQz_i)^{1/2}|z_i^Tb_i|^{-1}b_ib_i^T + |z_i^Tb_i|(z_i^TQz_i)^{-1/2}Q)\}. \tag{6.4}$$

Если задать $z_i = c_i$, то при условии $c_i^Tb_i \neq 0$, $i = 1, m$, получим систему сравнения в виде

$$dQ/dt = AQ + QA^T + \sum_{i=1}^{m} k_i(c_i^TQc_i|c_i^Tb_i|^{-1}b_ib_i^T + |c_i^Tb_i|Q). \tag{6.5}$$

Согласно лемме 10 из [12] правые части систем (6.4) и (6.5) по-прежнему удовлетворяют условию квазимонотонности относительно конуса G_+.

Как было показано выше, на основе матричных систем сравнения могут быть получены оценки решений, инвариантных множеств, областей притяжения (в автономном случае) исходной системы. Для этого стандартными методами численного интегрирования с применением ПЭВМ находятся на конечном интервале времени T одно или несколько частных решений системы сравнения и по ним строятся требуемые оценки. Отметим, что построенные здесь матричные системы сравнения имеют простые правые части, и поэтому все вычисления сводятся к обычным матричным операциям.

7. Оценка множества достижимости на основе матричных систем сравнения

Для сравнения рассмотрим линейную систему вида (6.1)

$$dx/dt = A(t)x + b(t)\eta(t)\sigma,\quad \sigma = c^T(t)x, \tag{7.1}$$

с одним неопределенным параметром $\eta(t) \in [0, k]$. Построим для нее верхнюю оценку множества достижимости решений, начинающихся из заданного эллипсоида E_0, двумя способами: с применением разработанного Черноусько Ф.Л. [6], [18] метода эллипсоидов и с использованием матричной системы сравнения (6.2).

Применим сначала результаты работы [18] по оцениванию множества достижимости систем с неопределенностями в матрице коэффициентов исходной линейной системы. Проводя согласно [18] требуемые выкладки, получим для рассматриваемого нами случая уравнение эволюции эллипсоида, содержащего множество достижимости линейной системы (7.1)

$$dQ/dt = A(t)Q + QA^T(t) + qQ + q^{-1}R, \tag{7.2}$$

где $q = \{n^{-1}\operatorname{Tr}[Q^{-1}R]\}^{1/2}$, $R = kc^T(t)Qc(t)b(t)b^T(t)$. Данное уравнение определяет [6], [18] локально оптимальные (не улучшаемые в смысле скорости изменения фазового объема) аппроксимации в классе эллипсоидов, обладающих эволюционными свойствами, множеств достижимости системы (7.1) при любом $\eta(t) \in [0, k]$. После подстановки q и R в (7.2) окончательно получаем для рассматриваемого частного случая

$$dQ/dt = A(t)Q + QA^T(t) + k(c^TQc)^{1/2}\{n^{-1}\operatorname{Tr}[Q^{-1}bb^T]\}^{1/2}Q + \{n^{-1}\operatorname{Tr}[Q^{-1}bb^T]\}^{-1/2}bb^T. \tag{7.3}$$

Покажем теперь, что путем выбора параметра q данное эволюционное уравнение можно получить из матричной системы сравнения (6.2). Для этого рассмотрим матричную функцию от параметра q

$$1/qE + qD, \tag{7.4}$$

где E — неотрицательно определенная, а D — положительно определенная матрицы. В рассматриваемом случае с учетом (6.2) имеем

$$E = bb^T, \quad D = k^2c^TQcQ. \tag{7.5}$$

Известно [16], что существует неособое преобразование S, одновременно приводящее две квадратичные формы y^TEy и y^TDy, $y \in \mathbb{R}^n$, одна из которых положительно определена, к каноническому виду

$$y^TEy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i'^2 \quad \text{и} \quad y^TDy = \sum_{i=1}^{n} y_i'^2.$$

Матрицу S, удовлетворяющую условиям $SDS^T = I$, $SES^T = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, можно найти, решая задачу на собственные значения [16]: $Ez = \lambda Dz$, где λ —- собственное число. Этой задаче отвечает характеристическое уравнение $\det(E - \lambda D) = 0$. Пусть λ_j — корни этого уравнения, z^j — соответствующие этим корням собственные векторы. Таким образом, имеем

$$\begin{gathered} \det(E - \lambda D) = 0, \quad \lambda_j \geq 0, \\ Ez^j = \lambda_j Dz^j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{7.6}$$

Отметим, что корни уравнения (7.6) совпадают с корнями уравнения [16]

$$\det(D^{-1}E - \lambda I) = 0. \tag{7.7}$$

Каждый корень будем считать столько раз, какова его кратность. Искомая матрица S определяется равенством $S^T = \{z^1, \ldots, z^n\}$, т. е. собственные векторы z^j служат столбцами транспонированной матрицы.

Применим теперь найденное преобразование S к (7.4)

$$S\left(\frac{1}{q}E + qD\right)S^T = \frac{1}{q}SES^T + qSDS^T = \frac{1}{q}\operatorname{diag}(\lambda_i) + qI.$$

Далее выбор параметра q произведем из условия минимизации суммы диагональных элементов преобразованной матрицы $\frac{1}{q}\operatorname{diag}(\lambda_i) + qI$, т. е. определим $\min\limits_q \left\{\frac{1}{q}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i + qn\right\}$. Приравнивая нулю производную по q, находим

$$q^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i, \quad q = \left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1/2}. \tag{7.8}$$

При данном выборе q величина $\frac{1}{q}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i + qn$ действительно принимает минимальное значение.

Учитывая, что сумма корней уравнения (7.7) равна, как известно [17], следу матрицы $D^{-1}E$, запишем (7.8) в виде $q = [n^{-1}\operatorname{Tr}(D^{-1}E)]^{1/2}$, и с учетом (7.5) $q = [n^{-1}k^{-2}(c^TQc)^{-1}\operatorname{Tr}(Q^{-1}bb^T)]^{1/2}$. Подставляя q в систему сравнения (6.2), получаем

$$\begin{gathered} dQ/dt = AQ + QA^T + [n^{-1}k^{-2}(c^TQc)^{-1}\operatorname{Tr}(Q^{-1}bb^T)]^{-1/2}bb^T + \\ +[n^{-1}k^{-2}(c^TQc)^{-1}\operatorname{Tr}(Q^{-1}bb^T)]^{1/2}k^2c^TQc = \\ = AQ + QA^T + k(c^TQc)^{1/2}[n^{-1}\operatorname{Tr}(Q^{-1}bb^T)]^{-1/2}bb^T + k[n^{-1}\operatorname{Tr}(Q^{-1}bb^T)]^{1/2}(c^TQc)^{1/2}c^TQcQ = \\ = AQ + QA^T + k(c^TQc)^{1/2}\{[n^{-1}\operatorname{Tr}(Q^{-1}bb^T)]^{-1/2}bb^T + [n^{-1}\operatorname{Tr}(Q^{-1}bb^T)]^{1/2}Q\}, \end{gathered}$$

т. е. пришли к тому же эволюционному уравнению (7.3), но иным чем в [18] путем, а именно, с использованием полученной выше матричной системы сравнения (6.2).

Итак, было показано, что матричные системы сравнения можно рассматривать как уравнения эволюции эллипсоидов, аппроксимирующих сверху множество достижимости дифференциальных систем. Для случая линейной системы с неопределенным параметром показано, что выбором переменной q в системе сравнения (6.2) можно получить уравнение эволюции верхнего аппроксимирующего эллипсоида [18].

Сравним теперь верхние оценки множества достижимости по методу эллипсоидов [18] с оценками, получаемыми с применением матричной системы сравнения на примере системы второго порядка

$$dx/dt = Ax + b\sigma\eta(t), \quad \sigma = c^Tx, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\eta(t) \in [0, k]$, $k = 1,1$.

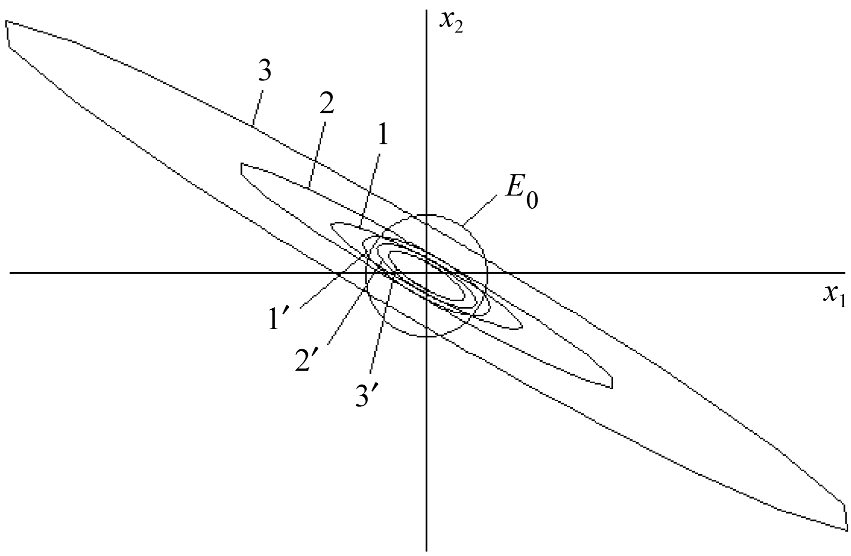

Рис. 6.

На рис. 6 показаны аппроксимирующие эллипсоиды, в которых находятся решения, начинающиеся из эллипсоида E_0 и оказывающиеся через каждые $\Delta t = 1с$ в множествах, ограниченных эллипсоидами 1 и $1'$, 2 и $2'$ и т. д. Здесь цифрами 1, 2, 3 обозначены эллипсоиды, полученные интегрированием эволюционного уравнения (7.3) [18], а цифрами со штрихом — эллипсоиды, полученные интегрированием системы сравнения (6.4). Для численного интегрирования применялся метод Рунге-Кутта 4-го порядка с шагом 0,001. Как видно из рис. 6, эллипсоиды, полученные с применением матричной системы сравнения (6.4), содержатся в соответствующих эллипсоидах, полученных из эволюционного уравнения в одни и те же моменты времени, что говорит о более точной верхней аппроксимации множества достижимости на основе системы сравнения (6.4). Кроме того, оценки, полученные с помощью системы сравнения, сжимаются, в то время как эллипсоиды из эволюционного уравнения расширяются с течением времени, несмотря на асимптотическую устойчивость исходной системы при любом $\eta(t) \in [0, k]$.

Отметим, что при других значениях параметров рассматриваемой системы, например, при $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, эллипсоиды, полученные по обоим способам, ведут себя одинаково (оценки сопоставимы).

Заключение

Метод матричных систем сравнения развит для построения эллипсоидальных оценок решений систем дифференциальных уравнений. Показано, что матричные системы сравнения описывают во времени эволюцию эллипсоида, которому принадлежат решения исходной системы, начинающиеся из заданного эллипсоида. Предложены способы построения матричных систем сравнения для линейных неавтономных систем дифференциальных уравнений с неопределенными параметрами и систем с полиномиальной правой частью. На основе численного интегрирования матричных систем сравнения даются способы построения оценок множества решений и множества достижимости.

Установлена связь матричных систем сравнения с квадратичными функциями Ляпунова, выделяющими инвариантные множества в фазовом пространстве. Проведено сопоставление матричных систем сравнения с эволючионными уравнениями метода эллипсоидов. Выделен класс дифференциальных систем с полиномиальной (нечетной степени) правой частью, для которого матричная система сравнения дает, как и в случае линейной неавтономной системы, точную эллипсоидальную оценку множества решений, начинающихся из заданного эллипсоида. На примере показано, что оценки множества достижимости, получаемые для линейной системы с неопределенным параметром с применением построенных матричных систем сравнения, оказываются в ряде случаев точнее оценок, получаемых по методу эллипсоидов.

Литература

1. Четаев Н.Г. *Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.* – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 534 с.
2. Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова.* – М.: Наука, 1970. – 240 с.
3. Фурасов В.Д. *Устойчивость движения, оценки и стабилизация.* – М.: Наука, 1977. – 248 с.
4. Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И., Матросов В.М. *Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости.* – М.: Наука, 1987. – 312 с.
5. Abdullin R.Z., Anapolski L.J., Kozlov R.I., Malikov A.I., Matrosov V.M., Voronov A.A., Zemljakov A.S. *Vector Lyapunov functions in stability theory* // Advanced series in mathematical science and engineering / Ed. Lakhmikantham V., Matrosov V., Tsokos C.P. – World Federation Publisher Company, 1996. – 394 p.
6. Черноусько Ф.Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов.* – М.: Наука, 1988. – 300 с.
7. Сабаев Е.Ф. *Матричные системы сравнения и их приложение в динамике реакторов.* – М.: Атомиздат, 1980. – 192 с.

8. Маликов А.И., Благов А.Е. *Динамический анализ систем автоматического управления с помощью матричных систем сравнения* // Вестн. Казанск. технич. ун-та. – 1996. – № 4. – С. 71–75.
9. Маликов А.И. *Матричные системы сравнения в исследовании динамики нелинейных систем управления* // Тезисы докл. VII Четаевской конф. "Аналитическая механика, устойчивость движения и управления движением". – Казань: Казанск. технич. ун-т, 1997. – С. 55.
10. Маликов А.И., Благов А.Е. *Анализ динамики многосвязных систем автоматического регулирования с помощью матричных систем сравнения* // Вестн. Казанск. технич. ун-та. – 1998. – № 2. – С. 37–43.
11. Маликов А.И. Матричные системы сравнения в анализе динамики систем управления со структурными изменениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1999. – № 3. – С. 11–21.
12. Маликов А.И. *Матричные системы дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 8. – С. 35–45.
13. Григорьев В.В. *Синтез систем управления для систем с изменяющимися параметрами* // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 2. – С. 64–70.
14. Евтихиев Н.Н, Фурасов В.Д. *Задачи управления с неполной информацией.* – М: Моск. институт радиоэлектроники и автоматики, 1985. – 116 с.
15. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* – М.: Наука. 1985. – 224 с.
16. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1988. – 548 с.
17. Брокетт Р.У. *Алгебры Ли и группы Ли в теории управления* // Матем. методы в теории систем / Под ред. Ю.И. Журавлева. – М.: Мир, 1979. – С. 174–220.
18. Черноусько Ф.Л. *Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей* // ПММ. – 1996. – Т. 60. – № 6. – С. 940–950.

Институт механики и машиностроения
Казанского научного центра
Российской Академии наук

Поступила
16.05.2001