ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 517.983

В.П. СЕРЕБРЯКОВ

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Рассмотрим на полуоси $I = [0, \infty)$ матричное линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$l[y] = -\{Q_0(x)y'\}' + Q(x)y, \tag{1}$$

где

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_0(x) \\ q_0(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q(x) \\ q(x) & q_2(x) \end{pmatrix}$$

суть квадратные матрицы второго порядка, $q_0(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q(x)$ — действительнозначные функции, три последние из которых и $\{q_0(x)\}^{-1}$ интегрируемы по Лебегу на каждом сегменте $[0,b]$, $0 < b < \infty$, а $y = (y_1(x), y_2(x))^\top$ — двухкомпонентная вектор-функция ($\top$ — символ транспонирования).

Через $L^2([a,\infty))$ (где a — некоторое действительное число) обозначим пространство (скалярных) комплекснозначных функций $\varphi(x)$, измеримых по Лебегу на полуоси $[a,\infty)$, для которых $|\varphi(x)|^2$ интегрируема по Лебегу на $[a,\infty)$, а через $L_2^p(I)$ $(1 \le p < \infty)$ — комплексное пространство двухкомпонентных вектор-функций $y = (y_1(x), y_2(x))$, измеримых по Лебегу на I, у которых сумма p-х степеней модулей компонент интегрируема по Лебегу на I. При $p = 2$ пространство $L_2^p(I)$ становится, как известно, гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(y,z) = \int_I (y_1(x)\overline{z}_1(x) + y_2(x)\overline{z}_2(x))dx.$$

Аналогично определяется пространство $L_2^2([a,\infty))$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ минимальный замкнутый симметрический оператор, порождаемый выражением (1) в гильбертовом пространстве $L_2^2(I)$.

С помощью таких же рассуждений, как в ([1], § 17), устанавливаются следующие утверждения:

I) область определения $\mathfrak{D}^*$ оператора $\mathcal{L}^*$, сопряженного с $\mathcal{L}$, состоит из вектор-функций $y \in L_2^2(I)$, абсолютно непрерывных и имеющих абсолютно непрерывную вектор-функцию $Q_0 y'$ на каждом сегменте $[0,b]$, $0 < b < \infty$, для которых $l[y] \in L_2^2(I)$;

II) если $y = (y_1(x), y_2(x))$, $z = (z_1(x), z_2(x)) \in \mathfrak{D}^*$, то существует (конечный) предел

$$\lim_{x\to\infty} [y,z], \tag{2}$$

где

$$[y,z] = q_0(x)\{(y_1'(x)\overline{z}_2(x) + y_2'(x)\overline{z}_1(x)) - (y_1(x)\overline{z}\,'_2(x) + y_2(x)\overline{z}\,'_1(x))\}; \tag{3}$$

III) область определения $\mathfrak{D}$ оператора $\mathcal{L}$ состоит из тех вектор-функций $y \in \mathfrak{D}^*$, для которых $y(0) = (Q_0 y')(0) = 0$ и предел (2) равен нулю при каждом $z \in \mathfrak{D}^*$.

В спектральной теории дифференциальных операторов одним из важнейших является направление, связанное с изучением индексов дефекта минимальных дифференциальных операторов в зависимости от поведения коэффициентов соответствующих дифференциальных выражений. В частности, вопрос об индексе дефекта рассматриваемого здесь оператора $\mathcal{L}$ изучался в работах [2]–[8], а некоторые другие спектральные свойства этого оператора — в [4]–[6]. В данной статье продолжается изучение вопроса об индексе дефекта $\mathcal{L}$. При этом здесь, в отличие, например, от [8], не используются асимптотические методы, а исследуется билинейная форма (3), ассоциированная с $\mathcal{L}$ (см. для сравнения [2], [3], [7]); это позволяет определить индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$, в частности, в случаях быстро осциллирующих на бесконечности коэффициентов, чего не удается сделать асимптотическими методами.

Согласно [2]–[8] (см. также литературу, указанную в этих работах) индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ равен $\{N, N\}$, где N может принимать значения 2, 3 или 4 в зависимости от поведения коэффициентов q_0, q_1, q_2, q выражения (1); при этом N совпадает с числом линейно независимых решений уравнения $l[y] = \lambda y$ с комплексным параметром λ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, а если $N = 4$, то и при действительных λ.

В данной статье получены условия на коэффициенты q_0, q_1, q_2, q, при выполнении которых $N \neq 2$ (теорема 1 и следствия из нее), $N \neq 4$ (следствие из теоремы 2, теорема 3 и следствие из нее). В теореме 2 даны условия на коэффициенты, при которых уравнение $l[y] = 0$ имеет решение, не принадлежащее пространству $L_2^p(I)$ ни при каком p ($1 \leq p < \infty$). В статье также приведены два примера выражения $l[y]$ с быстро осциллирующими на бесконечности коэффициентами, порождающего оператор $\mathcal{L}$ с индексом дефекта $\{3, 3\}$ (сравните с [9]).

Результаты этой статьи являются дополнением к результатам, изложенным в работах автора [2] и [3].

2. В этом пункте докажем утверждения, дающие условия, исключающие значение $\{2, 2\}$ для индекса дефекта оператора $\mathcal{L}$.

Теорема 1. *Пусть существуют действительнозначные функции f_1, f_2, g, определенные на $[a, \infty)$, $a > 0$, и обладающие свойствами*

1) *f_1, f_2, $q_0 f_1'$, $q_0 f_2'$, $q_0 g$ абсолютно непрерывны на каждом сегменте $[a, b]$, $a < b < \infty$;*
2) *$q_0 g f_1 f_2$ имеет отличный от нуля предел при $x \to \infty$;*
3) *функции*

$$f_1,\ f_2,\ (q_0 g f_1)' + q_0 g f_1',\ (q_0 g f_2)' + q_0 g f_2',\ (q_0 f_1')' - q_0 g^2 f_1 - q f_1 - q_2 f_2,\ (q_0 f_2')' - q_0 g^2 f_2 - q_1 f_1 - q f_2$$

принадлежат $L^2([a, \infty))$.

Тогда индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{2, 2\}$.

Доказательство. Достаточно показать ([1], § 14), что размерность факторпространства $\mathfrak{D}^*/\mathfrak{D}$ больше четырех.

Обозначим через $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ двухкомпонентные векторы

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

через $\varphi_k(x)$ — функции

$$\varphi_k(x) = f_k(x) \exp\left\{ i \int_a^x g(t)dt \right\} \quad (k = 1, 2), \tag{4}$$

а через $f(x)$ — двухкомпонентную вектор-функцию

$$f(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Пусть $\mathfrak{D}_a^*$ — множество сужений на $[0,a]$ вектор-функций из $\mathfrak{D}^*$, а $u^{(n)}$ — вектор-функции из $\mathfrak{D}_a^*$, значения $u^{(n)}(0)$, $(Q_0 u'^{(n)})(0)$, $u^{(n)}(a)$ и $(Q_0 u'^{(n)})(a)$ $(n = 1,\dots,5)$ которых определяются соответственно из 1-й, 2-й, 3-й и 4-й строк таблицы[1)]

$$\left\{\begin{matrix} e^{(1)} & e^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1)} & e^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f'(a) \end{matrix}\right\} \tag{6}$$

(в ней через 0 обозначен двухкомпонентный нулевой вектор). Определим двухкомпонентные вектор-функции $y^{(n)}$, положив

$$y^{(n)} = \begin{cases} u^{(n)}, & 0 \le x < a;\ n = 1,\dots,5; \\ 0, & a \le x < \infty; n = 1,\dots,4; \\ f, & a \le x < \infty; n = 5. \end{cases} \tag{7}$$

Из построения вектор-функций $y^{(n)}$, условий 1), 3) доказываемой теоремы и утверждения I) следует, что все $y^{(n)}$ принадлежат $\mathfrak{D}^*$.

Покажем, что $y^{(n)}$ $(n = 1,\dots,5)$ линейно независимы по модулю $\mathfrak{D}$. Действительно, пусть

$$\sum_{n=1}^{5} c_n y^{(n)} \in \mathfrak{D},$$

где c_n — постоянные комплексные числа. Тогда согласно утверждению III) имеют место равенства

$$\sum_{n=1}^{5} c_n y^{(n)}(0) = 0, \quad \sum_{n=1}^{5} c_n (Q_0 y'^{(n)})(0) = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{5} c_n y^{(n)}, y^{(m)} \right] = 0. \tag{9}$$

Из (8), учитывая (6), (7), находим $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Полагая в (9) $m = 5$ и принимая во внимание (2)–(7), получаем

$$4ic_5 \lim_{x\to\infty} q_0 g f_1 f_2 = 0,$$

откуда в силу п. 2) доказываемой теоремы $c_5 = 0$. Таким образом, $c_n = 0 \quad (n = 1,\dots,5)$. $\square$

Следствие 1. Пусть существуют действительнозначные функции $\varphi, \chi, \psi_1, \psi_2$, определенные на $[a,\infty)$, $a \ge 0$, и обладающие свойствами

1) φ, $q_0\varphi'$, χ абсолютно непрерывны на каждом сегменте $[a,b]$, $a < b < \infty$;
2) φ нигде не обращается в нуль на $[a,\infty)$;
3) $\chi > 0$ на $[a,\infty)$ и имеет положительный предел при $x \to \infty$;
4) функции

$$\varphi,\ \chi^{-1/2}\chi'\varphi^{-1},\ \psi_1,\ \psi_2$$

принадлежат $L^2([a,\infty))$.

Если на $[a,\infty)$

$$q_1 = c\{(q_0\varphi')' - \chi q_0^{-1}\varphi^{-3} - q\varphi + \psi_1\}\varphi^{-1},$$
$$q_2 = c^{-1}\{(q_0\varphi')' - \chi q_0^{-1}\varphi^{-3} - q\varphi + \psi_2\}\varphi^{-1},$$

где $c \ne 0$ — постоянное действительное число, то индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{2,2\}$.

[1)] Доказательство существования таких вектор-функций $u^{(n)}$ аналогично доказательству леммы 2 из ([1], § 17).

Для получения следствия 1 достаточно в теореме 1 взять

$$f_1 = \varphi, \quad f_2 = c\varphi, \quad g = \chi^{1/2} q_0^{-1} \varphi^{-2}.$$

Следствие 2. Пусть r — действительнозначная функция, определенная на $[a, \infty)$, $a \geq 0$, и обладающая свойствами

1) $r > 0$ на $[a, \infty)$;
2) r и $q_0 r'$ абсолютно непрерывны на каждом сегменте $[a, b]$, $a < b < \infty$;
3) функции $r^{-1/4}$, $\{q_0(r^{-1/4})'\}' - qr^{-1/4}$ принадлежат $L^2([a, \infty))$.

Если при этом

$$q_1 = k_1 q_0^{-1} r, \quad q_2 = k_2 q_0^{-1} r$$

почти всюду на $[a, \infty)$, где k_1 и k_2 — не равные нулю действительные константы одного знака, то индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{2, 2\}$.

Следствие 2 вытекает из следствия 1, если положить там

$$\varphi = r^{-1/4}, \quad \psi_1 = \psi_2 = qr^{-1/4} - \{q_0(r^{-1/4})'\}', \quad \chi(x) \equiv (k_1 k_2)^{1/2},$$

$$c = \begin{cases} -(k_1 k_2^{-1})^{1/2}, & \text{если } k_1 \text{ и } k_2 \text{ положительны,} \\ (k_1 k_2^{-1})^{1/2}, & \text{если } k_1 \text{ и } k_2 \text{ отрицательны.} \end{cases}$$

Пример 1. Пусть $a > 0$ и на $[a, \infty)$

$$q_0(x) = x^\delta \rho_0(x^\varepsilon), \quad q_1(x) = k_1 x^\alpha \rho(x^\beta), \quad q_2(x) = k_2 x^\alpha \rho(x^\beta), \quad q(x) = O(x^\gamma) \ \ (x \to \infty),$$

где α, β, γ, δ, ε, k_1, k_2 — постоянные действительные числа, $k_1 k_2 > 0$, а $\rho_0(x)$, $\rho(x)$ — положительные периодические дважды непрерывно дифференцируемые функции на I. Тогда в силу следствия 2 при

$$\alpha - 3\delta > 8 \max\{0, \beta, \varepsilon\} - 6, \quad \alpha + \delta > 2 \max\{1, 2\gamma + 1\} \tag{10}$$

индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{2, 2\}$.

Пример 2. Пусть $a \geq 0$ и на $[a, \infty)$

$$q_0(x) = e^{\delta x} \rho_0(e^{\varepsilon x}), \quad q_1(x) = k_1 e^{\alpha x} \rho(e^{\beta x}), \quad q_2(x) = k_2 e^{\alpha x} \rho(e^{\beta x}), \quad q(x) = O(e^{\gamma x}) \ \ (x \to \infty),$$

где α, β, γ, δ, ε, k_1, k_2, $\rho_0(x)$, $\rho(x)$ такие же, как в примере 1. Тогда при

$$\alpha - 3\delta > 8 \max\{0, \beta, \varepsilon\}, \quad \alpha + \delta > \max\{0, 4\gamma\} \tag{11}$$

в силу следствия 2 индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{2, 2\}$.

Однако справедлива также следующая (см. теорему 3 из [2])

Теорема 2. *Если при некотором $a \geq 0$ почти всюду на $[a, \infty)$ функция $q_0(x)$ положительна, $q(x)$ неотрицательна, а функции $q_1(x)$, $q_2(x)$ либо обе неотрицательны, либо обе неположительны, то уравнение $l[y] = 0$ имеет решение, не принадлежащее пространству $L_2^p(I)$ ни при каком p, $1 \leq p < \infty$.*

Следствие 3. Если при некотором $a \geq 0$ на $[a, \infty)$ функция $q_0(x)$ положительна почти всюду, $q(x)$ существенно ограничена снизу, а функции $q_1(x)$, $q_2(x)$ существенно ограничены либо обе снизу, либо обе сверху, то индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{4, 4\}$.

Действительно, поскольку условия, накладываемые на функции q, q_1, q_2 в теореме 2, сводятся здесь к условиям, накладываемым на те же функции прибавлением к матрице $Q(x)$ постоянной симметрической матрицы, то следствие вытекает из теоремы 2 в силу теоремы 6 из ([1], гл. IV, § 14).

Поэтому, если в примерах 1 и 2 дополнительно предположить, что $q(x)$ на $[a,\infty)$ существенно ограничена снизу, то при выполнении условий (10) (соответственно (11)) индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ будет $\{3,3\}$.

3. Рассмотрим другой случай, когда индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{4,4\}$.

Теорема 3. *Пусть существуют действительнозначные функции f_1, f_2, g_1, g_2, определенные на $[a,\infty)$, $a>0$, и обладающие свойствами*

1) *f_1, f_2, q_0f_1', q_0f_2', q_0g_1, q_0g_2 абсолютно непрерывны на каждом сегменте $[a,b]$, $a<b<\infty$;*
2) *почти всюду на $[a,\infty)$ либо $g_1=g_2$, либо выполняются неравенства $q_1g_2^2f_1f_2\le 0$, $q_2g_1^2f_1f_2\le 0$;*
3) *функции $(q_0g_1f_1)'+q_0g_1f_1'$, $(q_0g_2f_2)'+q_0g_2f_2'$, $(q_0f_1')'-qf_1$, $(q_0f_2')'-qf_2$, $q_0g_2^2f_2+q_1f_1$, $q_0g_1^2f_1+q_2f_2$ принадлежат $L^2([a,\infty))$;*
4) *по крайней мере одна из функций f_1 или f_2 не принадлежит $L^2([a,\infty))$.*

Тогда индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{4,4\}$.

Пусть

$$\varphi_k(x)=f_k(x)\exp\left\{i\int_a^x g_k(t)dt\right\}\quad (k=1,2),\quad f(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix}, \tag{12}$$

и пусть $y^{(0)}=u$ при $0\le x<a$, $y^{(0)}=f$ при $a\le x<\infty$, где вектор-функция f определена формулами (12), а $u\in\mathfrak{D}_a^*$ и $u(a)=f(a)$, $(Q_0u')(a)=(Q_0f')(a)$. Если по крайней мере одна из функций f_1 или f_2 не принадлежит $L^2([a,\infty))$, то и $f\notin L_2^2([a,\infty))$. Поэтому $y^{(0)}\notin L_2^2(I)$, но $l[y]\in L_2^2(I)$. Тогда утверждение теоремы 3 можно получить, используя результаты работы [10] (см. также доказательство теоремы 1 из [3]).

Следствие 4. Пусть q_0, q_1, q_2, q таковы, что для некоторого $a\ge 0$

1) q_0, q_1, q_2, q_1', q_2' абсолютно непрерывны на каждом сегменте $[a,b]$, $a<b<\infty$;
2) q_0 положительна, а q_1 и q_2 либо обе положительны, либо обе отрицательны на $[a,\infty)$;
3) при некоторых действительных числах μ и ν функции

   $\{(q_0|q_1|^{3\mu}|q_2|^{\nu+1})^{1/2}\}'|q_1|^{-\mu}$, $\{(q_0|q_1|^{\mu+1}|q_2|^{3\nu})^{1/2}\}'|q_2|^{-\nu}$, $\{q_0(|q_1|^{\mu})'\}'-q|q_1|^{\mu}$, $\{q_0(|q_2|^{\nu})'\}'-q|q_2|^{\nu}$

   принадлежат $L^2([a,\infty))$, а по крайней мере одна из функций $|q_1|^{\mu}$ или $|q_2|^{\nu}$ не принадлежит $L^2([a,\infty))$.

Тогда индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{4,4\}$.

Для доказательства следствия 4 достаточно в теореме 3 положить

$$f_1=|q_1|^{\mu},\quad f_2=-(\operatorname{sign} q_2)|q_2|^{\nu},\quad g_1=(q_0^{-1}|q_1|^{-\mu}|q_2|^{\nu+1})^{1/2},\quad g_2=(q_0^{-1}|q_1|^{\mu+1}|q_2|^{-\nu})^{1/2}.$$

Литература

1. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 521 с.
2. Серебряков В.П. *Об условиях квазирегулярности одного сингулярного дифференциального оператора* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1992. – № 6. – С. 7–9.
3. Серебряков В.П. *Условия квазирегулярности сингулярной системы дифференциальных уравнений второго порядка с осциллирующими коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 3. – С. 45-50.
4. Chakravarty N.K. *Some problems in eigenfunction expansions.* I // Quart. J. Math. – 1965. – V. 16. – № 62. – P. 135–150.

5. Chakravarty N.K. *Some problems in eigenfunction expansions.* II // Quart. J. Math. – 1968. – V. 19. – № 74. – P. 213–224.
6. Chakravarty N.K. *Some problems in eigenfunction expansions.* III // Quart. J. Math. – 1968. – V. 19. – № 75. – P. 397-415.
7. Eastham M.S.P., Gould K.J. *Square-integrable solutions of a matrix differential expression* // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 91. – № 2. – P. 424–433.
8. Eastham M.S.P. *The deficiency index of a second-order differential system* // J. London Math. Soc. – 1981. – V. 23. – № 2. – P. 311–320.
9. Eastham M.S.P. *The limit-*3 *case of self-adjoint differential expressions of the fourth order with oscillating coefficients* // J. London Math. Soc. – 1974. – V. 8. – № 3. – P. 427–437.
10. Мирзоев К.А. *Об одном критерии квазирегулярности оператора, порожденного квазидифференциальным выражением* // УМН. – 1985. – Т. 40. – Вып. 1. – С. 207–208.

Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова

Поступили
первый вариант 13.08.1997
окончательный вариант 27.05.1998