ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 1 (512)

УДК 519.63

В.Н. АБРАШИН, Н.Г. ЖАДАЕВА

ОБ ОДНОМ АДДИТИВНОМ МЕТОДЕ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Аддитивные алгоритмы могут быть эффективно использованы при решении дифференциальных уранений и систем, в которых различные операторы несут различную смысловую нагрузку и описывают различные физические процессы. Естественно на основе метода расщепления построить алгоритмы расщепления по физическим процессам. На основе метода расщепления построено много эффективных методов, которые позволили решить ряд сложных прикладных задач математической физики [1]–[3].

В данной работе остановимся на одной из классических проблем решения стационарных и нестационарных задач динамики несжимаемой жидкости. Будем рассматривать краевую задачу для системы уравнений Навье–Стокса в переменных скорость-давление. В работе предлагается аддитивный разностный метод полной аппроксимации для расщепления по физическим процессам и по размерности. Изучены безытерационные методы решения нестационарных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. Предложенный алгоритм дает возможность построить цепочку упрощенных алгоритмов реализации по физическим процессам и по времени. Доказана устойчивость этого алгоритма при естественных требованиях на операторы расщепления. Приведенный в работе результат — это лишь небольшой, но довольно убедительный пример расщепления по физическим процессам.

Рассмотрим нестационарную задачу

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}-\nu\Delta u_k+\sum_{\alpha=1}^{2}u_\alpha\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}=-\frac{\partial P}{\partial x_k}+f_k(x),\quad (x,t)\in\Omega^{(2)}\times(0,T],\quad \nu>0,\quad k=1,2, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}u=0,\quad (x,t)\in\Omega^{(2)}\times(0,T], \tag{2}$$

$$u_k|_{S_T}=0,\quad S_T=\Gamma\times(0,T],\quad u_k(x,0)=\varphi_k(x),\quad x\in\overline{\Omega}^{(2)}. \tag{3}$$

Для решения задач математической физики в областях со сложной геометрией применяются обобщенные криволинейные координаты, позволяющие добиваться совпадения границ физической области с координатными линиями [4]–[7]. Этот подход позволяет также сгущать сетку в физическом пространстве в областях ожидаемых больших градиентов решения [8], [9]. Сформулируем задачу (1)–(3) в обобщенных физических координатах. Пусть G — некоторая открытая ограниченная область с криволинейной границей S, $G\cup S=\overline{G}$. Рассмотрим задачу (1)–(3) в области $\overline{G}$. Относительно области $\overline{G}$ предположим, что существует невырожденное преобразование координат $z_1=z_1(x_1,x_2)$, $z_2=z_2(x_1,x_2)$, взаимно однозначно отображающее область G в открытый прямоугольник $\Omega=\{z=(z_1,z_2),\ 0<z_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$ с границей Γ, $\Omega\cup\Gamma=\overline{\Omega}$, и такое, что определитель матрицы Якоби преобразования $\det\begin{bmatrix}\partial z_1/\partial x_1 & \partial z_1/\partial x_2\\ \partial z_2/\partial x_1 & \partial z_2/\partial x_2\end{bmatrix}=J$ больше нуля. В силу сделанных предположений существует невырожденное обратное преобразование $x_1=x_1(z_1,z_2)$,

$x_2 = x_2(z_1, z_2)$, для которого

$$\det \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial z_1 & \partial x_1/\partial z_2 \\ \partial x_2/\partial z_1 & \partial x_2/\partial z_2 \end{bmatrix} = J^{-1} > 0. \tag{4}$$

Задача (1)–(3) в криволинейной системе координат будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - L\overline{u} + I(\overline{w})\overline{u} + C\overline{\mathrm{grad}}\, p = \overline{f}(z), \quad z \in \Omega, \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \overline{w} = 0, \quad z \in \Omega, \quad \overline{u}(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \tag{6}$$

где $\overline{u} = (u_1, u_2)^\top$ — искомая вектор-функция скорости, p — искомая скалярная функция давления,

$$L\overline{u} = -\nu \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(a_{\alpha\beta}(z), \frac{\partial \overline{u}}{\partial z_\beta} \right),$$

$$I(\overline{w})\overline{u} = \sum_{\alpha=1}^{2} I_\alpha(w_\alpha)\overline{u}, \quad I_\alpha(w_\alpha)\overline{u} = 0{,}5 \left[\frac{\partial (w_\alpha \overline{u})}{\partial z_\alpha} + w_\alpha \frac{\partial \overline{u}}{\partial z_\alpha} \right],$$

$$C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{2}, \quad \overline{w} = (w_1, w_2)^\top = C^\top \overline{u},$$

$$c_{11} = \partial x_2/\partial z_2, \quad c_{12} = -\partial x_2/\partial z_1, \quad c_{21} = -\partial x_1/\partial z_2, \quad c_{22} = \partial x_1/\partial z_1,$$

$$a_{11} = \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial z_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial z_2} \right)^2 \right] \Big/ J^{-1}, \quad a_{22} = \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial z_1} \right)^2 \right] \Big/ J^{-1},$$

$$a_{21} = a_{12} = -\left[\frac{\partial x_1}{\partial z_1} \frac{\partial x_1}{\partial z_2} + \frac{\partial x_2}{\partial z_1} \frac{\partial x_2}{\partial z_2} \right] \Big/ J^{-1}.$$

Условие (4) обеспечивает положительную определенность симметричной матрицы (a_{ij}), а это в свою очередь обеспечивает сильную эллиптичность оператора L. Для элементов матрицы C будут справедливы соотношения $\partial c_{11}/\partial z_1 + \partial c_{12}/\partial z_2 = 0$ и $\partial c_{21}/\partial z_1 + \partial c_{22}/\partial z_2 = 0$. В случае применения ортогонального или конформного преобразования координат система (5), (6) упрощается (отсутствуют смешанные производные).

Отметим некоторые характерные свойства системы (5), (6). Рассмотрим $H^0(\Omega)$ — пространство соленоидальных вектор-функций, т. е. функций $\overline{v} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, продолжимых нулем на Γ и таких, что $\operatorname{div}(C^\top \overline{v}) = 0$. В пространстве $H^0(\Omega)$ задано скалярное произведение $((\overline{u}, \overline{v})) = \sum\limits_{\alpha=1}^{2} (u_\alpha, v_\alpha) = \sum\limits_{\alpha=1}^{2} \int\limits_\Omega u_\alpha v_\alpha \, dz$. Оператор L самосопряжен и положительно определен: $((L\overline{u}, \overline{u})) \geq c_1 \lambda_1 \nu \|\overline{u}\|^2$, где λ_1 — минимальное собственное значение оператора Лапласа Δ, $c_1 = \mathrm{const} > 0$. Нелинейный оператор $I(\overline{w})$ является кососимметричным, т. е. для него выполняются равенства $((I(\overline{w})\overline{u}, \overline{v})) = -((\overline{u}, I^*(\overline{w})\overline{v}))$, $((I_\alpha(w_\alpha)\overline{u}, \overline{u})) = 0$, $\alpha = 1, 2$. Вектор-функция $C\overline{\mathrm{grad}}\, p$ ортогональна любой функции из $H^0(\Omega)$, т. е. $((C\, \overline{\mathrm{grad}}\, p, \overline{u})) = 0$ $\forall \overline{u} \in H^0(\Omega)$. Существование единственного обобщенного решения задачи (5), (6) доказано в [6].

В области $\overline{\Omega}^{(2)}$ введем равномерные по каждому направлению пространственные сетки $\overline{\omega}_h = \{x = (x_{1i_1}, x_{2i_2}),\ x_{\alpha i_\alpha} = h_\alpha i_\alpha,\ i_\alpha = \overline{0, N_\alpha},\ h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$ и $\Omega_h = \{x = (x_{1i_1-0,5}, x_{2i_2-0,5}),$ $x_{\alpha i_\alpha - 0,5} = h_\alpha(i_\alpha - 0{,}5),\ i_\alpha = \overline{1, N_\alpha},\ h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$. Представим сеточную область Ω_h в виде $\Omega_h = S_h \cup T_h$, где $S_h = \{x = (x_{1i_1-0,5}, x_{2i_2-0,5}),\ i_\alpha = \overline{2, N_\alpha - 1},\ \alpha = 1, 2\}$, $T_h = \{x = (x_{1i_1-0,5}, x_{2i_2-0,5}),$ $i_\alpha = 1,\ i_{3-\alpha} = \overline{2, N_{3-\alpha} - 1},\ i_\alpha = N_\alpha,\ i_{3-\alpha} = \overline{2, N_{3-\alpha} - 1},\ \alpha = 1, 2\}$.

Пусть H_h — вещественное пространство сеточных вектор-функций $\overline{y} = (y_1, y_2)^\top$ со скалярным произведением $((\overline{y}, \overline{v})) = \sum\limits_{k=1}^{2} (y_k, v_k)$ и нормой $\|\overline{y}\| = ((\overline{y}, \overline{y}))^{1/2}$, (y, v) — скалярное произведение на сетке ω_h. Аналогично задаются вектор-функции и скалярные произведения на сетке Ω_h.

На сетках ω_h, Ω_h дифференциальную задачу (1)–(3) аппроксимируем следующей разностной схемой (обозначения взяты из [10]–[12]):

$$\frac{\widehat{y}_k - y_k}{\tau} - \nu\Delta_h\widehat{y}_k + K_k(\widehat{y},\widehat{y}_k) = -q_{\tilde{x}_k} + f_k, \quad x\in\omega_h, \quad k=1,2, \tag{7}$$

$$y_{1\tilde{x}_1} + y_{2\tilde{x}_2} = 0, \quad x\in\Omega_h, \quad y_k = 0, \quad x\in\gamma_h, \tag{8}$$

где

$$\Delta_h y_k = y_{k\overline{x}_1 x_1} + y_{k\overline{x}_2 x_2}, \quad q_{\tilde{x}_k} = 0{,}5h_k^{-1}\{q^{(0,5,\,0,5)} + q^{(0,5,\,-0,5)} - q^{(-0,5,\,0,5)} - q^{(-0,5,\,-0,5)}\}, \quad x\in\omega_h$$

(аналогично аппроксимируются в (8) $y_{k\tilde{x}_k}$ на сетке Ω_h),

$$K_k(y,y_k) = K_{1k}(y_1,y_k) + K_{2k}(y_2,y_k),$$
$$K_{1k}(y_1,y_k) = \widetilde{y}_1^{(-0,5),}(0{,}5(y_k + y_k^{(-1),}))_{x_1},$$
$$\widetilde{y}_1^{(-0,5),} = (1/8)(y_1^{,(1)} + y_1^{(-1),(1)} + 2y_1 + y_1^{,(-1)} + 2y_1^{(-1),} + y_1^{(-1),(-1)}),$$
$$K_{2k}(y_2,y_k) = \widetilde{y}_2^{,(0,5)}(0{,}5(y_k + y_k^{,(-1)}))_{x_2},$$
$$\widetilde{y}_2^{,(0,5)} = (1/8)(y_2^{(-1),} + y_2^{(1),(-1)} + 2y_2 + 2y_2^{,(-1)} + y_2^{(-1),} + y_2^{(-1),(1)}),$$
$$y = y^{i_1,i_2}, \quad y^{(-1),(1)} = y^{i_1-1,i_2+1}, \quad y^{,(1)} = y^{i_1,i_2+1}, \quad y^{(1),} = y^{i_1+1,i_2}.$$

Для решения задачи (7), (8) можно использовать неявный итерационный метод

$$(\overset{s+1}{y}_k - \overset{s}{y}_k)/\tau_s - \nu\Delta_h\overset{s+1}{y}_k + K_k(\overset{s}{y},\overset{s+1}{y}_k) + \overset{s+1}{q}_{\tilde{x}_k} = f_k, \quad k=1,2, \quad \overset{s+1}{y}_{\tilde{x}_1} + \overset{s+1}{y}_{\tilde{x}_2} = 0.$$

Аддитивный разностный алгоритм, построенный на основе представления (7), будет иметь вид

$$\frac{\widehat{y}_k^{(i)} - \widetilde{y}_k}{\tau} + \sigma(\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)} - A_{ik}y_k^{(i)}) + \sum_{\alpha=1}^{3} A_{\alpha k}y_k^{(\alpha)} + q_{\tilde{x}_k} = f_k, \tag{9}$$
$$y_{1\tilde{x}_1}^{(3)} + y_{2\tilde{x}_2}^{(3)} = 0, \quad k=1,2, \quad i=1,2,3,$$

где

$$A_{ik}y_k^{(*)} = -\nu y_{k\overline{x}_i x_i}^{(i)} + K_k(y_i^{(3)},y_k) + q_{\tilde{x}_k} - f_k, \quad A_{3k}y_k^{(3)} = q_{\hat{x}_k},$$
$$\widetilde{y}_k = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_k^{(i)}, \quad y_1^* = y_1, \quad y_k^* = 1/2(y_{k-1} + y_k).$$

Уравнение (9) с соответствующими начальными и граничными условиями решается, начиная с $i = 3$, а затем решаются остальные уравнения. Такая процедура делает реализацию линейной. Причем после подстановки выражений для компонент вектора скорости $y_1^{(3)}$, $y_2^{(3)}$ из первого уравнения в уравнение неразрывности после несложных преобразований получаем следующую задачу для определения давления $\widehat{q}$:

$$\widehat{q}_{\hat{x}_1\tilde{x}_1} + \widehat{q}_{\hat{x}_2\tilde{x}_2} = F_1, \quad x\in S_h, \quad \widehat{q}_n = \widehat{f}_2, \quad x\in T_h, \tag{10}$$

где функции F_1, $\widehat{f}_2$ определяются в результате вышеуказанной операции.

Таким образом, на сетке Ω_h имеем значения $\widehat{q}$ (с точностью до произвольного слагаемого), которые, очевидно, определяют единственным образом $\mathrm{grad}_h\,\widehat{q}$ на ω_h.

Изучим вопросы разрешимости задачи для давления. Введем следующие обозначения: U — множество угловых точек Ω_h; U' (U'') — множество узлов из данного множества, для которых $i + j$ четное (нечетное); S_h' (S_h'') — множество четных (нечетных) узлов S_h; T_{1h} — множество узлов левой и правой границ T_h, T_{2h} — множество узлов нижней и верхней границ T_h.

Лемма. *Для задачи* (10) *имеют место равенства*

$$\begin{gathered}\sum_{S_h} h_1h_2F + \sum_{T_{1h}\setminus U} h_2 f + \sum_{T_{2h}\setminus U} h_1 f + \sum_{U} 0{,}5(h_1+h_2)f = 0,\\ \sum_{S'_h} h_1h_2F + \sum_{T'_{1h}\setminus U'} h_2 f + \sum_{T'_{2h}\setminus U'} h_1 f + \sum_{U'} 0{,}5(h_1+h_2)f = 0,\\ \sum_{S''_h} h_1h_2F + \sum_{T''_{1h}\setminus U''} h_2 f + \sum_{T''_{2h}\setminus U''} h_1 f + \sum_{U''} 0{,}5(h_1+h_2)f = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Утверждение леммы проверяется непосредственной подстановкой в (11) выражений F_1, $\widehat{f}_2$ из (10) вместо F, f и является прямым следствием соотношений

$$\sum_{\Omega_h}(u_{\tilde{x}_1}+v_{\tilde{x}_2})=0,\quad \sum_{\Omega'_h}(u_{\tilde{x}_1}+v_{\tilde{x}_2})=0,\quad \sum_{\Omega''_h}(u_{\tilde{x}_1}+v_{\tilde{x}_2})=0,\quad u,v\in H_h,$$

$u=y_1$, $v=y_2$.

Далее, запишем задачу (10) в операторном виде

$$Ag=\widehat{f}, \tag{12}$$

где A — линейный ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом конечномерном пространстве H_2 (см. [3]). Обратимся к теории операторных уравнений. Пусть $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A, $\operatorname{Im} A$ — его образ. Тогда пространство H_2 есть прямая сумма ортогональных подпространств: $H_2=\operatorname{Ker} A+\operatorname{Im} A^*$, $H_2=\operatorname{Ker} A^*+\operatorname{Im} A$. Известно, что уравнение (12) однозначно разрешимо при любой правой части $\widehat{f}\in H_2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A=0$. Если $\operatorname{Ker} A\neq 0$, то для разрешимости неоднородного уравнения (12) необходимо и достаточно, чтобы правая часть $\widehat{f}$ была ортогональна подпространству $\operatorname{Ker} A^*$. В этом случае решение неединственно и определяется с точностью до произвольного элемента, принадлежащего $\operatorname{Ker} A$: $g=g_1+g_2$, $g_1\in\operatorname{Ker} A$, $Ag_2=\widehat{f}$, $g_2\in\operatorname{Im} A^*$. Построенное таким образом решение g задачи (12) называется классическим. Если, кроме того, g имеет наименьшую норму ($\operatorname{Ker} A\neq 0$, $\widehat{f}$ ортогональна $\operatorname{Ker} A^*$), то такое решение единственно, принадлежит $\operatorname{Im} A^*$ и называется нормальным.

Сформулируем теперь теорему существования в классическом смысле решения операторного уравнения (12), а значит, и разностной задачи (10), возникающей при реализации алгоритма (10).

Теорема 1. *При выполнении условий* (11) *существует в классическом смысле решение задачи* (12).

Теорема 1 доказывается непосредственной проверкой с помощью леммы, равенств $[f,\mu_{11}]_{H_2}=0$ и $[f,\mu_{N_1N_2}]_{H_2}=0$, где μ_{11}, $\mu_{N_1N_2}$ — собственные функции оператора A задачи (12), образующие базис в подпространстве $\operatorname{Ker} A$ (все остальные собственные функции образуют базис в подпространстве $\operatorname{Im} A$).

Поскольку базис подпространства $\operatorname{Ker} A$ состоит из двух функций μ_{11} и $\mu_{N_1N_2}$, а произвольный элемент, с точностью до которого определяется решение задачи (12), принадлежит данному подпространству, то этот элемент является некоторой линейной комбинацией функций μ_{11}, $\mu_{N_1N_2}$. Он может распадаться на две различные константы, одна из которых будет определена в узлах сетки Ω'_h, а другая — в узлах сетки Ω''_h. Однако при этом градиенты $y_{\hat{x}_1}$, $y_{\hat{x}_2}$, полученные на ячейках сетки Ω_h, будут определяться единственным образом. Единственное нормальное решение $y\in\operatorname{Im} A$ можно найти аналогично [6].

Таким образом, разностная схема (9) является примером применения многокомпонентного метода переменных направлений для расщепления по физическим процессам, при этом сохраняется полная аппроксимация исходной задачи и выполняются классические условия разрешимости.

Теорема 2. *При $\sigma = 3$ разностная схема (9) устойчива, и для ее решения справедлива оценка*

$$\left(\sum_{k=1}^{2} \|\widehat{\widetilde{y}}_k\|^2 + \tau \sum_{k=1}^{2} \left\| \sum_{i=1}^{3} \widehat{A}_{ik} \widehat{y}_k^{(i)} \right\|^2 \right) \leq \left(\sum_{k=1}^{2} \|\widetilde{y}_k(0)\|^2 + \tau \sum_{k=1}^{2} \left\| \sum_{i=1}^{3} A_{ik} y_k^{(i)}(0) \right\|^2 + Tc \max_{0 \leq t \leq T} \|f\|^2 \right),$$

где $c > 0$.

Доказательство. Умножим уравнение (9) на $\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)}$ и просуммируем по $k = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, в результате получим

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}(\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)}, \widehat{y}_k^{(i)}) - \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)}, \tilde{y}_k\right) + 0{,}5\tau\sigma\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}(\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)}, \widehat{y}_k^{(i)}) +$$
$$+ 0{,}5\tau^2\left\|\sigma\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}(\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)})_t\right\|^2 + \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)}, \left(\sum_{i=1}^{3}A_{ik}y_k^{(i)} - f\right)\right) = 0. \quad (13)$$

С учетом того, что

$$f - \sum_{i=1}^{3}\widehat{A}_{ik}\widehat{y}_k^{(i)} = \widetilde{y}_{kt}, \quad (14)$$

второе слагаемое левой части равенства (13) перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\widehat{A}_{ik}y_k^{(i)}, \widetilde{y}_k\right) = \sum_{k=1}^{2}(\widetilde{y}_k, f - \widetilde{y}_{kt}) = \sum_{k=1}^{2}(\widetilde{y}_k, f) - \tau^{-1}\left(\sum_{k=1}^{2}(\|\widehat{\widetilde{y}}_k\|^2 - \|y\|_k^2)\right) - \tau\sum_{k=1}^{2}\|y_{kt}\|^2. \quad (15)$$

В последнем слагаемом (15) $\widetilde{y}_{kt}$ заменим его выражением из (14). После указанных преобразований нетрудно удостовериться в справедливости теоремы 2 и указанной в ней оценки. □

Следует отметить, что алгоритм (9) является по сути линейным, т. к. реализация его линейна и не требует использования итерационных методов.

Теперь построим разностные аппроксимации для уравнений Навье–Стокса в обобщенных координатах. При этом ограничимся линеаризованным случаем, т. к. переход к нелинейному алгоритму (9) не представляет трудностей. Дифференциальной задаче (5) на введенной выше сетке поставим в соответствие разностную задачу

$$\frac{\widehat{\overline{y}} - \overline{y}}{\tau} - L_h\overline{y} + I_h(\overline{w})\overline{y} + C_h\,\overline{\mathrm{grad}}_h q = \overline{f}_h, \quad z \in \omega_h, \quad (16)$$
$$\mathrm{div}_h\,\overline{w} = 0, \quad z \in \Omega_h, \quad \overline{y} = 0, \quad z \in \Gamma_h, \quad (17)$$

где $C_h = (c_{ij})$ — 2×2-матрица, $\overline{w} = C_h^{\top}\overline{y}$, $L_h : H_h \to H_h$,

$$L_h = L_h^* > 0, \quad L_h\overline{y} = -0{,}5\nu\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}[(a_{\alpha\beta}\overline{y}_{\overline{z}_\beta})_{z_\alpha} + (a_{\alpha\beta}\overline{y}_{z_\beta})_{\overline{z}_\alpha}], \quad I_h(\overline{w})\overline{y} = \sum_{\alpha=1}^{2}I_{\alpha h}(w_\alpha)\overline{y},$$
$$I_{\alpha h}(w_\alpha)\overline{y} = 0{,}5[\widetilde{w}_\alpha^{(-0{,}5_\alpha)}(\overline{y} + \overline{y}^{(-1_\alpha)}/2)_{z_\alpha} + 0{,}5\widetilde{w}_\alpha^{(-0{,}5_\alpha)}\overline{y}_{\overline{z}_\alpha} + 0{,}5\widetilde{w}_\alpha^{(+0{,}5_\alpha)}\overline{y}_{z_\alpha}],$$
$$\widetilde{w}^{(n_\alpha)} = (w_\alpha^{(n+0{,}5_\alpha,+1_{3-\alpha})} + w_\alpha^{(n-0{,}5_\alpha,+1_{3-\alpha})} + 2w_\alpha^{(n+0{,}5_\alpha)} + 2w_\alpha^{(n-0{,}5_\alpha)} +$$
$$+ w_\alpha^{(n+0{,}5_\alpha,-1_{3-\alpha})} + w_\alpha^{(n-0{,}5_\alpha,-1_{3-\alpha})})/8,$$
$$n_\alpha = \pm 0{,}5_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad I_h(\overline{w}) : H_h \to H_h \quad \forall\overline{y} \in H_h,$$
$$((I_{\alpha h}(w_\alpha)\overline{y}, \overline{y})) = 0 \quad \forall\overline{y} \in H_h, \quad \mathrm{div}_h\,\overline{w} = w_{1\overline{z}_1} + w_{2\overline{z}_2},$$
$$\overline{\mathrm{grad}}_h q = (q_{\tilde{z}_1}, q_{\tilde{z}_2})^{\top}, \quad ((\overline{y}, C_h\overline{\mathrm{grad}}_h\, q)) = -(\mathrm{div}_h\,\overline{w}, q)_{G_h} \quad \forall\overline{y} \in H_h^0, \quad q \in G_h.$$

Здесь H_h^0 — пространство вещественных сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}_h$ и обращающихся в нуль на границе, G_h — пространство сеточных функций, определенных на Ω_h, $(v,y) = \sum\limits_{z\in\omega_h} vyh_1h_2$, $(p,q)_{G_h} = \sum\limits_{z\in\Omega_h} pqh_1h_2$. Разностная задача (16), (17) сохраняет характерные свойства дифференциальной задачи (5), (6). Если строится разностная схема на обобщенной криволинейной сетке, адаптированной к свойствам решения исходной задачи, то координатная система z может быть рассчитана с учетом этих свойств. Введем выражение

$$\frac{\widehat{\overline{y}}_i - \overline{y}_i}{\tau} - \sum_{i=1}^{4} \widetilde{A}_i\overline{y}_i + \widetilde{A}_5\overline{q} = \overline{f}, \quad z\in\omega_h, \tag{18}$$

$$\widetilde{A}_1\overline{y}_1 = -0{,}25\nu[(a_{11}\overline{y}_{1\overline{z}_1})_{z_1} + (a_{11}\overline{y}_{1z_1})_{\overline{z}_1}],$$

$$\widetilde{A}_2\overline{y}_2 = -0{,}25\nu\{[(a_{11}\overline{y}_{2\overline{z}_1})_{z_1} + (a_{11}\overline{y}_{2z_1})_{\overline{z}_1}] - 2[(a_{12}\overline{y}_{1\overline{z}_1})_{z_2} + (a_{12}\overline{y}_{1z_1})_{\overline{z}_2}]\},$$

$$\widetilde{A}_3\overline{y}_3 = -0{,}25\nu[(a_{22}\overline{y}_{3\overline{z}_2})_{z_2} + (a_{22}\overline{y}_{3z_2})_{\overline{z}_2}],$$

$$\widetilde{A}_4\overline{y}_4 = -0{,}25\nu\{[(a_{22}\overline{y}_{4\overline{z}_2})_{z_2} + (a_{22}\overline{y}_{4z_1})_{\overline{z}_4}] - 2[(a_{12}\overline{y}_{3\overline{z}_2})_{z_1} + (a_{12}\overline{y}_{3z_2})_{\overline{z}_1}]\},$$

$$\widetilde{A}_5\overline{q} = (q_{\tilde{x}_1}, q_{\tilde{x}_2}).$$

В силу (18) для решения задачи (16) строится аддитивная разностная схема

$$\frac{\widehat{\overline{y}}_i - \widetilde{\overline{y}}_i}{\tau} - 5\widetilde{A}_i(\widehat{\overline{y}}_i - \overline{y}_i) + \sum_{i=1}^{5} A_i\overline{y}_i = \overline{f}, \tag{19}$$

$$\widehat{\overline{y}} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\overline{y}_i, \quad z\in\omega_h, \quad y_{1,5\overline{z}_1} + y_{2,5\overline{z}_2} = 0.$$

Схема (19) реализуется, начиная с $i=5$, а затем $i=1$, $i=2$ и независимо $i=3$, $i=4$. Устойчивость алгоритма (19) доказывается так же, как для параболических уравнений со смешанными производными (см [13]).

Литература

1. Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* – Новосибирск, 1967. – 195 с.
2. Марчук Г.И. *Методы расщепления.* – М.: Наука, 1988. – 264 с.
3. Белоцерковский О.М. *Численное моделирование в механике сплошных сред.* – М.: Наука, 1984. – 520 с.
4. Лебедев В.И. *Метод композиции.* – М.: ОВМ АН СССР, 1986. – 198 с.
5. Лебедев В.И., Бахвалов Н.С., Агошков В.И., Бабурин О.В., Князев А.В., Шутяев В.П. *Параллельные алгоритмы решения некоторых стационарных задач математической физики.* – М.: ОВМ АН СССР, 1984. – 142 с.
6. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* – М.: Наука, 1970. – 288 с.
7. Темам Р. *Уравнения Навье–Стокса.* – М.: Мир, 1981. – 600 с.
8. Кобельков Г.М. *Об одной разностной схеме расчета нестационарных уравнений Навье–Стокса* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1984. – Т. 24. – № 2. – С. 294–304.
9. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Аддитивные схемы для задач математической физики.* – М.: Наука, 1999. – 195 с.
10. Фрязинов И.В. *Консервативные разностные схемы для двумерных уравнений несжимаемой вязкой жидкости в переменных скорость–давление* / Препринт № 11. Ин-т прикл. матем. АН СССР. – М., 1981. – 28 с.

11. Абрашин В.Н., Лапко С.Л. *Об одном классе разностных схем решения уравнений Навье–Стокса.* I // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 7. – С. 1154–1167.
12. Абрашин В.Н., Лапко С.Л. *Об одном классе разностных схем решения уравнений Навье–Стокса.* II // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 4. – С. 673–688.
13. Лапко С.Л., Рашид А.Н. *Разностные методы для многомерных уравнений конвективной диффузии* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 1. – С. 175–177.

Институт математики
Национальной Академии наук
Республики Беларусь

Белорусский государственный университет

Поступила
27.05.2004