

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по образовательной деятельности
Таюрский Д.А.
« 16 » сентября 20 15 г.



Программа дисциплины

Б1.В.ОД.10 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Направление подготовки: 12.03.04 Биотехнические системы и технологии

Профиль подготовки: —

Квалификация выпускника: бакалавр

1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целями освоения дисциплины (модуля) "Интегральные уравнения и вариационное исчисление" является знание основных положений теории интегральных уравнений и овладение методами решения соответствующих задач и упражнений; знание основных положений вариационного исчисления и уметь использовать понятия и методы этой теории при решении задач, возникающих в теоретической и математической физике.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.В.ОД.10 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 12.03.04 Биотехнические системы и технологии и относится к обязательным дисциплинам вариативной части. Осваивается на 2 курсе, 3 семестр. Для освоения дисциплины обучающийся должен уверенно владеть основами следующих дисциплин: Б1.Б.8 «Математический анализ», Б1.Б.9 «Аналитическая геометрия», Б1.Б.10 «Линейная алгебра», Б1.В.ОД.10 «Дифференциальные уравнения». Знание теории интегральных уравнений и умение решать соответствующие задачи необходимо при изучении многих разделов теоретической физики, таких, например, как Б1.Б.18 «Термодинамика». Знание основ вариационного исчисления необходимо для изучения таких курсов как Б1.Б.16 «Теоретическая механика», Б1.В.ОД.7 «Квантовая теория» и т.д.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Обучающийся, завершивший изучение дисциплины, должен знать:

- основные положения теории интегральных уравнений и вариационного исчисления;

уметь:

- уметь использовать полученные понятия и методы при решении задач, возникающих в теоретической и математической физике.

владеть:

- методами решения соответствующих задач и упражнений

демонстрировать способность и готовность:

- применять основные положения теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления при решении задач, возникающих в теоретической и математической физике.

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-2	- способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы 72 часа.

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет в 3 семестре.

	Раздел дисциплины	Семестр	Лекции	Практи	Лаборат	Самосто
--	-------------------	---------	--------	--------	---------	---------

				ческие занятия	орные работы	ательная работа
1.	Тема 1. Сведения об интегральных уравнениях	3	6	6	0	12
2.	Тема 2. Элементы вариационного исчисления.	3	12	12	0	24
	Итого		18	18	0	36

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Сведения об интегральных уравнениях

Лекция 1. Уравнения Фредгольма и Вольтерра I и II родов. Собственные значения и собственные функции интегрального однородного уравнения.

Лекция 2. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.

Лекция 3. Существование и единственность решения уравнения Фредгольма. Сведения о приближенных методах решения интегральных уравнений.

Тема 2. Элементы вариационного исчисления.

Лекция 4. Линейное нормированное пространство. Пространство непрерывных функций. Эпсилон-окрестность и расстояние между точками. Определение функционала. Непрерывность, линейность функционала.

Лекция 5. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Лекция 6. Экстремали уравнения Эйлера-Пуассона. Уравнение Эйлера-Остроградского.

Лекция 7. Вариационная задача с подвижными границами для простейшего функционала. Условия трансверсальности. Задача с подвижными границами для функционала, зависящего от двух функций одного независимого аргумента.

Лекция 8. Поле экстремалей. Условие Якоби. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия экстремума функционала.

Лекция 9. Вариационные задачи на условный экстремум. Приложения вариационного исчисления к задачам механики и физики.

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Курс лекций и практических занятий, организованных по стандартной технологии в интерактивной форме с живым диалогом между преподавателем и обучающимся.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Домашнее задание: решение задач по теме раздела (примеры задач приведены в приложение 1).

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

7.1. Регламент дисциплины

Суммарно по дисциплине можно получить максимум 100 баллов, из них текущий контроль в течение семестра оценивается в 50 баллов, зачёт - в 50 баллов.

10 баллов – самостоятельная работа

20 баллов – контрольная работа

20 баллов – устные опросы на практических занятиях, проверка домашнего задания.

Итого: 10+20+20=50 баллов

7.2. Оценочные средства текущего контроля

Примерные задачи самостоятельной и контрольной работ приведены в приложении 1.

Самостоятельная работа.

Тематика заданий:

1. Интегральные уравнения Фредгольма. Задачи № 1 – 15 (пособие 1 списка литературы)
2. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром 15 - 26
3. Собственные значения и собственные функции 27 -40
4. Интегральные уравнения Вольтерра 41 - 81

Контрольная работа.

Спецификация контрольной работы (примерные задачи приведены в приложении 1):

1. Уравнения Фредгольма и Вольтерра I и II родов
2. Исследование функционала на экстремум.
3. Вариационная задача с подвижными границами для простейшего функционала.
4. Задача с подвижными границами для функционала, зависящего от двух функций одного независимого аргумента.

Выполнение расчетных заданий:

Расчетные задания по математике. Вариационное исчисление и интегральные уравнения (3 семестр). Составители: А.И.Егоров, Р.К.Мухарлямов. - Казань, 2004.

7.3. Вопросы к зачету

1. Линейное нормированное пространство.
2. Определение функционала. Непрерывность, линейность функционала. Экстремум функционала.
3. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала.
4. Пространство непрерывных функций. Эпсилон - окрестность и расстояние между точками.
5. Уравнение Эйлера. Экстремали.
6. Основная лемма вариационного исчисления.
7. Уравнение Эйлера-Пуассона.
8. Уравнение Эйлера-Остроградского.
9. Вариационная задача с подвижными границами для простейшего функционала. Условия трансверсальности.
10. Задача с подвижными границами для функционала, зависящего от двух функций одного независимого аргумента. Поле экстремалей.
11. Условие Якоби. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия экстремума функционала.
12. Вариационные задачи на условный экстремум.
13. Приложения вариационного исчисления к задачам механики и физики.
14. Уравнения Фредгольма и Вольтерра I и II рода. Собственные значения и собственные функции ядра интегрального однородного уравнения.
15. Решение уравнения Фредгольма II рода с вырожденным ядром.
16. Альтернатива Фредгольма (доказательство этой теоремы для уравнения с вырожденным ядром).
17. Вторая и третья теоремы Фредгольма и доказательство этих теорем для уравнений с вырожденным ядром.
18. Теорема о существовании и единственности решения уравнения Фредгольма II рода с малым параметром.

19. Сведения о приближенных методах решения интегрального уравнения.

7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство
ОПК-2	способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат	Знание основных терминов дисциплины. Умение решать основные задачи.	Контрольная работа, самостоятельная работа, домашнее задание, вопросы к зачету 1 – 19.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Работа на практических занятиях предполагает решение задач, подготовку домашнего задания.

При подготовке к зачету необходимо опираться, прежде всего, на лекции, а также на источники, которые указывались на занятиях в течение семестра.

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

9.1. Основная литература

Попов В. А. Сборник задач по интегральным уравнениям / В.А. Попов; Казан. гос. ун-т, Физ. фак.—Казань: [Казан. гос. ун-т], 2006.—29 с. 197 экз

Пантелеев, А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс [Электронный ресурс] : учеб.пособие с мультимедиа сопровождением / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, К. А. Рыбаков. - М.: Логос, 2010. - 384 с.
<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469288>

Дифференциальные уравнения: конспект лекций: учебно-методическое пособие / Р. А. Даишев, А. Ю. Даньшин ; Казан.гос. ун-т, Физ. фак. ? Казань : Казанский государственный университет, 2009 .? 150 с. : ил. ; 21 .? Библиогр.: с. 146 (4 назв.). 174 экз

9.2. Дополнительная литература

Петровский, Иван Георгиевич. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский.—Москва: Физматлит, 2009.—400 с. 1 экз

Петровский, Иван Георгиевич. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский.—Москва: Физматлит, 2009.—400 с.//http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=59551

Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина .- Издание 2-е, исправленное .- Москва : Физматлит, 2005 .- 432 с. : ил. ; 22 см. - (Курс высшей математики и математической физики ; Вып. 10) .- Библиогр.: с. 428-429 (28 назв.) .? ISBN 5-9221-0628-7. 8 экз

Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина .- Издание 2-е, исправленное .- Москва : Физматлит, 2005 .- 432 с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59405

9.3. Интернет-ресурсы:

Захаров А. В., Вариационное исчисление (djvu, 627 Кб, скачать). - <http://toig-kazan.narod.ru/education/III/VarIsch.djvu>

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА - <http://webmath.exponenta.ru/ax/aj/ta/index.html>

Ресурсы физико-математической библиотеки сайта EqWorld Мир математических уравнений - <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics.htm>

Сайт кафедры теории относительности и гравитации КФУ - <http://old.kpfu.ru/f6/k6/index.php?id=1>

Сайт кафедры теории относительности и гравитации КФУ - <http://toig-kazan.narod.ru/education.htm>

Электронная Библиотека - <http://www.plib.ru/library/subcategory/32.html>

Электронная библиотека механико-математического факультета Московского государственного университета - <http://lib.mexmat.ru/>

Электронно-библиотечная система Издательства Лань - <http://e.lanbook.com/>

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Освоение дисциплины "Интегральные уравнения и вариационное исчисление" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВО) нового поколения.

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав.

Учебные аудитории для проведения лекционных и практических занятий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 12.03.04 "Биотехнические системы и технологии".

Автор(ы): Даишев Р.А.

Рецензент(ы): Попов А.А.

Программа одобрена на заседании учебно-методической комиссии Института физики
« 16 » _____ сентября _____ 20 15 г.

Приложение 1

к программе дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»

I. Банк типовых задач для самостоятельного решения

1. $y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-t} y(t) dt + e^x.$
2. $y(x) = \int_0^1 x e^{x-t} y(t) dt + e^x.$
3. $y(x) = \int_0^1 xt y(t) dt + \sqrt{1-x^2}.$
4. $y(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin t y(t) dt + \sin x.$
5. $y(x) = \int_1^e \frac{\ln t}{x} y(t) dt + \ln x.$
6. $y(x) = \int_0^1 \sqrt{xt} y(t) dt + x.$
7. $y(x) = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{t^3}} y(t) dt + x^{3/2}.$
8. $y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t \sin x y(t) dt + \cos x.$
9. $y(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-t} y(t) dt + e^x, \quad \lambda = 2.$
10. $y(x) = \lambda \int_0^1 x e^{x-t} y(t) dt + e^x, \quad \lambda = -2.$
11. $y(x) = \lambda \int_0^1 xt y(t) dt + \sqrt{1-x^2}, \quad \lambda = 6.$
12. $y(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} x \sin t y(t) dt + \sin x, \quad \lambda = 4.$
13. $y(x) = \lambda \int_1^e \frac{\ln t}{x} y(t) dt + \ln x, \quad \lambda = e.$
14. $y(x) = \lambda \int_0^1 (xt - t) y(t) dt + \sin \pi x, \quad \lambda = 3.$

$$\begin{aligned}
15. \quad y(x) &= \int_0^{\pi} \operatorname{tg} x \cos t y(t) dt + \cos x. & 16. \quad y(x) &= \int_0^1 e^{xt} y(t) dt + e^{-x}. \\
17. \quad y(x) &= \int_0^1 \sqrt{xt} y(t) dt + 5x. & 18. \quad y(x) &= 2 \int_0^1 \frac{x}{t} y(t) dt + 3 \ln x. \\
19. \quad y(x) &= 2x - 1 - \frac{\pi}{2} \int_0^1 (\cos \pi x - \sin \pi t) y(t) dt. \\
20. \quad y(x) &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x-t) y(t) dt + x. & 21. \quad y(x) &= 2 - 3 \int_0^{\pi/2} \sin(x-2t) y(t) dt. \\
22. \quad y(x) &= \int_0^1 (e^{xt} + xe^t) y(t) dt + e^x. & 23. \quad y(x) &= x^2 - 2 \int_0^1 (3xt - 1) y(t) dt. \\
24. \quad y(x) &= \int_0^1 (3x + 2t) y(t) dt + 8x^2 - 5x \\
25. \quad y(x) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin(3x-t) + \sin x) y(t) dt + 3\pi \cos 2x. \\
26. \quad y(x) &= 2 \int_0^1 (\sin 2\pi(x-t) - 2) y(t) dt + 5x. \\
27. \quad y(x) &= \lambda \int_0^1 (1 + 2x) y(t) dt. & 28. \quad y(x) &= \lambda \int_0^1 (1 - x^2) y(t) dt. \\
29. \quad y(x) &= \lambda \int_0^{\pi} x \sin t y(t) dt. & 30. \quad y(x) &= \lambda \int_0^{\pi} \cos x \cos t y(t) dt. \\
31. \quad y(x) &= \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+t) y(t) dt. & 32. \quad y(x) &= \lambda \int_0^{\pi} \cos(x-t) y(t) dt. \\
33. \quad y(x) &= \lambda \int_0^1 (\cos 2\pi x + 2x \sin 2\pi t + t \sin \pi x) y(t) dt. \\
34. \quad y(x) &= \lambda \int_0^1 [\cos 2\pi(x-t) - 1] y(t) dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
35. y(x) = \lambda \int_0^1 (1 + 2x)y(t) dt + 1 - \frac{3}{2}x. & 36. y(x) = \lambda \int_0^1 x y(t) dt + \sin 2\pi x. \\
37. y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin x \cos t y(t) dt + \cos x. & 38. y(x) = \lambda \int_0^1 x \sin 2\pi t y(t) dt + x. \\
39. y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1 + xt) y(t) dt + \sin \pi x. & 40. y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x + t) y(t) dt + 1. \\
41. y(x) = \int_0^x y(t) dt + x^2. & 42. y(x) = \int_0^x y(t) dt + \frac{x^2}{2}. \\
43. y(x) = \int_0^x (x - t)y(t) dt + x. & 44. y(x) = 1 - \int_0^x \operatorname{tg} t y(t) dt. \\
70. y(x) = \int_1^x \frac{2t}{x^2} y(t) dt + x^2. & 71. y(x) = 2 \int_0^x \frac{y(t)}{2t + 1} dt + 4x. \\
72. y(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{\cos t} y(t) dt + 1. & 73. y(x) = \int_1^x \frac{x \cos x}{t \cos t} y(t) dt + \cos x e^x. \\
74. y(x) = \int_0^x \frac{x^2}{t^3} y(t) dt + x^3 \cos x & 75. y(x) = \int_0^x \frac{2}{t \ln x} y(t) dt + 1. \\
76. y(x) + \int_0^{\frac{\pi}{x}} \cos x e^{x-t} y(t) dt = e^{x-\sin x}. & 77. y(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{\sin x} y(t) dt - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}. \\
78. y(x) = \int_{\pi/4}^x \frac{y(t)}{\cos x \sin t} dt + 1. & 79. y(x) = \int_0^x \frac{1 - t^2}{1 - x^4} y(t) dt + \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 - x^2}. \\
45. y(x) = 1 + \int_0^x \frac{y(t)}{x + t} dt. & 46. y(x) = 2 \int_0^x t y(t) dt + x^2. \\
47. y(x) = 1 + \int_0^x \frac{xy(t)}{x^2 + t^2} dt. & 48. y(x) = 1 + \int_0^x \frac{t y(t)}{x^2 + t^2} dt.
\end{array}$$