

Е.В. СЕМЕНКО

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

*Аннотация.* Рассматривается обратная задача гидродинамики для обтекания двух профилей. Найден общий вид решения. Ключевым этапом решения является определение числовых параметров, задающих область течения и комплексную скорость в ней с точностью до конформного отображения (задача о параметрах). Доказана разрешимость задачи о параметрах для всевозможных схем течения. Для этого применяется переход на риманову поверхность и существенно используется теория римановых поверхностей.

*Ключевые слова:* обратная задача гидродинамики, линия тока, схема течения, риманова поверхность, тор.

УДК: 517.95

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим плоское потенциальное стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в области  $D_0^+$ , содержащей бесконечность (источник набегающего потока) как внутреннюю точку. Пусть  $L^0 = \partial D_0^+$ . Обратная задача гидродинамики состоит в нахождении контура  $L^0$  (и области  $D_0^+$ ) по заданным характеристикам обтекания. Как правило, считают заданной граничную скорость потока на  $L^0$  как функцию дуговой абсциссы (длины дуги).

Общий принцип решения обратной задачи давно и хорошо известен и, в частности, подробно описан в монографии А.М. Елизарова, Н.В. Ильинского и А.В. Поташева [1]. На основе этого общего принципа рассматривалось множество самых различных вариантов и обобщений задачи, которая до сих пор привлекает большое внимание. В частности, изучались и обратные задачи для многосвязных областей, когда искомыми являются несколько контуров (в классической постановке искомым контур один и, следовательно, область течения односвязна). Обратным задачам в многосвязных областях посвящены, например, работы Д.Ф. Абзалилова, Р.Ф. Марданова и др. [2]–[6].

Однако в теории обратных задач для многосвязных областей остаются несколько весьма важных вопросов, остающихся неисследованными.

Во-первых, как известно, при обтекании тел возможны различные варианты схем течения, различающиеся расположением точек остановки потока. Так, при обтекании одного контура возможны три варианта: либо две точки остановки на контуре, либо одна точка остановки внутри области течения, либо промежуточный случай одной точки остановки на контуре, когда сливаются две точки остановки на контуре или внутренняя точка остановки садится на контур. В классической постановке рассматривается только случай двух точек

остановки на контуре. Впрочем, обратной задаче в односвязной области для всех схем течения посвящена работа автора [7]. Но уже для обтекания двух контуров число различных схем течения весьма велико, полная их классификация приведена в работах автора [8], [9]. Однако в предыдущих работах, посвященных обратной задаче в двусвязной области, снова рассматривается только одна схема течения, когда на каждом обтекаемом контуре расположено по две точки остановки. Все остальные случаи оставались до сих пор вне поля зрения исследователей.

Во-вторых, ключевым моментом в решении обратной задачи является определение числовых параметров, характеризующих область течения и набегающий поток (см. ниже). Для многосвязной области таких параметров несколько и для их вычисления применяется обычно метод Ньютона. Однако совершенно неисследованным остается вопрос: не обращается ли в нуль якобиан соответствующего преобразования. Таким образом, некоторое сомнение вызывает не только применимость метода Ньютона для численных расчетов (а большинство работ посвящено именно им), но и само существование решения обратной задачи. На самом деле доказательство невырожденности якобиана при определении параметров потока является самым трудным вопросом в решении обратной задачи для многосвязной области, все остальное более или менее аналогично классическому односвязному случаю.

Данная работа посвящена решению обратной задаче гидродинамики в двусвязной области для всевозможных схем течения. Автор непосредственно опирался на работы [8], [9], где приведена полная классификация схем течения в двусвязной области, и [10], где указан общий вид комплексной скорости в двусвязной области. При этом чрезвычайно полезной оказалась идея сведения задачи обтекания в двусвязной области к построению абелева дифференциала на торе.

В заключение хотелось бы указать на замечательные работы В.В. Голубева [11], [12], посвященные прямой задаче гидродинамики для двусвязной [11] и многосвязной [12] областей. С одной стороны, эти работы задают идейную и техническую основу для имеющихся (например, [2]–[6]) работ по обратной задаче в многосвязных областях. С другой стороны, в [12] по-видимому впервые выдвигаются плодотворные идеи использования теории римановых поверхностей для решения задач гидродинамики, в частности, интерпретация комплексной скорости как абелева дифференциала, а комплексного потенциала как абелева интеграла на римановой поверхности, на которых во многом основана и настоящая работа.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Перейдем к точным формулировкам. Рассматривается обтекание двух профилей  $L_1^0$  и  $L_2^0$ , т. е. течение в двусвязной области  $D_0^+$  с границей  $\partial D_0^+ = L^0 = L_1^0 \cup L_2^0$ , причем бесконечность — внутренняя точка  $D_0^+$ . Обход  $L^0$  примем против часовой стрелки, т. е. область  $D_0^+$  расположена справа от  $L^0$ .

Течение описывается аналитическими в  $D_0^+$  функциями: комплексным потенциалом или его производной — комплексной скоростью. Ненулевой (непостоянный) комплексный потенциал обязательно имеет особые точки, которые обычно называют источниками течения (см., например, [11], [12]). В нашей задаче единственный источник течения расположен в бесконечности. Это означает, что комплексная скорость аналитична в бесконечности и ее значение в бесконечно удаленной точке интерпретируется как скорость набегающего потока.

Заданы длины контуров  $l_j = l(L_j^0)$ ,  $j = 1, 2$ , и на обоих контурах в терминах длины дуги (дуговой абсциссы)  $s$  заданы скорости потока  $v_j(s)$ ,  $s \in [0, l_j]$ ,  $j = 1, 2$ . Поскольку на границе скорость направлена по касательной к контуру, то считаем  $v_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ , причем  $|v_j|$  есть

величина скорости, а знак указывает на соответствие направления скорости и направления обхода  $L^0$ . Поскольку очевидно  $v_j(l_j) = v_j(0)$ , то функции  $v_j$  будем считать заданными на всей прямой и  $l_j$ -периодическими. Строго говоря, они заданы с точностью до сдвига  $s \rightarrow s - s_0^j$ ,  $s_0^j = \text{const}$ ,  $j = 1, 2$ , т. е. за начало отсчета дуговой абсциссы можно принять любую точку. Отметим, что по заданным граничным скоростям вычисляются циркуляции вектора скорости вокруг контуров

$$\Gamma_j = \Gamma(L_j^0) = \int_0^{l_j} v_j(s) ds, \quad j = 1, 2,$$

которые, таким образом, тоже заданы. Будем считать дополнительно заданным расход потока между контурами  $\Gamma_3$ . Кроме этого, в зависимости от схемы течения будем дополнительно задавать некоторые параметры, как правило расходы или разности потенциалов между обтекаемыми профилями и/или точками остановки потока.

Требуется найти контуры  $L_j^0$ ,  $j = 1, 2$ , и область  $D_0^+$ . Известно [10], что двусвязную область  $D_0^+$  можно конформно отобразить на плоскость с двумя разрезами по отрезкам вещественной оси. При этом с точностью до линейного отображения один из отрезков можно задать произвольно, далее будем считать, что это отрезок  $[0, 1]$ . Итак, пусть  $D^+ = \mathbb{C} \setminus L$ ,  $L = L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 = [0, 1]$ ,  $L_2 = [p_0, p_1]$ ,  $p_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, 1$ ;  $1 < p_0 < p_1$  и  $z(\xi) : D_0^+ \rightarrow D^+$  — конформное отображение с условием  $z(\infty) = \infty$ . Как показано в [10], параметры  $p = (p_0, p_1)$  и отображение  $z(\xi)$  контурами  $L_j^0$ ,  $j = 1, 2$ , определяются однозначно с точностью до замены  $L_1^0$  на  $L_2^0$ . Собственно обратная задача как раз состоит в определении параметров  $p$  и обратного конформного отображения  $\xi(z)$ , поскольку тогда определяются  $L_2 = L_2(p)$ ,  $D^+ = D^+(p)$  и  $L_j^0 = \xi(L_j)$ ,  $j = 1, 2$ ;  $D_0^+ = \xi(D^+)$ . Далее область  $D^+$  будем называть канонической. Стороны разрезов  $L_j$  будем обозначать так:  $L_j^+$  — верхняя и  $L_j^-$  — нижняя, т. е. строго говоря  $L_j = L_j^+ \cup L_j^-$ ,  $j = 1, 2$ . Положительное направление обхода для отрезков  $L_j^-$  — слева направо, для  $L_j^+$  — справа налево.

Пусть  $\xi_j(s)$  — точка контура  $L_j^0$  с дуговой абсциссой  $s$ ,  $s \in [0, l_j]$ ;  $t = z(\xi_j(s)) = t_j(s)$  — соответствующая точка контура  $L_j$  в канонической области,  $j = 1, 2$ . Очевидно, функции  $t_j(s)$  можно считать заданными на всей прямой  $\mathbb{R}$  и  $l_j$ -периодическими. Общая стандартная схема решения обратной задачи такова [1], [2], [7]: сначала по данным задачи находим каноническую область  $D^+$ , т. е. параметры  $p = (p_0, p_1)$ , и комплексную скорость в  $D^+$ , далее с помощью комплексной скорости и заданных граничных скоростей  $v_j(s)$ ,  $j = 1, 2$ , устанавливаем соответствие между точками контура в канонической области и дуговыми абсциссами, т. е. находим функции  $t = t_j(s)$ ,  $j = 1, 2$ , после чего получаем краевую задачу для функции  $\xi'(z)$  в канонической области  $D^+$ , решение которой и дает искомое конформное отображение  $\xi(z)$ . Существенную трудность в реализации этой схемы представляет только первый этап, а остальные не слишком отличаются от случая обтекания одного профиля. Удобнее будет начать изложение именно с последних двух этапов. Однако сначала приведем некоторые сведения о виде комплексной скорости в канонической области, установленные в работе [10].

## 2. КОМПЛЕКСНАЯ СКОРОСТЬ В КАНОНИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ, ЗАДАЧА О ПАРАМЕТРАХ

Пусть  $P(z) = z(z-1)(z-p_0)(z-p_1)$ , выберем аналитическую в  $D^+$  ветвь функции  $\sqrt{P(z)}$  так, что  $\sqrt{P(z)} = z^2 + z \cdot O(1)$ ,  $z \rightarrow \infty$ . Очевидно,  $P(z) \in \mathbb{R}$  при  $z \in \mathbb{R}$ ,  $P(z) > 0$  при  $z \in \mathbb{R} \setminus L$ ,  $P(z) < 0$  при  $z \in L$ ,  $z \neq 0, 1, p_0, p_1$ . Фиксация ветви  $\sqrt{P(z)}$ , в частности, означает, что при

$z \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{P(z)} = \begin{cases} \sqrt{|P(z)|}, & z \in (-\infty, 0) \cup (p_1, +\infty); \\ -\sqrt{|P(z)|}, & z \in (1, p_0); \\ \pm i\sqrt{|P(z)|}, & z \in L_2^\pm; \\ \mp i\sqrt{|P(z)|}, & z \in L_1^\pm, \end{cases}$$

где  $\sqrt{|P(z)|}$  — положительный квадратный корень.

Введем обозначения

$$I(p) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{|P(t)|}}; \quad I_k(p) = \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{|P(t)|}} dt, \quad k = 1, 2; \quad J(p) = \int_1^{p_0} \frac{dt}{\sqrt{|P(t)|}};$$

$$\beta_2(p) = \frac{I_1(p)}{I(p)}, \quad \beta_1(p) = \beta_2(p) + \frac{\pi}{I(p)}, \quad S(p) = 1 + p_0 + p_1, \quad c(p) = \frac{1}{2}\beta_2(p)S(p) - \frac{I_2(p)}{I(p)};$$

$$h_{1,2}(z) = h_{1,2}(z | p) = z - \beta_{1,2}(p), \quad h_0(z) = h_0(z | p) = z^2 - S(p)z/2 + c(p).$$

Как показано в [10]

$$\int_{L_j} \frac{h_k(t)}{\sqrt{P(t)}} dt = 2\pi i \delta_{jk} = \begin{cases} 2\pi i, & j = k; \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad \int_{L_j} \frac{h_0(t)}{\sqrt{P(t)}} dt = 0, \quad j, k = 1, 2. \quad (1)$$

Комплексная скорость потока в канонической области  $D^+$  имеет вид [10]

$$f(z) = V_R + i \frac{\psi(z)}{\sqrt{P(z)}}, \quad \psi(z) = V_I h_0(z) - \frac{\Gamma_1}{2\pi} h_1(z) - \frac{\Gamma_2}{2\pi} h_2(z), \quad (2)$$

где  $V_R - iV_I = V(\infty)$  — скорость набегающего потока,

$$\Gamma_j = \int_{L_j} f(z) dz, \quad j = 1, 2,$$

— циркуляции вектора скорости вокруг обтекаемых контуров  $L_{1,2}$  соответственно.

Напомним, что расход между любыми двумя точками течения

$$\Delta\Psi(z_1, z_2) = \text{Im} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$$

определяется однозначно, т. е. не зависит от выбора кривой, соединяющей  $z_1$  и  $z_2$ , и не меняется, если точки  $z_1$  или  $z_2$  двигаются вдоль линий тока, в частности, корректно определены

$$\Delta\Psi(L_j, z) = \text{Im} \int_t^z f(z) dz, \quad t \in L_j, \quad j = 1, 2,$$

и расход потока между обтекаемыми контурами

$$\Gamma_3 = \Delta\Psi(L_1, L_2) = \text{Im} \int_{t_1}^{t_2} f(z) dz, \quad t_j \in L_j, \quad j = 1, 2.$$

Однако разность потенциалов течения

$$\Delta\Phi(z_1, z_2) = \text{Re} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$$

определяется по модулю циркуляций, т. е. с точностью до  $n\Gamma_1 + m\Gamma_2$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ , и, таким образом, зависит от выбора кривой, соединяющей  $z_1$  и  $z_2$ .

Если задан расход между контурами

$$\Gamma_3 = \operatorname{Im} \int_1^{p_0} f(z) dz = - \int_1^{p_0} \frac{\psi(t)}{\sqrt{|P(t)|}} dt = -V_I J_0(p) + \frac{\Gamma_1}{2\pi} J_1(p) + \frac{\Gamma_2}{2\pi} J_2(p),$$

$$J_k(p) = \int_1^{p_0} \frac{h_k(t)}{\sqrt{|P(t)|}} dt, \quad k = 0, 1, 2,$$

то однозначно определяется

$$V_I = V_I(p) = -\frac{\Gamma_3}{J_0(p)} + \frac{\Gamma_1 J_1(p)}{2\pi J_0(p)} + \frac{\Gamma_2 J_2(p)}{2\pi J_0(p)}$$

и, таким образом,  $\psi(z) = \psi(z | p)$ . Отметим, что  $J_0(p) < 0$ , поскольку  $h_0(t) < 0$  [10] при  $t \in [1, p_0]$ .

Параметрами, определяющими каноническую область и комплексную скорость в ней, являются  $V_R$ ,  $V_I$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $p = (p_0, p_1)$ . Вычисление этих параметров будем называть задачей о параметрах. Как отмечалось, если заданы граничные скорости  $v_j(s)$ ,  $j = 1, 2$ , то автоматически заданы циркуляции  $\Gamma_{1,2}$ . Если при этом задан и расход  $\Gamma_3$ , то однозначно определяется  $V_I$ . Таким образом, решение задачи о параметрах состоит в определении параметров  $V_R$  и  $p = (p_0, p_1)$ .

В заключение данного раздела скажем несколько слов об общей постановке задачи о параметрах. Как видели, искомая двусвязная область  $D_0^+$  с точностью до конформного отображения, сохраняющего источник течения в бесконечности, определяется двумя вещественными параметрами  $p = (p_0, p_1)$ , а комплексная скорость в  $D_0^+$  — еще четырьмя параметрами  $V_R$ ,  $V_I$ ,  $\Gamma_{1,2}$ . Здесь циркуляции  $\Gamma_{1,2}$  однозначно вычисляются по заданным граничным скоростям  $v_{1,2}(s)$ . Однако для определения оставшихся четырех параметров одних граничных скоростей недостаточно, и необходимо задавать некоторые дополнительные характеристики течения, число которых зависит от схемы течения. Эти дополнительные характеристики могут описывать локальное поведение течения в окрестности обтекаемых контуров, как, например, введенный расход потока между контурами  $\Gamma_3$ , либо иметь нелокальный характер, например, можно непосредственно задавать скорость на бесконечности. При этом задание локальных характеристик потока представляется более целесообразным с прикладной точки зрения, поэтому в настоящей работе дополнительно к граничным профилям скоростей будут при необходимости считаться заданными некоторые локальные числовые характеристики вроде расхода или разности потенциалов между точками остановки, а скорость на бесконечности неизменно считается искомой.

### 3. УСТАНОВЛЕНИЕ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ТОЧКАМИ КОНТУРА В КАНОНИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ И ДУГОВЫМИ АБСЦИССАМИ

Пусть решена задача о параметрах, т. е. полностью известны каноническая область  $D^+$  и комплексная скорость в ней  $f(z)$ ,  $z \in D^+$ . Поскольку отрезки  $L_j$ ,  $j = 1, 2$ , имеют по две стороны  $L_j^\pm$  с противоположными направлениями обхода ( $L_j^-$  — слева направо, а  $L_j^+$  — справа налево), то далее для удобства будем говорить, что вещественная функция  $\Phi(t) : L_j \rightarrow \mathbb{R}$  монотонно возрастает (убывает), если ее значения возрастают (убывают) при движении  $t$  по направлению обхода  $L_j$ . В аналогичном смысле будем говорить о возрастании (убывании) функции  $t(s) : \mathbb{R} \rightarrow L_j$ . В частности, искомые функции  $t_j(s)$ ,  $j = 1, 2$ , монотонно возрастают.

Для отдельно взятого контура  $L = L_j$  длиной  $l = l_j$ ,  $j = 1$  или  $j = 2$ , введем разности потенциалов

$$\Delta\Phi(t_0, t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, \quad t_0, t \in L; \quad \Delta\Phi^0(s_0, s) = \int_{s_0}^s v(\zeta) d\zeta, \quad s_0, s \in [0, l].$$

Если точкам  $t_0, t$  соответствуют дуговые абсциссы  $s_0, s$ , то имеем

$$\Delta\Phi^0(s_0, s) = \Delta\Phi(t_0, t). \quad (3)$$

Поскольку функции  $\Delta\Phi^0(s_0, s)$  и  $\Delta\Phi(t_0, t)$  одновременно монотонно возрастают или убывают по  $s$  и  $t$  соответственно, когда точки  $s, t$  лежат между точками остановки, то равенство (3) позволяет найти зависимость  $t = t(s)$ , необходимо только обеспечить его в точках остановки.

Напомним, что на каждом из  $L_j$  может быть две или четыре точки остановки, или может не быть их вовсе, причем общее число точек остановки, как граничных (на  $L$ ), так и внутренних (в  $D^+$ ), не превосходит четырех [8], [9]. Если на  $L_j$  нет точек остановки, то равенство (3) позволяет найти  $t_j(s)$ , если произвольно задать начальные точки отсчета  $s_0$ ,  $t_0 = t_j(s_0)$ , при этом изменение начальных точек  $t_0, s_0$  приводит к сдвигу аргумента  $s$ . Если на  $L_j$  имеется две точки остановки, то для установления соответствия  $t = t_j(s)$  необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{s_1}^{s_2} v_j(s) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt, \quad (4)$$

где  $s_1$  (соответственно  $t_1$ ) — точка разветвления, а  $s_2$  (и  $t_2$ ) — точка схода потока. Наконец, если на  $L_j$  имеются четыре точки остановки, то требуется обеспечить выполнение равенств

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} v_j(s) ds = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где  $s_1$  и  $s_3$  ( $t_1$  и  $t_3$ ) — точки разветвления, а  $s_2$  и  $s_4$  ( $t_2$  и  $t_4$ ) — точки схода (точки занумерованы по направлению обхода контура). В последних двух случаях в качестве начальной точки естественно принять  $t_0 = t_1$ ,  $s_0 = s_1$ .

#### 4. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть известна каноническая область  $D^+$ , установлено соответствие между дуговой абсциссой и точками контура  $L = L_1 \cup L_2$  в канонической плоскости, т. е. известны монотонно возрастающие и  $l_j$ -периодические функции  $t_j(s) : \mathbb{R} \rightarrow L_j$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда существуют обратные монотонно возрастающие отображения  $s_j(t) : L_j \rightarrow [0, l_j]$ ,  $j = 1, 2$ . Будем обозначать  $t_j^0 = t_j(0) = t_j(nl_j)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $j = 1, 2$ . Если  $\xi(z) : D^+ \rightarrow D_0^+$  — искомое конформное отображение, то

$$s_j(t) = \int_{t_j^0}^t |\xi'(\tau)| |d\tau|, \quad t \in L_j, \quad j = 1, 2,$$

откуда

$$|\xi'(t)| = |s_j'(t)|, \quad t \in L_j, \quad j = 1, 2,$$

т. е. известны граничные значения функции  $|\xi'(z)|$  на  $L$ . Тогда стандартным образом для искомой функции  $\varphi(z) = \ln \xi'(z)$  получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi(t) &= \gamma(t), \quad t \in L; \quad \gamma(t) = \ln |s'_j(t)|, \quad t \in L_j; \\ \Delta \varphi(z)|_L &= \int_L \varphi'(t) dt = 0, \quad \Delta \varphi(z)|_{L_1} = \int_{L_1} \varphi'(t) dt = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{Res} \varphi(\infty) &= 0, \quad \int_{L_1} \exp(\varphi(t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Легко видеть, что решение задачи Шварца  $\operatorname{Re} \tilde{\varphi}(t) = \gamma(t)$ ,  $t \in L$ , в двусвязной области  $D^+$  имеет вид

$$\tilde{\varphi}(z) = \int_L \gamma(t) \tilde{K}(t, z) dt, \quad \tilde{K}(t, z) = -\frac{1}{2\pi i(t-z)} \left( \frac{\sqrt{P(z)}}{\sqrt{P(t)}} + 1 \right),$$

а при  $z \rightarrow \infty$

$$\tilde{\varphi}(z) = -\tilde{C} \cdot z + O(1), \quad \tilde{C} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(t)}{\sqrt{P(t)}} dt \in \mathbb{R}$$

(напомним, что при  $t \in L$   $\sqrt{P(t)} = \pm i\sqrt{|P(t)|}$ ).

Тогда, используя совершенно стандартные рассуждения, получим решение обратной задачи.

**Теорема 1.** Пусть заданы функции  $t_j(s) : \mathbb{R} \rightarrow L_j$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда для разрешимости обратной задачи необходимо и достаточно выполнения трех условий разрешимости:

$$\begin{aligned} &\frac{J_0(p)I(p)}{J(p)2\pi^2 i} \left( \int_0^{l_1} \frac{\ln |t'_1(s)|t'_1(s)}{\sqrt{P(t_1(s))}} ds + \int_0^{l_2} \frac{\ln |t'_2(s)|t'_2(s)}{\sqrt{P(t_2(s))}} ds \right) \in \mathbb{Z}; \\ &\int_0^{l_1} \ln |t'_1(s)| \left( 1 - \frac{4S(p)t_1(s) - 8t_1^2(s) + 8J(p)/J_0(p) - 8c(p)}{\sqrt{P(t_1(s))}} \right) t'_1(s) ds + \\ &\quad + \int_0^{l_2} \ln |t'_2(s)| \left( 1 - \frac{4S(p)t_2(s) - 8t_2^2(s) + 8J(p)/J_0(p) - 8c(p)}{\sqrt{P(t_2(s))}} \right) t'_2(s) ds = 0; \\ &\int_0^{l_1} \exp \Phi(t_1(s)) \frac{t'_1(s)}{|t'_1(s)|} ds + \int_0^{l_2} \exp \Phi(t_2(s)) \frac{t'_2(s)}{|t'_2(s)|} ds = 0, \\ &\Phi(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{l_1} \ln |t'_1(s)| K(t_1(s), t) t'_1(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{l_2} \ln |t'_2(s)| K(t_2(s), t) t'_2(s) ds. \end{aligned}$$

При их выполнении решение обратной задачи имеет вид

$$D_0^+ = \xi(D^+), \quad L_j^0 = \xi(L_j), \quad j = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} \xi(z) &= B + e^{i\alpha} \xi_0(z), \\ \xi_0(z) &= \int_{z_0}^z \exp \left( -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{l_1} \ln |t'_1(s)| K(t_1(s), \zeta) t'_1(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{l_2} \ln |t'_2(s)| K(t_2(s), \zeta) t'_2(s) ds \right) d\zeta, \\ B, z_0 &= \text{const} \in \mathbb{C}, \quad \alpha = \text{const} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Здесь

$$K(t, z) = -\frac{1}{t-z} \left( \frac{\sqrt{P(z)}}{\sqrt{P(t)}} + 1 \right) + \frac{1}{\sqrt{P(t)}} \int_0^z \frac{h_0(\zeta) - J(p)/J_0(p)}{\sqrt{P(\zeta)}} d\zeta.$$

**Замечания.** 1. Заданными функциями  $t_j(s)$  решение обратной задачи, т. е. контуры  $L_j^0$ ,  $j = 1, 2$ , и область  $D_0^+$ , определяются с точностью до произвольного сдвига (выбор  $B \in \mathbb{C}$  или  $z_0$ ) и поворота (выбор  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

2. Легко видеть, что в случае  $v_j(s) \neq 0$  решение обратной задачи и условия ее разрешимости не зависят от сдвига переменной  $s$ , т. е. при вычислении  $t_j(s)$  в случае  $v_j(s) \neq 0$  совершенно безразлично, что выбирать в качестве начальной точки  $t_0 \in L_j$  и  $s_0$  (см. раздел 3).

3. Поскольку функции  $t_j(s)$  вычисляются по заданным граничным скоростям  $v_j(s)$ ,  $j = 1, 2$ , с помощью уравнения (3), то условия разрешимости обратной задачи представляют собой три нелинейных функциональных условия на заданные граничные скорости.

Осталось рассмотреть задачу о параметрах. Это наиболее сложная и содержательная часть общей задачи. Для исследования ее разрешимости привлечем теорию римановых поверхностей, как в статье [10].

## 5. ПЕРЕХОД НА РИМАНОВУ ПОВЕРХНОСТЬ, ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПАРАМЕТРАХ

Рассмотрим риманову поверхность  $D$ , представляющую собой два экземпляра области  $D^+$ , склеенные по общей границе  $L$ , причем на втором экземпляре (будем обозначать его  $D^-$ ) вводится сопряженная комплексная структура. Итак,  $D = D^+ \cup D^- \cup L$ , мероморфные на  $D$  функции имеют вид

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_1(z), & z \in D^+; \\ \varphi_2(\bar{z}), & z \in D^-, \end{cases}$$

а абелевы дифференциалы

$$dW(z) = \begin{cases} f_1(z)dz, & z \in D^+; \\ f_2(\bar{z})d\bar{z}, & z \in D^-, \end{cases}$$

причем функции  $\varphi_{1,2}(z)$ ,  $f_{1,2}(z)$  мероморфны в  $D^+$  и при  $z \in L$   $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ ,  $f_1(z) = f_2(z)$ . Чтобы различать одинаковые точки плоскости, лежащие на разных листах поверхности  $D$ , будем обозначать их через  $z \in D^+$  и  $z^- \in D^-$  и называть симметричными точками. Симметричные точки  $D$  совпадают тогда и только тогда, когда они лежат на  $L$ . Функцию или дифференциал будем называть симметричными, если они сопряженные в симметричных точках, т. е. если  $\varphi_1(z) = \bar{\varphi}_2(\bar{z})$ ,  $f_1(z) = \bar{f}_2(\bar{z})$ . Очевидно, функцию  $\varphi(z)$  или дифференциал  $f(z)dz$ , заданные при  $z \in D^+$ , можно продолжить как симметричные на всю риманову поверхность  $D$  тогда и только тогда, когда  $\text{Im } \varphi(z) = 0$  или  $\text{Im } f(z) = 0$  при  $z \in L$ . При выполнении этого условия заданные в  $D^+$  функции и/или дифференциалы будем считать автоматически продолженными на  $D$ .

Пусть  $dW(z)$  — симметричный абелев дифференциал на  $D$  и  $dW(z) = f(z)dz$  при  $z \in D^+$ ; точка  $z_1 \in D^+$  и пусть кривая  $L(z_1)$  соединяет  $z_1$  и  $z_1^-$  (и, следовательно, обязательно пересекает  $L$ ). Очевидно, кривую  $L(z_1)$  с точностью до гомотопии в  $D$  можно выбрать так, чтобы кривые  $L(z_1)^\pm = L(z_1) \cap D^\pm$  были симметричны, т. е. совпадали как кривые на плоскости и соединяли точку  $z_1$  с некоторой точкой  $t \in L$ . Тогда

$$\int_{L(z_1)} dW(z) = \int_{z_1}^t f(\xi) d\xi + \int_t^{z_1^-} f(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \int_{z_1}^t f(\xi) d\xi - \int_{z_1}^t \bar{f}(\xi) d\bar{\xi} = 2i \text{Im} \int_{z_1}^t f(\xi) d\xi. \quad (7)$$

В случае, рассматриваемом в данной работе, контур  $L$  имеет две компоненты связности  $L_1$  и  $L_2$  и поверхность  $D$  будет очевидно поверхностью рода 1, т. е. тором. Напомним

([13], с. 86), что для любой мероморфной функции на римановой поверхности порядок ее дивизора равен нулю, т.е. число ее нулей равно числу полюсов с учетом кратности. Порядок дивизора абелева дифференциала на поверхности рода  $\rho$  равен  $2\rho - 2$ , т.е. в случае поверхности рода  $\rho = 1$  тоже равен нулю. В частности, существует единственный (с точностью до постоянного множителя) абелев дифференциал  $dW_0$ , не имеющий нулей и полюсов, и, следовательно, любой абелев дифференциал  $dW$  имеет вид  $dW = f(z) dW_0$ , где  $f(z)$  — мероморфная функция, имеющая тот же дивизор, что и  $dW$ .

В нашем случае [10]

$$dW_0 = \frac{I(p)}{\pi i} \frac{h_1(z) - h_2(z)}{\sqrt{P(z)}} dz = \frac{i dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad z \in D^+,$$

причем дифференциал  $dW_0$  симметричен. Образующими гомотопической группы  $D$  будут, очевидно,  $L_1$  или гомотопный ему  $L_2$  с противоположным направлением обхода и  $L_0 = [1, p_0] \cup ([p_0, 1])^-$  или гомотопный ему  $L_0^0 = L_0^1 \cup (L_0^1)^-$ ,  $L_0^1 = [0, -\infty] \cup [+ \infty, p_1]$ . Здесь через  $[a, b]$  при  $a > b$  обозначается отрезок  $[b, a]$ , обходимый справа налево;  $[1, p_0] \subset D^+$  и  $L_0^1 \subset D^+$ ;  $([p_0, 1])^- \subset D^-$  и аналогично  $(L_0^1)^-$  — кривая, симметричная  $L_0^1$ , с противоположным направлением обхода. Отметим, что для симметричных дифференциалов  $dW$  в силу формулы (7) имеем

$$\int_{L_0} dW = 2i \operatorname{Im} \int_1^{p_0} dW, \quad \int_{L_0^0} dW = -2i \operatorname{Im} \left[ \int_{-\infty}^0 + \int_{p_1}^{+\infty} \right] dW. \quad (8)$$

С учетом формул (1), (8) периоды дифференциала  $dW_0$

$$\int_{L_1} dW_0 = 2I(p), \quad \int_{L_0} dW_0 = 2i \operatorname{Im} \int_1^{p_0} \frac{dt}{-\sqrt{|P(t)|}} = -2iJ(p). \quad (9)$$

Рассмотрим некоторые абелевы дифференциалы на  $D$ , непосредственно связанные с комплексной скоростью. Дифференциал  $dW_R = dz$ ,  $z \in D^+$ , симметричен и имеет на  $D$  два двукратных полюса в точках  $\infty \in D^+$  и  $\infty^- \in D^-$  [10]. Гомотопический базис его области аналитичности  $D \setminus \{\infty, \infty^-\}$  образуют  $L_1, L_2$  (которые теперь не гомотопны) и  $L_0$ . Очевидно, периоды этого дифференциала

$$\int_{L_1} dW_R = \int_{L_2} dW_R = \int_{L_0} dW_R = 0,$$

т.е. интеграл от  $dW_R$  по любому замкнутому контуру, не проходящему через его полюса, равен нулю и, значит, абелев интеграл

$$W_R(z) = \int_{z_0}^z dW_R = z - z_0$$

будет однозначной мероморфной в  $D$  функцией, кратной дивизору  $z_0(\infty)^{-1}(\infty^-)^{-1}$ , т.е. имеющей полюса первого порядка в  $\infty$  и  $\infty^-$  и однократный нуль в  $z_0$ . Если  $z_0 \in L$ , то функция  $W_R(z)$  симметрична.

Как показано в [10], дифференциал

$$dW_I = \frac{ih_0(z)}{\sqrt{P(z)}} dz, \quad z \in D^+,$$

также симметричен, имеет два двукратных полюса в  $\infty$  и  $\infty^-$ , его периоды (формула (1))

$$\int_{L_1} dW_I = \int_{L_2} dW_I = 0, \quad (10)$$

однако

$$\int_{L_0} dW_I = 2i \operatorname{Im} \int_1^{p_0} \frac{ih_0(t)}{-\sqrt{|P(t)|}} dt = -2iJ_0(p) \neq 0. \quad (11)$$

Наконец, с комплексной скоростью  $f(z)$  связан симметричный абелев дифференциал на  $D$

$$dW = f(z) dz = \left( V_R + i \frac{\psi(z)}{\sqrt{P(z)}} \right) dz = V_R dW_R + V_I dW_I - \left( \frac{\Gamma_1}{2\pi} h_1(z) + \frac{\Gamma_2}{2\pi} h_2(z) \right) dW_0,$$

имеющий представление

$$dW = f_0(z) dW_0, \quad f_0(z) = -iV_R \sqrt{P(z)} + \psi(z) \quad \text{при } z \in D^+, \quad (12)$$

причем  $f_0(z)$  — симметричная мероморфная на  $D$  функция с теми же нулями и полюсами, что и  $dW$ . Но дифференциал  $dW$  имеет двукратные полюса в точках  $\infty$  и  $\infty^-$ , т. е.  $dW$  и  $f_0$  должны иметь по четыре нуля. Следует учесть, что при наличии у комплексной скорости  $f(z)$  внутреннего нуля (точки остановки)  $z_0 \in D^+$  дифференциал  $dW$  и функция  $f_0$  будут иметь нуль той же кратности еще и в симметричной точке  $z_0^- \in D^-$ . Далее нули функции  $f_0(z)$  (в том числе и на втором листе) тоже будем называть точками остановки.

Теперь обратимся к некоторым функциям и дифференциалам, связанным с решением задачи о параметрах. Для вычисления параметров  $V_R$  и  $p = (p_0, p_1)$  будем использовать задание расхода или разности потенциалов между точками остановки. Очевидно, точки остановки непрерывно зависят от параметров  $V_R$  и  $p$ .

**Лемма 1.** Пусть  $z_j(V_R, p)$ ,  $j = 1, 2$ , — непрерывно зависящие от параметров корни комплексной скорости  $f(z) = f(z | V_R, p)$ . Введем функцию

$$g(V_R, p) = \int_{z_1(V_R, p)}^{z_2(V_R, p)} f(z) dz.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial V_R} &= \int_{z_1(V_R, p)}^{z_2(V_R, p)} dz = z_2(V_R, p) - z_1(V_R, p), \\ \frac{\partial g}{\partial p_k} &= \psi(p_k) \int_{z_1(V_R, p)}^{z_2(V_R, p)} \frac{i}{\sqrt{P(z)}} \left[ \frac{1}{2(z - p_k)} - \alpha_k(p) - \gamma_k(p) h_0(z) \right] dz, \quad k = 0, 1, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_k(p) = \frac{\partial I(p)/\partial p_k}{I(p)}, \quad \gamma_k(p) = \frac{1}{J_0(p)} \left( \frac{\partial J(p)}{\partial p_k} - \frac{J(p)}{I(p)} \frac{\partial I(p)}{\partial p_k} \right), \quad k = 0, 1.$$

*Доказательство.* Так как  $f(z_j(V_R, p) | V_R, p) \equiv 0$ , то

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} = \int_{z_1(V_R, p)}^{z_2(V_R, p)} \frac{\partial f(z | V_R, p)}{\partial \zeta} dz,$$

где  $\zeta$  — любой из параметров  $V_R, p_0, p_1$ . Но  $\partial f/\partial V_R = 1$ , значит,

$$\frac{\partial g}{\partial V_R} = \int_{z_1(V_R, p)}^{z_2(V_R, p)} dz = z_2(V_R, p) - z_1(V_R, p).$$

Непосредственным вычислением находим

$$\frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{i\psi(p_k)}{\sqrt{P(z)}} \left[ \frac{1}{2(z - p_k)} - \alpha_k(p) - \gamma_k(p) h_0(z) \right], \quad k = 0, 1,$$

где

$$\alpha_k = \frac{\partial I(p)/\partial p_k}{I(p)}, \quad \gamma_k = \frac{1}{J_0(p)} \left( \frac{\partial J(p)}{\partial p_k} - \frac{J(p)}{I(p)} \frac{\partial I(p)}{\partial p_k} \right), \quad k = 0, 1. \quad \square$$

Производные функции  $g$  непосредственно связаны с мероморфными функциями на  $D$ . Так,

$$\frac{\partial g}{\partial V_R} = \int_{z_1}^{z_2} dW_R = W_R(z_2) - W_R(z_1).$$

**Лемма 2.** Пусть

$$d\widetilde{W}_k = \frac{i}{\sqrt{P(z)}} \left[ \frac{1}{2(z - p_k)} - \alpha_k(p) - \gamma_k(p)h_0(z) \right] dz, \quad z \in D^+, \quad k = 0, 1.$$

Тогда  $d\widetilde{W}_k$  — симметричные абелевы дифференциалы на  $D$ , имеющие двукратные полюса в  $\infty$  и  $\infty^-$  и по одному двукратному полюсу в точках  $p_k$ ,  $k = 0, 1$ . При этом интеграл от  $d\widetilde{W}_k$ ,  $k = 0, 1$ , по любому замкнутому контуру, не проходящему через его полюса, равен нулю, т. е. абелевы интегралы

$$\widetilde{W}_k(z) = \int_{z_0}^z d\widetilde{W}_k, \quad z_0 \neq \infty, \infty^-, p_k,$$

будут однозначными мероморфными функциями в  $D$ , кратными дивизорам

$$z_0(\infty)^{-1}(\infty^-)^{-1}(p_k)^{-1}, \quad k = 0, 1.$$

*Доказательство.* Имеем представление

$$d\widetilde{W}_k = dW_k^0 - \alpha_k dW_0 - \gamma_k dW_I, \quad dW_k^0 = \frac{idz}{2(z - p_k)\sqrt{P(z)}}, \quad z \in D^+, \quad k = 0, 1. \quad (13)$$

Очевидно, дифференциалы  $dW_k^0$  симметричны и имеют по одному полюсу в точках  $p_k$ ,  $k = 0, 1$ . Но [10] в окрестности точки  $p_0$  локальный параметр в  $D$  имеет вид  $z = p_0 + t^2$ ,  $|t| < \varepsilon$  (при  $\text{Im } t > 0$   $z \in D^+$ ), значит,  $\sqrt{P(z)} = \sqrt{(p_0 + t^2)(p_0 - 1 + t^2)t^2(p_0 - p_1 + t^2)} = t\varphi(t)$ ,  $\varphi(0) \neq 0$  при  $z \rightarrow p_0$ , откуда

$$dW_0^0 = \frac{2it dt}{2t^2 \cdot t\varphi(t)} = \frac{i dt}{t^2\varphi(t)},$$

т. е.  $dW_0^0$  имеет в точке  $p_0$  полюс второго порядка. Аналогично,  $dW_1^0$  имеет полюс второго порядка в  $p_1$ . Тогда из представления (13) следуют утверждения леммы о симметричности и полюсах  $d\widetilde{W}_k$ ,  $k = 0, 1$ .

Осталось доказать равенство нулю интеграла по любому замкнутому контуру. Пусть контуры  $\widetilde{L}_2^\pm$  — это слегка деформированный контур  $L_2$ , причем  $p_k \notin \widetilde{L}_2^\pm$ ,  $k = 0, 1$  и  $\widetilde{L}_2^\pm \subset D^\pm$ . Рассмотрим для начала дифференциал  $d\widetilde{W}_1$ . Гомотопический базис его области аналитичности  $D \setminus \{\infty, \infty^-, p_1\}$  составляют  $L_1$ ,  $\widetilde{L}_2^+$ ,  $\widetilde{L}_2^-$  и  $L_0$ . Но

$$\int_{L_1} dW_1^0 = 2 \int_0^1 \frac{dt}{2(t - p_1)\sqrt{|P(t)|}} = 2 \frac{\partial I(p)}{\partial p_1} = 2\alpha_1(p)I(p),$$

откуда, учитывая значения периодов  $dW_0$  (см. (9)) и  $dW_I$  (см. (10)), получим

$$\int_{L_1} d\widetilde{W}_1 = \int_{L_1} dW_1^0 - \alpha_1(p) \int_{L_1} dW_0 - \gamma_1(p) \int_{L_1} dW_I = 2\alpha_1(p)I(p) - \alpha_1(p)2I(p) = 0.$$

Далее, дифференциалы  $d\widetilde{W}_k^0$ ,  $k = 0, 1$ , и  $dW_0$  аналитичны в точках  $\infty$  и  $\infty^-$ , значит, в области их аналитичности кривые  $\widetilde{L}_2^\pm$  гомотопны  $L_1$  с противоположным направлением обхода, т. е.

$$\int_{\widetilde{L}_2^+} dW_0 = \int_{\widetilde{L}_2^-} dW_0 = - \int_{L_1} dW_0; \quad \int_{\widetilde{L}_2^+} dW_k^0 = \int_{\widetilde{L}_2^-} dW_k^0 = - \int_{L_1} dW_k^0, \quad k = 0, 1,$$

откуда с учетом (9) и (10)

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{L}_2^\pm} d\widetilde{W}_1 &= \int_{\widetilde{L}_2^\pm} dW_1^0 - \alpha_1(p) \int_{\widetilde{L}_2^\pm} dW_0 - \gamma_1(p) \int_{\widetilde{L}_2^\pm} dW_I = \\ &= - \int_{L_1} dW_1^0 + \alpha_1(p) \int_{L_1} dW_0 - \gamma_1(p) \int_{L_2} dW_I = 0. \end{aligned}$$

Наконец, с помощью формулы (8) получим

$$\int_{L_0} dW_1^0 = 2i \int_1^{p_0} \frac{dt}{-2(t-p_1)\sqrt{|P(t)|}} = -2i \frac{\partial J(p)}{\partial p_1} = -2i(\gamma_1(p)J_0(p) + J(p)\alpha_1(p)),$$

что с учетом формул (13), (9) и (11) дает

$$\begin{aligned} \int_{L_0} d\widetilde{W}_1 &= \int_{L_0} dW_1^0 - \alpha_1(p) \int_{L_0} dW_0 - \gamma_1(p) \int_{L_0} dW_I = \\ &= -2i(\gamma_1(p)J_0(p) + J(p)\alpha_1(p)) - \alpha_1(p)(-2iJ(p)) - \gamma_1(p)(-2iJ_0(p)) = 0. \end{aligned}$$

Итак, утверждение леммы для дифференциала  $d\widetilde{W}_1$  доказано.

Для дифференциала  $d\widetilde{W}_0$  областью аналитичности является  $D \setminus \{\infty, \infty^-, p_0\}$  и контур  $L_0$  уже не подойдет, поскольку он проходит через  $p_0$ . Пусть  $\widetilde{L}_0$  — слегка деформированный контур  $L_0$ , не проходящий через  $p_0$ . Гомотопический базис области аналитичности  $d\widetilde{W}_0$  составят  $L_1$ ,  $\widetilde{L}_2^\pm$  и  $\widetilde{L}_0$ . Совершенно аналогично предыдущему получим

$$\int_{L_1} d\widetilde{W}_0 = \int_{\widetilde{L}_2^\pm} d\widetilde{W}_0 = 0.$$

Далее, так как дифференциалы  $dW_0$ ,  $dW_I$  аналитичны в точке  $p_0$ , то

$$\int_{\widetilde{L}_0} dW_0 = \int_{L_0} dW_0 = -2iJ(p), \quad \int_{\widetilde{L}_0} dW_I = \int_{L_0} dW_I = -2iJ_0(p).$$

В свою очередь дифференциал  $dW_0^0$  аналитичен в точках  $\infty$  и  $\infty^-$ , откуда с учетом формулы (8)

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{L}_0} dW_0^0 &= \int_{L_0^0} dW_0^0 = -2i \left[ \int_{-\infty}^0 + \int_{p_1}^{+\infty} \right] \frac{dt}{2(t-p_0)\sqrt{|P(t)|}} = \\ &= -2i \frac{\partial}{\partial p_0} \left[ \int_{-\infty}^0 + \int_{p_1}^{+\infty} \right] \frac{dt}{\sqrt{|P(t)|}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial p_0} \int_{L_0^0} dW_0 = \frac{\partial}{\partial p_0} \int_{L_0} dW_0 = -2i \frac{\partial J(p)}{\partial p_0} = -2i(\gamma_0(p)J_0(p) + J(p)\alpha_0(p)) \end{aligned}$$

и дальнейшее доказательство полностью аналогично случаю  $d\widetilde{W}_1$ .

Все оставшиеся утверждения леммы (о свойствах функций  $\widetilde{W}_k$ ,  $k = 0, 1$ ) следуют из уже доказанных.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , — четыре различных корня функции  $f_0(z)$  на  $D$  и  $d\widetilde{W} = C_R dW_R + C_0\psi(p_0) d\widetilde{W}_0 + C_1\psi(p_1) d\widetilde{W}_1$ ,  $C_R, C_0, C_1 = \text{const}$ . Тогда если

$$\int_{z_1}^{z_j} d\widetilde{W} = 0, \quad j = 2, 3, 4,$$

то  $C_R = C_0 = C_1 = 0$ .

*Доказательство.* Из формулы (12) с учетом  $P(p_k) = 0$  следует  $\psi(p_k) = f_0(p_k)$ ,  $k = 0, 1$ .

Сначала пусть корни комплексной скорости не совпадают с точками  $p_{0,1}$ :  $z_j \neq p_k$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $k = 0, 1$ . Тогда  $\psi(p_k) \neq 0$ . Введем абелев интеграл

$$\widetilde{W}(z) = \int_{z_1}^z d\widetilde{W}.$$

Из свойств дифференциала  $dW_R$  и леммы 2 следует, что  $\widetilde{W}(z)$  — мероморфная в  $D$  функция, кратная дивизору  $z_1(\infty)^{-1}(\infty^-)^{-1}(p_0)^{-1}(p_1)^{-1}$ . Из условия теоремы следует  $\widetilde{W}(z_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Если  $\widetilde{W} \not\equiv 0$ , то ее четыре нуля  $z_j$  и четыре полюса  $\infty, \infty^-, p_0, p_1$  образуют полный дивизор  $(\widetilde{W})$ . Однако мероморфная на  $D$  функция  $f_0(z)$  имеет те же нули  $z_j$  и два двукратных полюса  $\infty$  и  $\infty^-$ . Тогда отношение  $f_0(z)/\widetilde{W}(z)$  будет мероморфной на  $D$  функцией с дивизором  $p_0 p_1 (\infty)^{-1} (\infty^-)^{-1}$ . Но для дивизора мероморфной функции выполнена теорема Абеля ([13], с. 164), т. е. в данном случае

$$\left[ \int_{\infty}^{p_0} + \int_{\infty^-}^{p_1} \right] dW_0 \equiv 0 \pmod{\text{периодов}}.$$

Соединим  $\infty \in D^+$  и точку  $p_0$  кривой  $(-\infty, 0) \cup L_1^- \cup (1, p_0) \subset D^+$ , а точку  $\infty^-$  с  $p_1$  кривой  $(+\infty, p_1) \subset D^-$ . Тогда в силу симметричности дифференциала  $dW_0$

$$\int_{\infty^-}^{p_1} dW_0 = \int_{+\infty}^{p_1} \frac{i dz}{\sqrt{P(z)}} = i \int_{p_1}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{|P(t)|}},$$

откуда

$$H = \left[ \int_{\infty}^{p_0} + \int_{\infty^-}^{p_1} \right] dW_0 = \int_{-\infty}^0 \frac{i dt}{\sqrt{|P(t)|}} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{|P(t)|}} + \int_1^{p_0} \frac{i dt}{-\sqrt{|P(t)|}} + i \int_{p_1}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{|P(t)|}}.$$

Но в силу (8), (9)

$$i \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\sqrt{|P(t)|}} + i \int_{p_1}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{|P(t)|}} = -\frac{1}{2} \int_{L_0^0} dW_0, \quad -i \int_1^{p_0} \frac{dt}{\sqrt{|P(t)|}} = \frac{1}{2} \int_{L_0} dW_0,$$

откуда

$$H = -\frac{1}{2} \int_{L_0^0} dW_0 + I(p) + \frac{1}{2} \int_{L_0} dW_0 = I(p).$$

Однако периоды дифференциала  $dW_0$  (формула (9)) — это  $2I(p)$  и  $-2iJ(p)$ , т. е. заведомо  $H \not\equiv 0 \pmod{\text{периодов}}$ . Значит,  $\widetilde{W} = C_R W_R + C_0 \psi(p_0) \widetilde{W}_0 + C_1 \psi(p_1) \widetilde{W}_1 \equiv 0$ . Но из трех слагаемых только  $\widetilde{W}_0$  имеет полюс в точке  $p_0$  и только  $\widetilde{W}_1$  — в точке  $p_1$ , значит,  $C_0 \psi(p_0) = C_1 \psi(p_1) = 0$ , а тогда и  $C_R = 0$ , что в силу  $\psi(p_{0,1}) \neq 0$  влечет утверждение теоремы.

Пусть один из корней комплексной скорости совпадает с  $p_0$ :  $z_1 = p_0$ . В таком случае

$$\int_{z_1}^z d\widetilde{W}_0 = \int_{p_0}^z d\widetilde{W}_0 = \infty,$$

однако множитель  $\psi(p_0) = f_0(p_0) = f_0(z_1) = 0$ . Так как дифференциал  $d\widetilde{W}_0$  имеет в точке  $p_0$  полюс второго порядка, то легко видеть, что при  $f_0(z_1) = 0$  и  $z_1 \rightarrow p_0$  имеем

$$\psi(p_0) \int_{z_1}^z d\widetilde{W}_0 = (f_0(p_0) - f_0(z_1)) \int_{z_1}^z d\widetilde{W}_0 \rightarrow H_0 = \text{const} \neq 0,$$

т. е. при  $z_1 = p_0$  функция  $\widetilde{W}(z)$  уже не имеет полюса в точке  $p_0$ , однако при этом  $f_0(z)$  имеет нуль в точке  $p_0$ , т. е. по-прежнему дивизор функции  $f_0/\widetilde{W}$  равен  $p_0 p_1(\infty)^{-1}(\infty^-)^{-1}$ . Отсюда  $\widetilde{W} = C_R W_R + C_0 H_0 + C_1 \psi(p_1) \widetilde{W}_1 \equiv 0$  и, значит, с учетом разных полюсов  $C_R = C_1 = 0$ , а тогда и  $C_0 = 0$ .

Совершенно аналогично доказательство, если  $z_2 = p_1$  или даже одновременно  $z_1 = p_0$ ,  $z_2 = p_1$ .  $\square$

Доказанная теорема имеет ключевое значение. Она означает, что если при заданных параметрах  $V_R, p$  все четыре точки останова  $z_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , различны, то отображение

$$g : (V_R, p) \rightarrow \left( \int_{z_j}^{z_{j+1}} f(z | V_R, p) dz, \quad j = \overline{1, 3} \right)$$

имеет ненулевой якобиан. Это в свою очередь означает, что если исходные данные задачи однозначно определяют разность комплексных потенциалов между точками останова, то задача о параметрах разрешима и для ее решения можно использовать метод Ньютона.

Итак, корректная постановка обратной задачи гидродинамики для двусвязной области предполагает задание разности комплексных потенциалов между всеми четырьмя точками останова. Очевидно, такая постановка зависит от схемы течения, поскольку для некоторых схем упомянутая разность потенциалов вычисляется непосредственно в терминах граничных скоростей  $v_j(s)$ ,  $j = 1, 2$ , а для других требуется дополнительное задание некоторых числовых величин. Остается только перебрать все схемы течения [8], [9] и для каждой из них указать, какие дополнительные величины следует задавать для корректной постановки.

## 6. КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМ ТЕЧЕНИЯ

При описании схем течения будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в статье [8], и так же, как в [8], будем направлением обхода линий тока считать направление возрастания потенциала и на рисунках обозначать его стрелками. Схемы течения будем для наглядности изображать не для конкретных контуров  $L_{1,2}$  — отрезков оси, а в общем виде для произвольных  $L_{1,2}$ . Чтобы не загромождать рисунки, будем на них схематически изображать только обтекаемые контуры  $L_{1,2}$ , точки останова и линии тока, проходящие через точки останова.

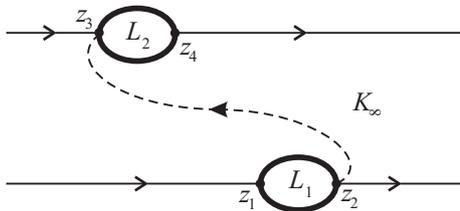


Рис. 1

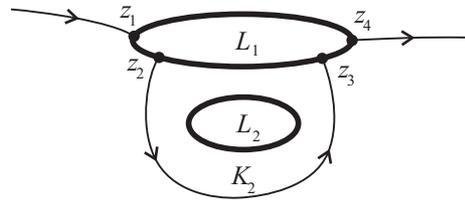


Рис. 2

1. Пусть на обоих обтекаемых контурах  $L_{1,2}$  имеются по две точки останова потока (рис. 1), т. е. граничные скорости  $v_{1,2}(s)$  имеют по два нуля. Именно этот (и только этот) случай рассматривался ранее. Будем считать, что  $z_1, z_2 \in L_1$ ,  $z_3, z_4 \in L_2$ , причем  $z_1, z_3$  —

точки разветвления,  $z_2, z_4$  — точки схода (рис. 1), и пусть  $s_j, j = \overline{1,4}$ , — соответствующие дуговые абсциссы ( $v_1(s_1) = v_1(s_2) = v_2(s_3) = v_2(s_4) = 0$ , в  $s_1, s_3$  скорость  $v(s)$  меняет знак с минуса на плюс, в  $s_2, s_4$  — с плюса на минус). Тогда (формула (4)) заданы

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \int_{s_1}^{s_2} v_1(s) ds, \quad \int_{z_3}^{z_4} f(z) dz = \int_{s_3}^{s_4} v_2(s) ds$$

и для корректной постановки достаточно дополнительно задать расход между обтекаемыми контурами и разность потенциалов между точками останова:

$$\Gamma_3 = \text{Im} \int_{z_2}^{z_3} f(z) dz, \quad y_3 = \text{Re} \int_{z_2}^{z_3} f(z) dz.$$

Отметим, что значение  $\Gamma_3$  определяется однозначно, а  $y_3$  — по модулю циркуляций  $\Gamma_{1,2}$ , т. е. для корректной постановки следует зафиксировать кривую, соединяющую  $z_2$  и  $z_3$ . Так, при  $\Gamma_3 \neq 0$  имеется заполненная линиями тока полоса  $K_\infty$ , разделяющая контуры  $L_1$  и  $L_2$  [8], [9] (рис. 1), в этом случае соединяющую  $z_2$  и  $z_3$  кривую проведем в этой полосе (на рис. 1 кривая изображена пунктиром); при  $\Gamma_3 = 0$  линия тока соединяет  $L_1$  и  $L_2$ , тогда кривую проведем по этой линии тока. Отметим неточность в статье [2], где не зафиксирована кривая для задания  $y_3$ , что приводит к очень большой неоднозначности решения, поскольку если изменить  $y_3$  на величину, кратную периодам, то это дает, вообще говоря, другие значения параметров  $(V_R, p)$ .

2. Следующий возможный случай: на одном контуре имеется четыре точки останова. Значит, больше точек останова нет (рис. 2). Данная схема течения интересна тем, что с ее помощью можно моделировать каверну, примыкающую к обтекаемому контуру (на рис. 2 это область  $K_2$ ). Будем считать, что все точки останова расположены на  $L_1$ , т. е.  $v_2(s) \neq 0$ , а  $v_1(s)$  имеет четыре нуля  $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_1 + l_1$ , причем  $s_{1,3}$  — абсциссы точек разветвления, а  $s_{2,4}$  — схода (рис. 2). Здесь (формула (5)) имеем

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} f(z) dz = \int_{s_j}^{s_{j+1}} v_1(s) ds, \quad j = \overline{1,3},$$

т. е. никаких дополнительных параметров задавать не требуется.

3. Пусть на одном контуре имеется две точки останова, а на другом контуре их нет. Это означает [8], что имеется еще одна внутренняя точка останова в  $D^+$ . Зафиксируем нумерацию контуров и точек останова условием:  $v_2(s) \neq 0$ , а  $v_1(s)$  имеет два нуля  $s_1 < s_2 < s_1 + l_1$ , причем  $s_1$  — абсцисса точки разветвления, а  $s_2$  — схода. Соответственно будем обозначать точки останова  $z_{1,2} \in L_1$ , причем  $z_1$  — точка разветвления, а  $z_2$  — точка схода и, наконец, внутренняя точка останова  $z_3 \in D^+$ .

По граничной скорости  $v_1$  находим (формула (4))

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \int_{s_1}^{s_2} v_1(s) ds.$$

Дополнительно зададим расход  $y_2$  между внутренней точкой останова  $z_3$  и контуром  $L_1$  и разность потенциалов  $y_3$  между точкой схода  $z_2$  и внутренней точкой останова  $z_3$ :

$$y_2 = \text{Im} \int_{z_2}^{z_3} f(z) dz, \quad y_3 = \text{Re} \int_{z_2}^{z_3} f(z) dz.$$

Кривую интегрирования для определения  $y_3$  зададим в зависимости от схемы течения (см. ниже). Отметим, что четвертой точкой остановки будет точка на втором листе, симметричная  $z_3$ :  $z_4 = z_3^-$ . При этом (см. раздел 5)

$$\int_{z_2}^{z_4} f(z) dz = \overline{\int_{z_2}^{z_3} f(z) dz},$$

т. е. задача с дополнительными условиями поставлена корректно.

Осталось уточнить вид кривой интегрирования для вычисления  $y_3$ . На рис. 3 изображены все возможные варианты схем течения и пунктиром обозначены соответствующие кривые.

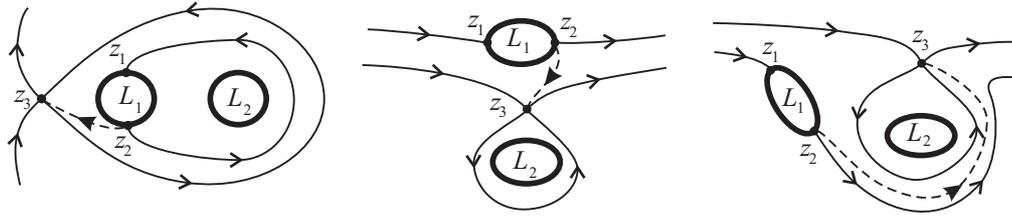


Рис. 3.

4. Последний возможный случай: на обоих контурах нет точек остановки,  $v_j(s) \neq 0$ ,  $j = 1, 2$ . Здесь имеем две внутренние точки остановки  $z_{1,2} \in D^+$  [8]. В данном случае дополнительно зададим расходы между  $L_1$  и точками остановки

$$y_1 = \Delta\Psi(L_1, z_1), \quad y_2 = \Delta\Psi(L_1, z_2)$$

и разность комплексных потенциалов между точками остановки

$$y_3 = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz.$$

Вид кривой интегрирования для вычисления  $y_3$  определим в зависимости от схемы течения. Две остальные точки остановки расположены на втором листе:  $z_3 = z_1^-$ ,  $z_4 = z_2^-$ , при этом (формула (7))

$$\int_{z_1}^{z_3} f(z) dz = -2iy_1, \quad \int_{z_2}^{z_4} f(z) dz = -2iy_2,$$

т. е. задача поставлена корректно.

Все возможные схемы течения с соответствующим выбором кривой (показана пунктиром) изображены на рис. 4.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подытожим общий метод решения обратной задачи для двусвязной области течения. Итак, даны граничные скорости  $v_j(s)$ ,  $s \in [0, l_j]$ ,  $j = 1, 2$ , причем  $v_j(0) = v_j(l_j)$ , т. е.  $v_j(s)$  заданы на всей прямой и периодичны, и дан расход  $\Gamma_3 = \Delta\Psi(L_1, L_2)$ . Непосредственно находим циркуляции  $\Gamma_{1,2}$ . Решение состоит из следующих этапов.

1. Определение схемы течения и задание дополнительных параметров. В зависимости от количества нулей у граничных скоростей определяем схему течения: случай 1, если обе граничные скорости имеют по два нуля; случай 2, когда одна скорость имеет четыре нуля, а вторая их не имеет; случай 3, когда одна граничная скорость имеет два нуля, а вторая не имеет нулей; и, наконец, случай 4, если обе граничные скорости не обращаются в нуль. Задаем дополнительные параметры, свои для каждого из четырех случаев.

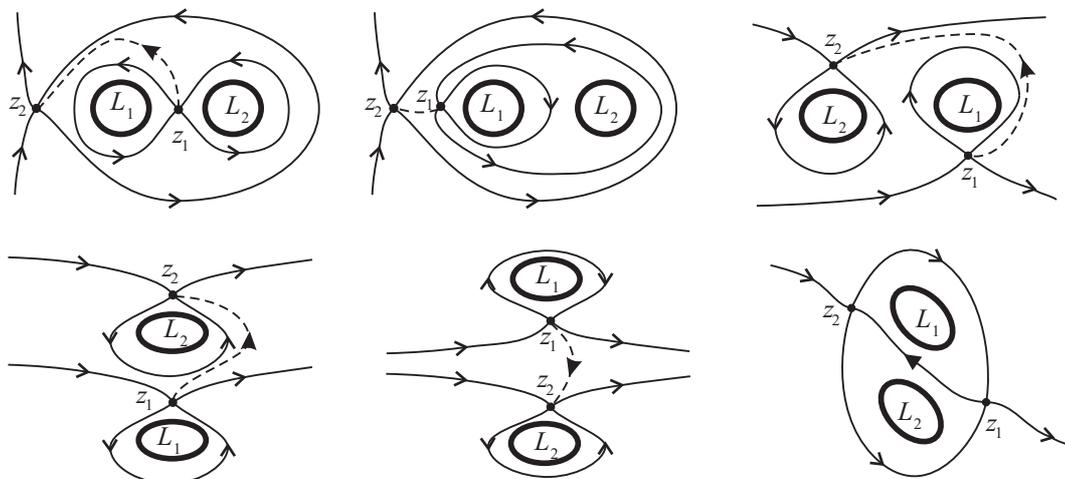


Рис. 4.

2. Решение задачи о параметрах методом Ньютона. Определяем параметры  $V_R, p$  и, следовательно, каноническую область  $D^+$  комплексную скорость  $f(z)$ .
3. С помощью граничных скоростей  $v_{1,2}$  и комплексной скорости  $f(z)$  устанавливаем соответствие между точками контура  $L = L_1 \cup L_2$  и дуговыми абсциссами, т.е. находим функции  $t_j(s) : \mathbb{R} \rightarrow L_j, j = 1, 2$ , раздел 3.
4. Пользуясь теоремой 1, находим конформное отображение  $\xi(z)$  и, соответственно, решение обратной задачи  $L_j^0 = \xi(L_j), j = 1, 2; D_0^+ = \xi(D^+)$ .

Отметим несколько важных вопросов, не нашедших отражение в данной статье. Во-первых, для подкрепления и иллюстрации предложенного метода решения обратной задачи необходимы численные расчеты для разных, особенно не рассматривавшихся ранее, схем течения. Автор предполагает полностью посвятить подобным расчетам следующую статью. Далее, остались теоретически не разобранными случаи течений, когда сливаются граничные или внутренние нули (в этих случаях якобиан  $Dg/Dx = 0$ ). Не исследована непрерывность решения при переходе от одной схемы течения к другой, в частности, при переходе между случаями 1, 2, 3 и 4, которые происходят как раз при слиянии граничных нулей. Далее, не исследован интересный вопрос: нельзя ли за счет определенного подбора дополнительных параметров обеспечить выполнение условий разрешимости обратной задачи в теореме 1. Всем этим вопросам автор предполагает посвятить последующие работы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэродинамики* (Наука, М., 1994).
- [2] Абзалилов Д.Ф. Волков П.А., Ильинский Н.Б. *Решение обратной краевой задачи аэродинамики для двухэлементного крылового профиля*, Изв. РАН. Механика жидкости и газа, № 3, 16–24 (2004).
- [3] Марданов Р.Ф. *Об одном подходе к проектированию многоэлементного крылового профиля*, Аэромеханика и газовая динамика, № 2, 31–36 (2003).
- [4] Марданов Р.Ф. *Приближенный метод проектирования трехэлементного крылового профиля*, Механика жидкости и газа, Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н.И. Лобачевского, № 4(3), 969–970 (2011).
- [5] James R.M. *The theory and design of two-aerofoil lifting systems*, Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. **10** (1), 13–42 (1977).
- [6] Gopalathnam A. and Selig M. *Multipoint inverse method for multielement airfoil design*, J. Aircraft **35** (3), 398–404 (1998).

- [7] Е.В.Семенко. *Эквивалентность граничных скоростей и различные схемы течения в обратной краевой задаче аэрогидродинамики*, Сиб. журн. индустриальной матем. **XIV** (4) (48), 98–110 (2011).
- [8] Semenکو E.V. *Flows in torus classification: schemes of two-dimensional flows past a pair of aerofoils*, IMA J. Appl. Math. DOI: 10.1093/imamat/hxq029, 1–22 (2010).
- [9] Семенко Е.В. *Течения на римановой поверхности: классификация течений на торе*, Сиб. журн. индустриальной матем. **XII** (1) (37), 136–150 (2009).
- [10] Семенко Е.В. *Общий вид решения задачи обтекания на торе*. Сиб. журн. индустриальной матем. **XIII** (2) (42), 124–134 (2010).
- [11] Голубев В.В. *К теории предкрылка и закрылка*. Тр. по аэродинамике (Гостехиздат, М., 1957).
- [12] Голубев В.В. *К теории течений на двулистной римановой поверхности*. Тр. по аэродинамике (Гостехиздат, М., 1957).
- [13] Форстер О. *Римановы поверхности* (Мир, М., 1980).

*Е.В. Семенко*

*Новосибирский государственный педагогический университет,  
ул. Виллюйская, д. 28, г. Новосибирск, 630126, Россия,*

*e-mail: semenko54@gmail.com*

*E. V. Semenko*

#### **Inverse problem of hydrodynamics for doubly connected domain**

*Abstract.* We consider an inverse problem of hydrodynamics for flow past pair of aerofoils. We find a general form of its solution. The key part of problem's solving is to determine numerical parameters defining flow domain and complex velocity in it up to conformal mapping (the parameters problem). The solvability of parameters problem is proved for various flow schemes. For that we essentially use the interpretation of the problem in terms of Riemann surface and the Riemann surfaces theory.

*Keywords:* inverse problem of hydrodynamics, streamline, flow scheme, Riemann surface, torus.

*E. V. Semenko*

*Novosibirsk State Pedagogical University,  
28 Vilyuiskaya str., Novosibirsk, 630126 Russia,*

*e-mail: semenko54@gmail.com*