ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 4 (419)

УДК 517.958

М.М.КАРЧЕВСКИЙ, А.Д.ЛЯШКО, В.Н.ПАЙМУШИН

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМИ ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ

Для исследования смешанных форм потери устойчивости при реализации в многослойных оболочках с трансверсально-мягкими заполнителями моментного докритического напряженно-деформированного состояния (НДС), а также высокочастотных динамических характеристик таких оболочек после их предварительного статического нагружения в работе [1] предложена уточненная теория, в которой в качестве искомых неизвестных приняты компоненты векторов перемещений точек срединных поверхностей несущих слоев и поперечные касательные напряжения в заполнителях. В ней соответствующие уравнения равновесия и кинематические условия сопряжения слоев по тангенциальным перемещениям на границах их контакта выводятся из условия стационарности функционала [2], относящегося к классу смешанных. В данной статье рассматриваются вопросы существования и единственности критической точки этого функционала. Конструируются и исследуются методы внутренней аппроксимации для краевых задач, формулируемых на основе [1]. Изучаются вопросы линеаризации выведенных в [3] нелинейных уравнений динамики многослойных оболочек с трансверсально-мягкими заполнителями в окрестности некоторого статического НДС. Показано, что сформулированная в [3] линеаризованная задача на собственные значения имеет вещественный чисто дискретный спектр. Исследуется внутренняя аппроксимация этой задачи.

1. *Задача о стационарном НДС многослойной оболочки.* Рассматривается многослойная оболочка с чередующимися жесткими (несущими) и маложесткими слоями заполнителя. Будем предполагать, что компоненты деформации несущих слоев вычисляются на основе гипотез Кирхгофа-Лява в рамках геометрически нелинейной теории среднего изгиба; для описания НДС заполнителя используется модель трансверсально-мягких слоев. Будем считать также, что торцевые срезы несущих слоев жестко защемлены, а торцы заполнителя свободны от напряжений.

При этих предположениях в соответствии с [1] задача о равновесии оболочки, находящейся под действием заданных внешних сил, приложенных к несущим слоям, может быть сформулирована как задача об отыскании критических точек функционала

$$L(u,\sigma) = \Phi(u) - f(u) + l(u,\sigma) - F(\sigma). \tag{1}$$

Здесь

$$\Phi(u) = \Phi_0(u) + \sum_{k=1}^{N} \Phi_k(u^k),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, коды проектов 95-01-00400, 93-013-1656

$$
\begin{aligned}
\Phi_k(u^k) &= \int_\Omega (a^k(\varepsilon^k,\varepsilon^k) + b^k(\varkappa^k,\varkappa^k))d\Omega, \quad k=1,\dots,N,\\
\Phi_0(u) &= \int_\Omega \sum_{k=1}^{N-1} c_k^0 (u_3^{k+1} - u_3^k)^2 d\Omega,\\
l(u,\sigma) &= -\int_\Omega \sum_{k=1}^{N-1} (u_i^{k+1} - u_i^k + \hbar_k \vartheta_i^k + \hbar_k^1 \vartheta_i^{k+1})\sigma_k^i d\Omega,\\
F(\sigma) &= \int_\Omega \sum_{k=1}^{N-1} (C_k\sigma_k\cdot\sigma_k + d_k(\widetilde{\operatorname{div}\sigma_k})^2)d\Omega,\\
f(u) &= \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} f^k\cdot u^k d\Omega.
\end{aligned}
$$

Предполагается, что срединная поверхность оболочки отнесена к криволинейным координатам x_1, x_2, образованным линиями главных кривизн, $\Omega\subset R_2$ — ограниченная двумерная область изменения $x=(x_1,\ x_2)$, $u^k=(u_1^k,u_2^k,u_3^k)$, $k=1,\dots,N$, — смещения точек срединной поверхности k-го несущего слоя; u_i^k — касательные, $w^k\equiv u_3^k$ — нормальные смещения (прогибы), $\sigma_k=(\sigma_k^1,\sigma_k^2)$, $k=1,\dots,N-1$, — напряжения сдвига в заполнителе, $f^k=(f_1^k,f_2^k,f_3^k)$ — нагрузки, приложенные к несущим слоям; $\hbar_k=t_k+h_k$, $\hbar_k^1=t_{k+1}+h_k$, $2h_k$ — толщина k-го слоя заполнителя, $2t_k$ — толщина k-го несущего слоя. Матрицы C_k, константы c_k^0, d_k характеризуют материал заполнителя; a^k, b^k — симметричные равномерно положительно определенные и ограниченные билинейные формы:

$$
c_0^k\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \le a_{ijkl}^k\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \le c_1^k\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \tag{2}
$$

$$
c_0^k\varkappa_{ij}\varkappa_{ij} \le b_{ijkl}^k\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} \le c_1^k\varkappa_{ij}\varkappa_{ij}. \tag{3}
$$

Коэффициенты a_{ijkl}^k, b_{ijkl}^k характеризуют упругие свойства материала несущих слоев, в частности, для изотропного однородного материала

$$
a^k(\varepsilon,\varepsilon) = B_k\left(\varepsilon_{11}^2 + 2\nu_k\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + 2\left(1-\nu_k\right)\varepsilon_{12}^2\right), \tag{4}
$$
$$
b^k(\varkappa,\varkappa) = D_k\left(\varkappa_{11}^2 + 2\nu_k\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{22}^2 + 2\left(1-\nu_k\right)\varkappa_{12}^2\right), \tag{5}
$$

B_k — жесткость на растяжение, D_k — цилиндрическая жесткость, ν_k — коэффициент Пуассона k-го несущего слоя, $\varepsilon^k=(\varepsilon_{11}^k,\varepsilon_{12}^k,\varepsilon_{22}^k)$, $\varkappa^k=(\varkappa_{11}^k,\varkappa_{12}^k,\varkappa_{22}^k)$ — компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединных поверхностей несущих слоев, вычисляемые по стандартным формулам теории среднего изгиба (см., напр., [4]):

$$
\varepsilon_{11}^k = e_1^k + \frac{1}{2}\left(\vartheta_1^k\right)^2, \qquad \varepsilon_{22}^k = e_2^k + \frac{1}{2}\left(\vartheta_2^k,\right)^2 \qquad \varepsilon_{12}^k = \omega^k + \frac{1}{2}\vartheta_1^k\vartheta_2^k,
$$
$$
e_1^k = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1^k}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}u_2^k + \frac{1}{R_1}u_3^k, \qquad e_2^k = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2^k}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}u_1^k + \frac{1}{R_2}u_3^k,
$$
$$
\vartheta_1^k = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3^k}{\partial x_1} + \frac{1}{R_1}u_1^k, \qquad \vartheta_2^k = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3^k}{\partial x_2} + \frac{1}{R_2}u_2^k,
$$
$$
\varkappa_{11}^k = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \vartheta_1^k}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\vartheta_2^k, \qquad \varkappa_{22}^k = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \vartheta_2^k}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\vartheta_1^k,
$$
$$
\varkappa_{12}^k = \frac{1}{2}(\tau_1^k + \tau_2^k + \frac{1}{R_1}\omega_1^k + \frac{1}{R_2}\omega_2^k),
$$
$$
\omega_1^k = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2^k}{\partial x_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}u_1^k, \qquad \omega_2^k = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1^k}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}u_2^k,
$$

$$\omega^k = \frac{1}{2}\left(\omega_1^k + \omega_2^k\right),$$

$$\tau_1^k = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \vartheta_2^k}{\partial x_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\vartheta_1^k, \qquad \tau_2^k = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \vartheta_1^k}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\vartheta_2^k.$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$A_1, A_2 \in C^1(\Omega), \quad A_1, A_2 \geq m > 0, \quad m = \mathrm{const}, \quad R_1^{-1}, R_2^{-1} \in C^1(\Omega), \tag{6}$$

$$a_{ijkl}^k, b_{ijkl}^k \in C^0(\Omega). \tag{7}$$

Нам будет удобно записывать выражения для компонент деформации в виде $\varepsilon^k(u^k) = e^k(u^k) + d^k(u^k, u^k)$, где $e^k(u^k)$ — линейные составляющие тангенциальных компонент деформации, $d^k(u^k, u^k) = (d_{ij})_{i,j=1}^2$, $d_{ij} = \frac{1}{2}\vartheta_i\left(u^k\right)\vartheta_j\left(u^k\right)$. Нетрудно видеть, что [1]

$$|d^k(u^k, v^k)| \leq c(|u^k| + |\nabla u_3^k|)(|v^k| + |\nabla v_3^k|). \tag{8}$$

В силу принятых нами граничных условий имеем

$$u^k = 0, \quad \frac{\partial w^k}{\partial \nu} = 0, \quad \sigma \cdot \nu = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{9}$$

где Γ — граница области Ω, ν — нормаль к Γ.

1.1. Исследование разрешимости. Вследствие условий (2), (3), (9) и оценки (8) функционал $L(u,\sigma)$ естественно рассматривать как функционал над пространством $\overline{H} = V \times H$ ($u \in V$, $\sigma \in H$), где

$$V = (\mathring{W}_2^1 \times \mathring{W}_2^1 \times \mathring{W}_2^2)^N, \qquad H = (E_0)^{(N-1)},$$

$$E_0 = \{\sigma \in (L_2)^2, \quad \operatorname{div}\sigma \in L_2, \quad \sigma \cdot \nu = 0, \quad x \in \Gamma\}$$

— гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\sigma, \tau)_{E_0} = (\sigma, \tau)_{L_2 \times L_2} + (\operatorname{div}\sigma, \operatorname{div}\tau)_{L_2}.$$

(По поводу основных свойств пространства E_0 см., напр., [5].)

Сведем задачу поиска критических точек функционала (1) к операторному уравнению в пространстве $\overline{H}$. Нетрудно проверить, что $l(u,\sigma)$ — непрерывная билинейная форма над $\overline{H}$, следовательно, существуют такие взаимно сопряженные линейные операторы $L_{12} : V \to H$, $L_{21} : H \to V$, что

$$l(u,\sigma) = (L_{12}\sigma, u)_V = (\sigma, L_{21}u)_H \quad \forall u \in V, \quad \sigma \in H. \tag{10}$$

Пусть далее $L_{11} : V \to V$, $L_{22} : H \to H$, $f \in V$ — градиенты функционалов Φ, F, $f(u)$ соответственно, т. е.

$$\begin{aligned}(L_{11}u, \eta)_V = a_{11}(u,\eta) \equiv 2\int_\Omega \sum_{k=1}^N a^k(\varepsilon^k(u^k), e^k(\eta^k) + 2d^k(u^k, \eta^k))d\Omega + \\ + 2\int_\Omega \sum_{k=1}^N b^k(\varkappa^k(u^k), \varkappa^k(\eta^k))d\Omega + \\ + \int_\Omega \sum_{k=1}^{N-1} c_k^0(u_3^{k+1} - u_3^k)(\eta_3^{k+1} - \eta_3^k)d\Omega \quad \forall u, \eta \in V,\end{aligned} \tag{11}$$

$$(L_{22}\sigma, \tau)_H = a_{22}(\sigma,\tau) \equiv 2\int_\Omega \sum_{k=1}^{N-1}(C_k\sigma^k \cdot \tau^k + d_k\widetilde{\operatorname{div}\sigma^k}\widetilde{\operatorname{div}\tau^k})d\Omega \quad \forall \sigma, \tau \in H, \tag{12}$$

[1]Через $c, c_1, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, возможно, различные.

$$f(v) \equiv (f, v)_V \quad \forall v \in V.$$

Лемма 1. *Стационарная точка функционала* $L(u, \sigma)$ *— решение уравнения*

$$Py \equiv Ay - F = 0, \tag{13}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & -L_{22} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \overline{H}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что уравнение (13) эквивалентно соотношению

$$\frac{d}{dt} L(u + tv, q + t\eta)\Big|_{t=0} = 0 \quad \forall v \in V, \quad \eta \in H.$$

Теорема 1. *Уравнение* (13) *имеет хотя бы одно решение, если* $\|f\|_V$ *достаточно мала.*

Доказательство теоремы 1 основывается на теореме Канторовича о разрешимости нелинейных операторных уравнений (см., напр., [6], с.140) и будет приведено после формулировки ряда вспомогательных результатов.

Заметим прежде всего, что оператор P дифференцируем по Фреше, и его производная определяется соотношением

$$(P'(y)z, \xi)_{V\times H} = (A'(y)z, \xi)_{V\times H} = 2\int_\Omega \sum_{k=1}^{N} a^k(\varepsilon^k(u^k), 2d^k(v^k, \eta^k))d\Omega +$$

$$+2\int_\Omega \sum_{k=1}^{N} a^k(e^k(v^k) + 2d^k(u^k, v^k), e^k(\eta^k) + 2d^k(u^k, \eta^k))d\Omega +$$

$$+2\int_\Omega \sum_{k=1}^{N} b^k(\varkappa^k(v^k), \varkappa^k(\eta^k))d\Omega + \int_\Omega \sum_{k=1}^{N-1} c_k^0(v_3^{k+1} - v_3^k)(\eta_3^{k+1} - \eta_3^k)d\Omega +$$

$$+(L_{12}v, \eta) + (L_{21}v, \eta) + (L_{22}\sigma, \tau) \quad \forall y, z, \xi \in \overline{H}, \tag{14}$$

$$y = \begin{pmatrix} u \\ \sigma_0 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} v \\ \sigma \end{pmatrix}, \qquad \xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение оператор $L_{11}^0 : V \to V$,

$$(L_{11}^0 u, \eta) = a_{11}^0(u, \eta) \equiv$$

$$\equiv 2\int_\Omega \sum_{k=1}^{N} (a^k(e^k(u^k), e^k(\eta^k)) + b^k(\varkappa^k(u^k), \varkappa^k(\eta^k)))d\Omega +$$

$$+2\int_\Omega \sum_{k=1}^{N-1} c_k^0(u_3^{k+1} - u_3^k)(\eta^{k+1} - \eta_3^k)d\Omega \quad \forall u, \eta \in V.$$

Лемма 2. *Оператор* L_{11}^0 *положительно определен, т. е.*

$$(L_{11}^0 u, u)_V \geq \gamma_1(u, u)_V \quad \forall u \in V, \quad \gamma_1 = \text{const} > 0.$$

Доказательство. Из условий (2)–(3) и положительности c_k^0 вытекает, что для любого $u \in V$

$$(L_{11}^0 u, u)_V \geq c\int_\Omega \sum_{k=1}^{N-1} (e^k(u^k), e^k(u^k)) + (\varkappa^k(u^k), \varkappa^k(u^k)))d\Omega \geq \gamma_1(u, u)_V. \tag{15}$$

Последнее неравенство — следствие обобщенного неравенства Корна для оператора линейной теории оболочек [7]. □

Лемма 3. *Оператор* $L_{22} : H \to H$ *ограничен и положительно определен*:

$$\gamma_2(\sigma,\sigma)_H \le (L_{22}\sigma,\sigma)_H \le \gamma_4(\sigma,\sigma)_H \quad \forall\sigma\in H, \quad \gamma_2,\gamma_4=\mathrm{const}>0.$$

Доказательство. Ограниченность оператора L_{22} очевидна. Докажем его положительную определенность. Пусть $0<\delta<1$. Тогда для любого $\sigma_p\in E_0$, $1\le p\le N-1$, имеем

$$I\equiv\int_\Omega\left(C_p\sigma_p\cdot\sigma_p+d_p\left(\widetilde{\operatorname{div}\sigma_p}\right)^2\right)d\Omega\ge c\left(\|\sigma_p\|^2_{L_2\times L_2}+\int_\Omega\delta\left(\widetilde{\operatorname{div}\sigma_p}\right)^2d\Omega\right).$$

Учитывая, что $\widetilde{\operatorname{div}\sigma_p}=\operatorname{div}\sigma_p+\alpha_1\sigma_{p1}+\alpha_2\sigma_{p2}$, где $\alpha_k=\Gamma^i_{ik}$, получим

$$I\ge c(1+\delta\min_k\min_\Omega\alpha_k^2)\|\sigma_p\|^2_{L_2\times L_2}+\delta\|\operatorname{div}\sigma_p\|^2_{L_2}-$$
$$-2\delta\left(\int_\Omega|\alpha_1\sigma_{p1}|d\Omega-\int_\Omega|\alpha_2\sigma_{p2}|d\Omega-\int_\Omega|\alpha_1\alpha_2\sigma_{p1}\sigma_{p2}|d\Omega\right).$$

Применяя далее неравенство Коши с ε для оценки отрицательных слагаемых, получим

$$I\ge cm(\|\sigma_p\|^2_{L_2\times L_2}+(\delta/2)\|\operatorname{div}\sigma_p\|^2_{L_2}),$$
$$m=1+\delta\min_k\min_\Omega\alpha_k^2-9\delta\max_k\max_\Omega\alpha_k^2.$$

Выбирая теперь δ так, чтобы m было положительно, получим утверждение леммы. $\square$

Лемма 4. *Существует оператор* $\Gamma_0=[A'(0)]^{-1}$, *причем*

$$\|\Gamma_0\|\le b_0,\quad b_0=b_0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$A'(0)=\begin{pmatrix}L^0_{11} & L_{12}\\ L_{21} & -L_{22}\end{pmatrix}.$$

Система уравнений

$$L^0_{11}u+L_{12}\sigma=f_1,\quad L_{21}u-L_{22}\sigma=f_2 \tag{16}$$

имеет единственное решение при любых $f_1\in V$, $f_2\in H$, справедливы априорные оценки

$$\|u\|_V\le\frac{1}{\gamma_1}\|f_1\|_V+\frac{\gamma_3}{\gamma_1\gamma_2}\|f_2\|_H,$$
$$\|\sigma\|_H\le\frac{\gamma_3}{\gamma_2}\|u\|_V+\frac{1}{\gamma_2}\|f_2\|_H,\quad \gamma_3=\|L_{12}\|.$$

Последнее вытекает из того, что система (16) может быть записана в эквивалентном виде

$$\sigma=L^{-1}_{22}L_{21}u-L^{-1}_{22}f_2,$$

$$(L^0_{11}+L_{12}L^{-1}_{22}L_{21})u=f_1+L_{12}L^{-1}_{22}f_2,$$

а оператор $L_{12}L^{-1}_{22}L_{21}$ неотрицателен. $\square$

Лемма 5.

$$\|A'(y^1)-A'(y^2)\|\le c(1+\|y^1\|+\|y^2\|)\|y^1-y^2\|\quad\forall y^1,y^2\in V\times H. \tag{17}$$

Доказательство. В силу представления (14) оценка (17) совпадает, фактически, с соответствующей оценкой для оператора геометрически нелинейной теории оболочек из [8]. $\square$

Доказательство теоремы 1. В силу лемм 4, 5

$$\|\Gamma_0\| \le b_0, \quad \|\Gamma_0 P(0)\| \le \eta_0 = \|f\|_V b_0, \quad \Gamma_0 = [P'(0)]^{-1},$$

$$\|P'(y^1) - P'(y^2)\| \le (1+2R)\|y^1 - y^2\|$$

$$\forall y^1, y^2 \in B(R) = \{y \in V \times H, \|y\| \le R\},$$

поэтому уравнение (13) имеет решение в сфере $B(r_0)$, если

$$h_0 = \|f\|_V (1+2R) b_0^2 \le 1/2, \quad r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{h_0} b_0 \|f\|_V \le R. \tag{18}$$

Условия (18) выполняются при малых $\|f\|_V$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если при описании деформации несущих слоев ограничиться геометрически линейным приближением, то решение уравнения (13) определяется однозначно и является седловой точкой функционала L [10], [11].

1.2. Внутренняя аппроксимация задачи (13). Пусть V_h, H_h, $h \to 0$, — семейства конечномерных подпространств, полные в V, H соответственно. При их построении можно использовать, например, хорошо известные конечноэлементные пространства, полные в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ (см., напр., [9]). Под приближенным решением задачи (13) будем понимать пару функций $u_h \in V_h$, $\sigma_h \in H_h$ — стационарную точку функционала L на $\overline{H_h} = V_h \times H_h$, т. е.

$$\frac{d}{dt} L(u_h + t v_h, \sigma_h + t\tau_h)\Big|_{t=0} = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \quad \tau_h \in H_h.$$

Иными словам, u_h, σ_h определяются как решение системы уравнений

$$a_{11}(u_h, v_h) + l(\sigma_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \tag{19}$$

$$a_{22}(\sigma_h, \tau_h) - l(\tau_h, u_h) = 0 \quad \forall \tau_h \in H_h. \tag{20}$$

Теорема 2. *Если $\|f\|_V$ достаточно мала, то в шаре $B(r_0)$, где*

$$r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{c_0 h_0} \|f\|_V b_0 h_0 = \|f\|_V (1+2R) b_0^2,$$

существует хотя бы одно решение задачи (19) – (20). *При этом справедливы равномерные по h априорные оценки*

$$\|u_h\|_V \le c_1, \quad \|\sigma_h\|_H \le c_2. \tag{21}$$

Доказательство. Существование решения задачи (19)–(20) доказывается точно так же, как и для исходной задачи. Оценки (21) следуют из принадлежности решения u_h, σ_h шару $B(r_0)$, радиус которого не зависит от h. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Существует такая последовательность $h \to 0$, что $u_h \rightharpoonup u$ (слабо), $\sigma_h \to \sigma$ (сильно), где (u, σ) — стационарная точка функционала L, (u_h, σ_h) — решение задачи* (19)–(20).

Доказательство. Из теоремы 2 вытекает существование $u \in V$ и $\sigma \in H$ таких, что $u_h \rightharpoonup u$, $\sigma_h \rightharpoonup \sigma$. Покажем, что (u, σ) — стационарная точка функционала L. Для этого выберем произвольные $v \in V$, $\tau \in H$ и последовательности $v_h \in V_h$, $\tau_h \in H_h$ такие, что $v_h \to v$, $\tau_h \to \tau$, и перейдем к пределу в уравнениях (19) – (20) при $h \to 0$. Отметим, что предельный переход в выражениях вида

$$\int_\Omega a^k(\varepsilon^k(u_h^k), 2d^k(u_h^k, v_h^k)) d\Omega$$

основывается на сильной сходимости $u_{3h}^k \to u_3^k$ в W_4^1. Покажем, что $\sigma_h \to \sigma$ сильно в H. Непосредственно из определений точного и приближенного решений имеем

$$a_{22}(\sigma_h - \sigma, \sigma_h - \tau_h) = l(\sigma_h - \tau_h, u - u_h) \quad \forall \tau_h \in H_h,$$

откуда

$$a_{22}(\sigma_h - \sigma, \sigma_h - \sigma) = -a_{22}(\sigma_h - \sigma, \sigma - \tau_h) + l(\sigma_h - \sigma, u_h - u) + l(\sigma - \tau_h, u_h - u),$$

и, следовательно,

$$\gamma_2 \|\sigma_h - \sigma\|_h^2 \le \gamma_4 \|\sigma_h - \sigma\|_H \|\sigma - \tau_h\|_H + c\|u - u_h\|_{V_1} \left(\|\sigma_h - \sigma\|_H + \|\sigma - \tau_h\|_H\right).$$

Здесь и далее

$$V_1 = (L_2 \times L_2 \times W_2^1)^N.$$

Ясно, что $u_h \to u$ сильно в V_1. Поэтому, выбирая τ_h так, чтобы $\|\tau_h - \sigma\|_H \to 0$, получим $\|\sigma_h - \sigma\|_H \to 0$. $\square$

Замечание 2. Если ограничиться геометрически линейным приближением при описании деформации несущих слоев, то можно доказать сильную сходимость и для u_h, более того, справедлива оценка точности [10], [11]

$$\|u - u_h\|_V + \|\sigma - \sigma_h\|_H \le c\Big(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V + \inf_{\tau_h \in H_h} \|\sigma - \tau_h\|_H\Big).$$

2. *Линеаризованные уравнения динамики многослойных оболочек с трансверсально-мягкими заполнителями.* Эти уравнения могут быть записаны в виде [3]

$$L'_{11} v + L_{12}\sigma + B\ddot{v} = 0,$$

$$L_{21} v - L_{22}\sigma = 0.$$

Здесь $v = v(x,t)$, $\sigma = \sigma(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \ge 0$, $v = (v^1, \dots, v^N)$, v^k — вектор смещений срединной поверхности k-го несущего слоя оболочки, $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^{N-1})$, $\sigma^k = (\sigma_1^k, \sigma_2^k)$ — напряжения поперечного сдвига в k-м слое заполнителя. Предполагается, что $v \in V$, $\sigma \in H$ $\forall t \ge 0$.

Операторы L_{22}, L_{12}, L_{21} определяются соотношениями (12), (10), $L'_{11} = L'_{11}(\tilde{v})$, где $\tilde{v} = \tilde{v}(x)$ — вектор смещений, соответствующий положению равновесия рассматриваемой оболочки под действием некоторой стационарной внешней нагрузки (в окрестности этого положения равновесия и происходит линеаризация динамической задачи), $B : V \to V$, причем

$$(Bv, v)_V \equiv b(v,v) = \int_\Omega \sum_{k=1}^N t_k \rho_k (v_1^{k2} + v_2^{k2} + v_3^{k2}) d\Omega +$$

$$+ \int_\Omega \tilde{\rho}_k h_k \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{v_i^1 + v_i^2}{2} + \frac{t_2 \vartheta_i^2 - t_1 \vartheta_i^1}{2} + \frac{h_k}{4}(\vartheta_i^2 - \vartheta_i^1) \right)^2 + \left(\frac{v_3^1 + v_3^2}{2} \right)^2 \right) d\Omega \quad \forall v \in H, \qquad (22)$$

где ρ_k — плотность k-го несущего слоя, $\tilde{\rho}_k$ — плотность k-го слоя заполнителя. Остальные обозначения совпадают с использованными выше. Решение задачи о свободных колебаниях, как обычно, будем строить в виде

$$v(x,t) = u(x) e^{i\omega t}, \quad \sigma(x,t) = \tau(x) e^{i\omega t}.$$

Тогда

$$L'_{11} u + L_{12}\tau = \lambda B u, \quad L_{21} u - L_{22}\tau = 0, \quad \lambda = \omega^2. \qquad (23)$$

2.1. Исследование задачи (23). В дальнейшем существенно используются методы исследования задач на собственные значения с линейными ограничениями (см. [12], гл. 9, [13] и цитированную там литературу). При этом потребуются следующие свойства участвующих в (23) операторов.

Непосредственно из определения оператора B вытекает

Лемма 6. $\|Bu\|_V \le c\|u\|_{V_1}$.

Лемма 7. *Существуют такие постоянные* $c_0, c_1 > 0$, *что для любых* $u, v \in V$

$$(L'_{11}(u)v, v) \ge c_0\|v\|_V^2 \left(1 - c_1(\|u\|_V + \|u\|_V^2)\right). \tag{24}$$

Доказательство. Непосредственными вычислениями показывается, что

$$(L'_{11}(u)v, v)_V \equiv a'_{11}(v, v) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega (a^k(e(v^k), e(v^k)) + b^k(\varkappa(v^k), \varkappa(v^k)))d\Omega + \sum_{i=1}^{3} I_i \quad \forall u, v \in V, \tag{25}$$

где

$$I_1 = 2\sum_{k=1}^{N} \int_\Omega a^k(e(v^k), d(u^k, v^k))d\Omega, \quad I_2 = \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega a^k(e(u^k), d(v^k, v^k))d\Omega,$$
$$I_3 = \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega a^k(d(u^k, u^k), d(v^k, v^k))d\Omega.$$

Используя обобщенное неравенство Коши-Буняковского и ограниченность оператора вложения из W_2^1 в L_4, получим

$$|I_1| \le \int_\Omega (|v^p| + |\nabla v_1^p| + |\nabla v_2^p|)(|v^p| + |\nabla v_3^p|)(|u^p| + |\nabla u_3^p|)d\Omega \le c\|v\|_V^2\|u\|_V,$$
$$|I_2| \le \int_\Omega (|u^p| + |\nabla u_1^p||\nabla u_2^p|)(|v^p| + |\nabla v_3^p|)^2 d\Omega \le c\|v\|_V^2\|u\|_V,$$
$$|I_3| \le \int_\Omega (|v^p| + |\nabla v_3^p|)^2(|u^p| + |\nabla u_3^p|)^2 d\Omega \le c\|v\|_V^2\|u\|_V^2,$$

откуда вследствие обобщенного неравенства Корна линейной теории оболочек имеем (24). □

Замечание 3. Если квадратичные формы a^k, b^k определяются соотношениями (4), (5), то

$$a^k(d(u^k, u^k), d(v^k, v^k)) = \frac{1}{4}(\vartheta_1^2(u^k)\vartheta_1^2(v^k) + \nu_k\vartheta_1^2(u^k)\vartheta_2^2(v^k) +$$
$$+\nu_k\vartheta_2^2(u^k)\vartheta_1^2(v^k) + \vartheta_2^2(u^k)\vartheta_2^2(v^k) + 2(1-\nu_k)\vartheta_1(u^k)\vartheta_2(u^k)\vartheta_1(v^k)\vartheta_2(v^k)) \ge$$
$$\ge \frac{1}{4}\nu_k(\vartheta_1^2(u^k)\vartheta_1^2(v^k) + \vartheta_1^2(u^k)\vartheta_2^2(v^k) + \vartheta_2^2(u^k)\vartheta_1^2(v^k) + \vartheta_2^2(u^k)\vartheta_2^2(v^k)) \ge 0,$$

и оценка (24) улучшается

$$(L'_{11}(u)v, v) \ge c_0\|v\|_V^2(1 - c_1\|u\|_V).$$

Лемма 8. *Пусть* $u \in (W_\infty^1 \times W_\infty^1 \times W_\infty^2)^N$. *Тогда существуют такие постоянные* $c_0 = c_0(u) > 0$, $c_1 = c_1(u) > 0$, *что*

$$(L'_{11}(u)v, v) \ge c_0\|v\|_V^2 - c_1\|v\|_{L_2}^2. \tag{26}$$

Доказательство. Заметим, что $I_1 + I_2 + I_3$ можно представить как сумму слагаемых вида

$$J_1 = \int_\Omega c(x)v_k^p v_l^p d\Omega, \qquad J_2 = \int_\Omega c(x)v_k^p \frac{\partial v_l^p}{\partial x_l} d\Omega, \qquad k, l = 1, 2, 3,$$
$$J_3 = \int_\Omega c(x)\frac{\partial v_k^p}{\partial x_j}\frac{\partial v_3^p}{\partial x_l} d\Omega, \qquad j, l = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $c(x) \in W_\infty^1$. Имеем далее

$$|J_1|, |J_2| \le c\|v\|_V^2,$$

$$J_3 = -\int_\Omega v_k^p \frac{\partial c(x)}{\partial x_j}\frac{\partial v_3^p}{\partial x_l} d\Omega - \int_\Omega v_k^p c(x) \frac{\partial^2 v_3^p}{\partial x_l^2} d\Omega,$$

$$|J_3| \le c\|v\|_{L_2}\|v\|_V \le \frac{c}{2\varepsilon}\|v\|_{L_2}^2 + \frac{c\varepsilon}{2}\|v\|_V^2,$$

$\varepsilon > 0$ произвольно. Отсюда в силу (15) при соответствующем выборе $\varepsilon > 0$ вытекает (26). $\square$

Из лемм 3, 4 и определения оператора B непосредственно следует

Лемма 9. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий:*

$$c_1\left(\|\tilde v\|_V + \|\tilde v\|_V^2\right) < 1, \tag{27}$$

где c_1 *— постоянная из неравенства* (24),

$$\tilde v \in (W_\infty^1 \times W_\infty^1 \times W_\infty^2)^N. \tag{28}$$

Тогда существует такая постоянная $c_0 = c_0(\tilde v) > 0$ *, что*

$$(L'_{11,c}v, v) \ge c_0\|v\|_V^2, \quad c_0 > 0, \tag{29}$$

где $L'_{11,c} = L'_{11} + cB$.

Замечание 4. При выполнении условия (27) постоянную c, очевидно, можно считать равной нулю.

В дальнейшем для определенности будем считать выполненным условие (28), и постоянную c выбранной так, что условие (29) выполняется. Ясно, что задача (23) эквивалентна задаче

$$L_{11,c}u + L_{12}\sigma = \lambda' Bu, \qquad L_{21}u - L_{22}\sigma = 0, \tag{30}$$

$\lambda' = \lambda + c$. Для упрощения записей будем в дальнейшем придерживаться обозначений $\lambda' = \lambda$, $L'_{11,c} = L'_{11}$.

Лемма 10. *Оператор* $T : \overline{H} \to \overline{H}$, $T\overline{u} = \overline{v}$, $\overline{u} = (u, \tau)$, $\overline{v} = (v, \sigma)$, *где* v, σ *определяются как решение системы*

$$L'_{11}v + L_{12}\sigma = Bu, \qquad L_{21}v - L_{22}\sigma = 0, \tag{31}$$

вполне непрерывен.

Справедливость утверждения леммы немедленно вытекает из лемм 4, 6 и полной непрерывности оператора вложения V в V_1. Действительно, $\|\overline{v}\| \le c\|Bu\|_V \le c_1\|u\|_{V_1}$.

Лемма 11. *Пусть* $\overline{H}_0 = \{\overline{u} \in \overline{H},\ L_{12}u = L_{22}\sigma\}$. *Сужение оператора* T *на* $\overline{H}_0$ *— самосопряженный оператор в смысле скалярного произведения* $(\overline{u}, \overline{\sigma})_a = (L_{11}u, v)_V + (L_{22}\tau, \sigma)_H$ *, порождающего норму, эквивалентную исходной.*

Доказательство. Система (31) может быть записана в эквивалентном виде

$$(L_{11}v, \eta)_V + (L_{12}\sigma, \eta)_V - (L_{21}v, q)_H + (L_{22}\sigma, q)_H = (Bu, \eta)_V \qquad \forall(\eta, q) \in \overline{H}.$$

Если $(\eta, q) \in \overline{H}_0$, то $(L_{12}\sigma, \eta)_V = (\sigma, L_{22}q)_H = (L_{21}v, q)_H$ и

$$(L'_{11}v, \eta)_V + (L_{22}\sigma, q)_H = (Bu, \eta)_V,$$

откуда в силу самосопряженности операторов B, L'_{11}, L_{22} и вытекает утверждение леммы.

Лемма 12. $\operatorname{Ker} T \cap \overline{H}_0 = 0$.

Доказательство. Пусть $(u, \tau) \in \operatorname{Ker} T \cap \overline{H}_0$. Тогда в силу определения оператора T имеем $(Bu, u)_V = 0$, т.е. $u = 0$, $\tau = L_{22}^{-1}L_{12}u = 0$. $\square$

Из определения оператора T вытекает

Лемма 13. *Задача* (30) *эквивалентна задаче на собственные значения для оператора* T,

$$T\overline{u} = \frac{1}{\lambda}\overline{u}, \quad \overline{u} \in \overline{H}_0.$$

Лемма 14. *Пусть выполнены условия* (29). *Тогда задача* (30) *может иметь лишь положительные собственные числа.*

Для доказательства этой леммы достаточно заметить, что для любой собственной пары задачи (30) в силу леммы 14 справедливо соотношение

$$(L'_{11}v, v)_V + (L_{22}\sigma, \sigma)_H = \lambda(Bv, v).$$

Из установленных выше свойств задачи (30) вытекает

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (28). *Задача* (23) *имеет счетное множество собственных чисел*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Каждое собственное число имеет конечную кратность. Собственные функции задачи (23) *образуют ортонормированную в смысле скалярного произведения* $(\cdot,\cdot)_a$ *полную в* H_0 *систему.*

Замечание 5. Если выполнено условие (27), то все собственные числа задачи (23) положительны.

2.2. Внутренняя аппроксимация задачи (23). Пусть V_h, H_h — семейства конечномерных подпространств, полные в V, H соответственно. Под приближенным решением задачи (23) будем понимать решение $v^h \in V_h$, $\sigma^h \in E_{0h}$ конечномерной задачи

$$a'_{11}(v^h, \eta^h) + a_{12}(\sigma^h, \eta^h) = \lambda^h b(v^h, \eta^h) \quad \forall \eta^h \in V_h, \tag{32}$$

$$a_{21}(\sigma^h, q^h) - a_{22}(\sigma^h, q^h) = 0 \quad \forall q^h \in H_h, \tag{33}$$

где формы a'_{11}, $a_{12} = a_{21}$, a_{22}, b определены равенствами (25), (10), (12), (22) соответственно.

Из общих результатов о внутренней аппроксимации задач на собственные значения при линейных ограничениях (см. [13], с. 430) следует, что оценки погрешности метода (32)–(33) непосредственно вытекают из равномерной по h положительной определенности квадратичных форм $a'_{11}(v^h, v^h)$, $a_{22}(q^h, q^h)$ и установленных выше свойств задачи (23). Точнее, справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (28), λ_i, λ_i^h *— собственные числа задач* (23), (32) – (33), *занумерованные в порядке возрастания,* E_i, E_{ih} *— соответствующие им собственные подпространства. Тогда*

$$|\lambda_i - \lambda_i^h| \leq c\varepsilon_h^2,$$

$$\theta(E_i, E_{ih}) \leq c\varepsilon_h,$$

где

$$\varepsilon_h = \sup_{(u,p)\in E_i, \|u\|_V + \|p\|_H = 1} \inf_{(v_h, q_h)\in V_h\times H_h} (\|u - v_h\|_V + \|p - q_h\|),$$

$\theta(E_i, E_{ih})$ *— раствор подпространств* E_i, E_{ih} (определение см., напр., в [12], с. 215).

Литература

1. Паймушин В.Н. *Уточненная теория устойчивости многослойных конструкций (нелинейные уравнения докритического равновесия многослойных оболочек с трансверсально-мягкими заполнителями)* // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. Сб. научн. трудов, вып. 1. – Нижний Новгород, 1993. – С. 44–56.
2. Паймушин В.Н. *К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 23. – № 2. – С. 1083–1086.
3. Иванов В.А., Паймушин В.Н. *Уточненные уравнения динамики многослойных оболочек с трансверсально-мягкими заполнителями* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1995. – № 5. – С. 142–152.
4. Муштари Х.М., Галимов К.З. *Нелинейная теория упругих оболочек.* – Казань.: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.
5. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса.* – М.: Мир. – 1981. – 408 с.
6. Красносельский М.А., Вайникко Г. М., Забрейко П.П. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.
7. Корнеев В.Г. *О дифференциальном операторе системы уравнений равновесия теории тонких оболочек* // Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела. – 1975. – № 2. – С. 89–97.
8. Карчевский М.М. *О разрешимости геометрически нелинейных задач теории тонких оболочек* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 6. – С. 30–36.
9. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.
10. Карчевский М.М., Паймушин В.Н. *О вариационных задачах теории трехслойных пологих оболочек* // Дифференц. уравнения. – 1994. – № 7. – С. 1217–1221.
11. Карчевский М.М., Шурыгина О.В. *Исследование вариационной задачи об изгибе трехслойной оболочки с трансверсально-мягким заполнителем.* – Казанск. ун-т. – Казань, 1995. – 20 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.05.95, № 921-В95.
12. Дьяконов Е.Г. *Минимизация вычислительной работы.* – М.: Наука, 1989. – 272 с.
13. Mercier B., Osborn J., Rappaz J., Raviart P.A. *Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods* // Math. Comput. – 1981. – V. 36. – № 154. – P. 427–453.

Казанский государственный университет
Казанский технический университет

Поступила
05.01.1996