Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Специальность: - Математика с дополнительной специальностью информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(дипломная работа)

«Использование компьютерной математической программы "Geogebra" при проведении уроков математики в 10-11 классах»

(на примере показательных, логарифмических и тригонометрических функций и относящимся к ним задачам)

Работа завершена:

"___"_____ 2014г. _____ (Киямова А.Р.)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц.

"___"_____ 2014г. _____ (Зарипов Ф.Ш.)

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., проф.

"___"_____ 2014 г. _____ (Игнатьев Ю.Г.)

Казань – 2014

Оглавление

Введение - 4 -

1.Методическое и компьютерное сопровождение рабочей программы по математике в 10-11 классах - 6 -

1.2 Содержание и анализ материала в различных школьных учебниках - 8 -

1.3 Основные методы решения показательных уравнений - 12 -

1.3.1 Метод решения простейших показательных уравнений - 14 -

1.3.2 Способ приведения к одному основанию - 14 -

1.3.3 Метод подстановки - 14 -

1.3.4. Метод почленного деления - 15 -

1.3.5. Способ группировки - 15 -

1.3.6. Решение нестандартных уравнений - 16 -

1.3.7. Системы показательных уравнений - 17 -

1.3.8.Упражнения - 18 -

1.4. Основные методы решения логарифмических уравнений - 19 -

1.4.1.Метод решения по определению логарифма. - 19 -

1.4.2.Метод потенциирования - 19 -

1.4.3.Метод подстановки - 20 -

1.4.4.Метод приведения к одному основанию - 20 -

1.4.5.Метод логарифмирования - 21 -

1.4.6.Методы решения систем логарифмических уравнений - 21 -

1.4.7.Упражнения - 22 -

1.5. Показательные неравенства - 22 -

1.6.Логарифмические неравенства - 23 -

1.7.1. Тригонометрические уравнения и неравенств в школьном курсе математики - 24 -

1.7. 2.Виды тригонометрических уравнений и методы их решения - 26 -

1.7. 3.Уравнения, сводящиеся к простейшим - 26 -

1.7. 4.Метод группировки - 29 -

1.7. 5.Метод решения уравнений понижением степени - 30 -

1.7. 6.Метод решения однородных уравнений и приводимых к ним - 30 -

1.7. 7.Метод подстановки - 32 -

1.7. 8.Метод решения уравнений с помощью универсальных подстановок - 33 -

1.7. 9.Метод решения уравнений выражением всех его членов через одну из тригонометрических функций - 34 -

1.7. 11.Решение нестандартных тригонометрических уравнений. - 35 -

1.7.12 Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции. - 36 -

1.7.13 Метод решения простейших уравнений. - 37 -

1.7.14.Метод введения новой переменной - 38 -

1.7.15 Метод нахождения значения тригонометрической функции от левой и правой части уравнения. - 38 -

1.7.16 Системы тригонометрических уравнений. - 39 -
1.7.17 Методы решения систем тригонометрических уравнений - 41 -
1.7.18. Метод исключения неизвестных - 41 -
1.7.19.Метод замены неизвестных - 43 -
2. Использование информационных технологии в обучении математики - 45 -
2.1. О методах дистанционного обучения математике - 48 -
2.2. Процессы информатизации современного общества и совершенствование математического образования - 45 -
2.3 Материалы для компьютерного сопровождения уроков по темам: - 50 -
Показательная функция - 50 -
Логарифмическая функция - 51 -
Показательная и логарифмическая функции как примеры взаимно обратных функций - 51 -
2.4 Материалы для компьютерного сопровождения уроков - 52 -
1. Связь тригонометрических функций с прямоугольным треугольником. - 52 -
2. Определение тригонометрических функций для произвольных углов1. - 53 -
3. Определение тригонометрических функций для произвольных углов 2. - 54 -
4. Изучение свойств тригонометрических функций, - 54 -
5. Иллюстрация оси тангенсов. - 55 -
6. Тест по тригонометрии - 55 -
Заключение - 56 -
Литература - 57 -
Приложение. Содержание учебной программы в 10-11 классах -59-

Введение

В последние годы существенно изменились условия профессиональной деятельности работников управления системой образования и учителей. Смена приоритетов в обществе усилила требования к качеству обучения молодежи и определению достигнутого уровня на каждой ступени образования. В целом реализация концепции качества сегодня обусловливает не только постоянное повышение квалификации педагогов, но и создание независимой системы оценки, обеспечивающей самооценку достижений всеми участниками образовательного процесса.

Проблема исследования состоит в совершенствовании обучения учащихся математике в современных условиях с использованием наглядных средств обучения связанных с компьютерными программами.

Цель исследования - Разработка методических и компьютерных средств, методов и демонстрационных материалов, позволяющих целенаправленно, последовательно развивать и углублять интерес к учебному предмету у школьника.

Задачи исследования:

1. Краткое описание обзора по теме исследования, с учетом рассмотрения рабочих программ по математике в 10 -11 классах.

2. Провести сравнительный анализ учебников математики X-XI классов.

3. Изучить материалы по математике на уровне старшей школы.

4. Изучить виды показательных и логарифмических уравнений и методы их решения.

5. Разработать материалы для компьютерного сопровождения уроков по темам: показательные и логарифмические функции, тригонометрия, с использованием компьютерной программы GEO GEBRA.

Объект исследования - процесс подготовки к проведению уроков при изучении разделов "Тригонометрия", показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Предмет исследования - содержание, методы, формы, средства подготовки школьников.

Актуальность: Практическое использование информационных технологий – компьютерных программ в школе способствует более глубокому усвоению теоретических положений, формированию умений применять математические знания на практике, а также развитию учебно-познавательного интереса учащихся.

При выполнении работы использовались следующие методы исследования:

1. изучение и анализ научно-методической и педагогической литературы по теме исследования;
2. изучение научно-популярной литературы;
3. изучение и обобщение опыта преподавания математики, с использованием информационных технологий;
4. анализ задачного материала;

1. Методическое и компьютерное сопровождение рабочей программы по математике в 10-11 классах

Было проведено изучение процесса разработки рабочих учебных программ на основе известных программ. Для разработки рабочей программы в 10-11 классах необходимы соблюдение следующих положений.

Пояснительная записка к составлению рабочих программ

Рабочая программа разрабатывается на основе следующих нормативных документов:

1.Закона «Об образовании» от 10 июля1992 года № 3266-1 (в последующих редакциях);

2. Федерального компонента государственного стандарта общего образования. Математика

3.Приказа МО РФ “ОБ утверждении базисного плана и примерных учебных планов для образовательных учреждений РФ, реализующих программы общего образования” от 09.03.2004 № 1312;

4.Приказа Минобрнауки России №1994 от 03.06.2011 года «О внесение изменений в федеральный базисный план».

5.Базисного учебного плана общеобразовательных учреждений Российской Федерации Приказ МО РФ от 09.02.1998. №322 “Об утверждении базисного учебного плана общеобразовательных учреждений Российской Федерации);

6.Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года (Приказ МО РФ № 393 от 11.02.2002)

распоряжения правительства РФ от 29.10.2001 № 1756 “Об одобрении Концепции модернизации российского образования на период до 2010 г.”

7.СанПиН 2.4.2.2821-10 "Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения в общеобразовательных учреждениях»

8.Устава образовательного учреждения

Цели

Изучение математики в старшей школе на базовом уровне направлено на достижение следующих целей:

1. **формирование представлений** о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;

2. **развитие** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для обучения в высшей школе по соответствующей специальности, в будущей профессиональной деятельности;

3. **овладение математическими знаниями и умениями**, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

4. **воспитание** средствами математики культуры личности: отношения к математике как части общечеловеческой культуры: знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей, понимания значимости математики для общественного прогресса.

Место предмета в базисном учебном плане

Программа рассчитана на 280 учебных часов из расчета 4 часа в неделю. При этом построение курса строится в форме последовательности тематических блоков с чередованием материала по алгебре, анализу, дискретной математике, геометрии. В программе предусмотрен резерв свободного учебного времени в объеме 30 учебных часов для реализации авторских подходов, использования разнообразных форм организации учебного процесса, внедрения современных методов обучения и педагогических технологий.

Для <u>обеспечения образовательного процесса</u> имеется:

1. оборудованный кабинет математики;
2. учебники и методические пособия для учителя;
3. дидактический и раздаточный материал (при необходимости его изготовляют на кружке информатики);
4. ТСО (мультимедийный проектор и ПК).

<u>Оценочная система</u>. Учитель работает по зачетной системе. Для того, чтобы ученику получить «зачет», необходимо :

1. выполнять все домашние задания;
2. не пропускать без уважительной причины уроки, не опаздывать на урок (в противном случае нужно пропуски и опоздания –отработать);
3. выполнить на положительную оценку все проверочные и практические работы;

4.ответить на теоретический материал.

Содержание программы приводится в приложениях.

В квалификационной работе мы уделяем больше внимание трем темам: 1) показательные уравнения и неравенства, 2)логарифмические уравнения и неравенства, 3) тригонометрия.

1.2 Содержание и анализ материала в различных школьных учебниках

Рассмотрим содержание материала изложенного в различных учебниках по математике за курс 10 – 11 класс средней школы, с целью его сравнения, анализа и формирования наиболее приемлемой методики внедрения данной темы в школьном курсе математики.

<u>Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10-11:</u>

Учебник разбит на 6 глав. Каждая глава открывается списком вопросов и задач. Затем коротко формулируются результаты, которые необходимо достичь после изучения главы. Материал, касающийся темы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» представлен в главе III «Тригонометрические функции» после изучения глав «Функции и графики» и «Производная и её применение».

Четвёртая глава «Показательная и логарифмическая функция» и пятая глава «Интеграл и его применение» не содержат обращений к области тригонометрии вообще, а в шестой главе «Уравнения и неравенства»

встречаются и тригонометрические уравнения, и тригонометрические неравенства.

Обращаясь в главе III к теме «Тригонометрические функции» М.И. Башмаков считает нужным повторить такие темы как: измерение углов; соотношения в треугольнике; вращательное движение; техника вычислений. Далее вводятся: определения и простейшие свойства тригонометрических функций; формулы приведения; значения тригонометрических функций.

Причём, здесь же вводится основное тригонометрическое тождество.

Здесь же М.И Башмаков рассматривает вопрос решения простейших тригонометрических уравнений по тригонометрической окружности.

Следующие разделы данной темы «Исследование тригонометрических функций» и «Тождественные преобразования». Лишь после этого в разделе «Решение уравнений и неравенств» вводятся различные виды уравнений и некоторые виды неравенств. И соответственно здесь же говорится о способах и методах их решения.

Схема изучения темы «Решение тригонометрические уравнений и неравенств» определяется следующим образом: функция → уравнения → преобразования.[3]

Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11:

Учебник разбит на 8 глав. В конце изучения каждой главы чётко обозначены основные результаты изучения. Курс изучения математики в 10 классе начинается с изучения главы «Тригонометрические функции». Здесь автор вводит понятия тригонометрической окружности на координатной плоскости, понятия синус и косинус, основные тригонометрические соотношения с ними связанные, решения простейших уравнений по тригонометрической окружности. Как таковые формулы приведения вводятся после изучения тригонометрических функций углового аргумента. Далее рассматриваются свойства и графики тригонометрических функций. Во второй главе «Тригонометрические уравнения» подробно рассматривается решение каждого простейшего тригонометрического

уравнения, на основе ранее введенных понятий арксинуса, арккосинуса, арктангенса. В этой же главе рассмотрены такие методы решения: разложение на множители и введение новой переменной; метод решения однородных тригонометрических уравнений. Другие методы решения рассматриваются после изучения третьей главы «Преобразование тригонометрических выражений».

Здесь схема изучения выглядит следующим образом: функция → уравнения → преобразования.

С точки зрения применения учебник Мордковича удобен для самостоятельного изучения учащимися, т.к. он содержит сильную теоретическую базу. Изложение теоретического материала ведётся очень подробно. В условиях острой нехватки часов для проведения занятий в классе возрастает значение самостоятельной работы учеников с книгой. Опираясь на учебник, учитель прекрасно разберётся в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что заставить их запомнить, а что предложить им просто прочесть дома.

К недостаткам можно отнести не очень большое количество упражнений по этой теме в самом учебнике.[10]

Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа:

Учебник содержит 4 главы. Схема изучения материала по теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» радикально отличается от предыдущих учебников, т.к. сначала рассматриваются тригонометрические функции числового аргумента и основные формулы тригонометрии. В этой же первой главе, но несколько позже, рассматриваются основные свойства тригонометрических функций, их графики и их исследование. После этого вводятся понятия арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс и «параллельно» с этим решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств. Автор не называет методов решения тригонометрических

уравнений, а описывает алгоритм их решения. Тоже касается и решения тригонометрических неравенств.

Таким образом, схема изучения выглядит так: преобразования → функции → уравнения.

Стоит отметить, что учебник содержит достаточно много дидактических материалов, как простых, так и более сложных. Это естественно обеспечивает учителю возможность варьировать задания для учащихся.

С точки зрения изложения теоретического материала нельзя сказать, что учебник идеально подходит для самостоятельного изучения.[7]

Анализ содержания набора задач в теме «Тригонометрические уравнения» приводит к следующим выводам:

1) преобладающими являются простейшие тригонометрические уравнения, решение которых основано на определениях соответствующих функций в понятиях арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа;

2) фактически отсутствуют тригонометрические уравнения, способ решения которых основан на свойстве ограниченности синуса и косинуса;

3) если говорить о связях приемов решения тригонометрических уравнений с приемами тождественных преобразований тригонометрических и алгебраических выражений, то следует отметить, что эти приемы в учебном пособии представлены бедно и однообразно. Рассматриваются приемы тождественных преобразований:

а) тригонометрические выражения:

- прием использования основного тригонометрического тождества;

- прием использования формул двойного и половинного аргументы;

- прием преобразования суммы тригонометрических выражений в произведение;

б) алгебраических выражений:

- прием разложения на множители;

- прием преобразования тригонометрического выражения, представляющего собой однородный многочлен относительно синуса и косинуса.

Использование указанных приемов приводит к тригонометрическим уравнениям, которые условно можно разделить на следующие виды:

а) сводящиеся к квадратным уравнениям относительно тригонометрической функции;

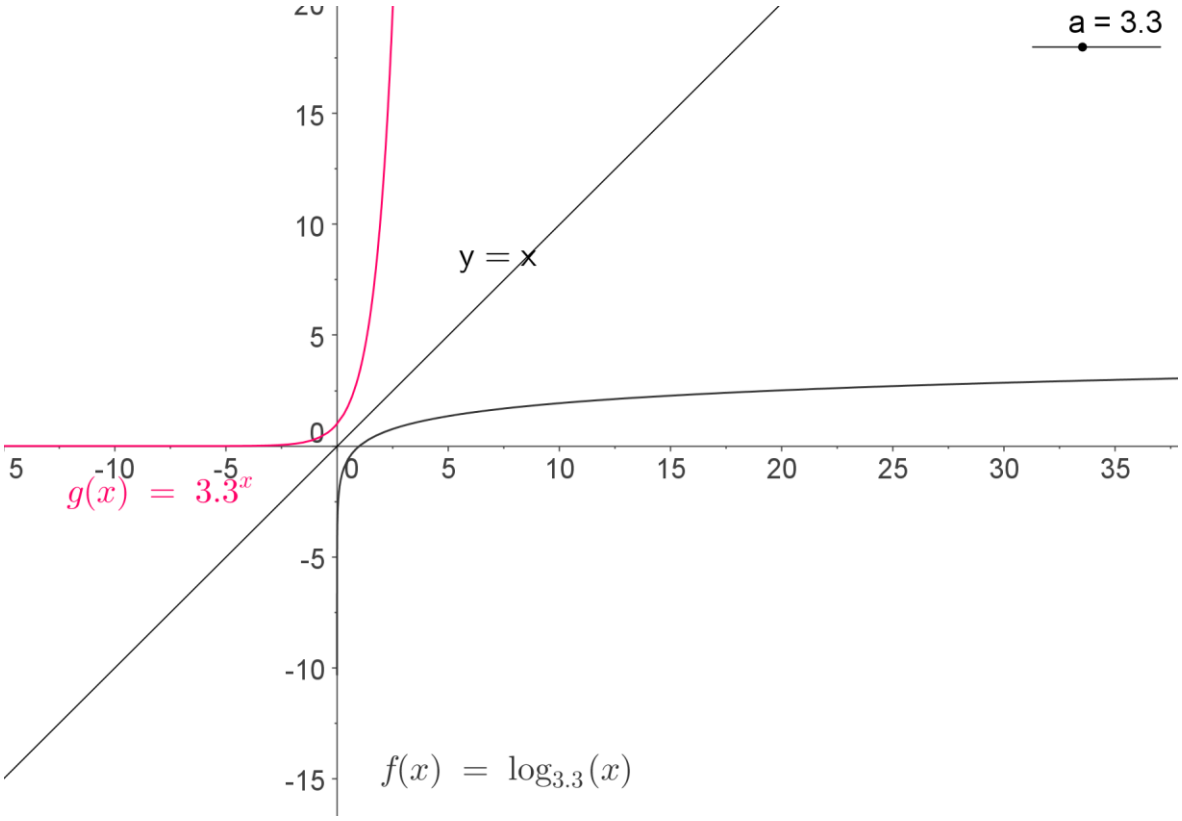
б) сводящиеся к дробно-рациональным относительно тригонометрической функции;

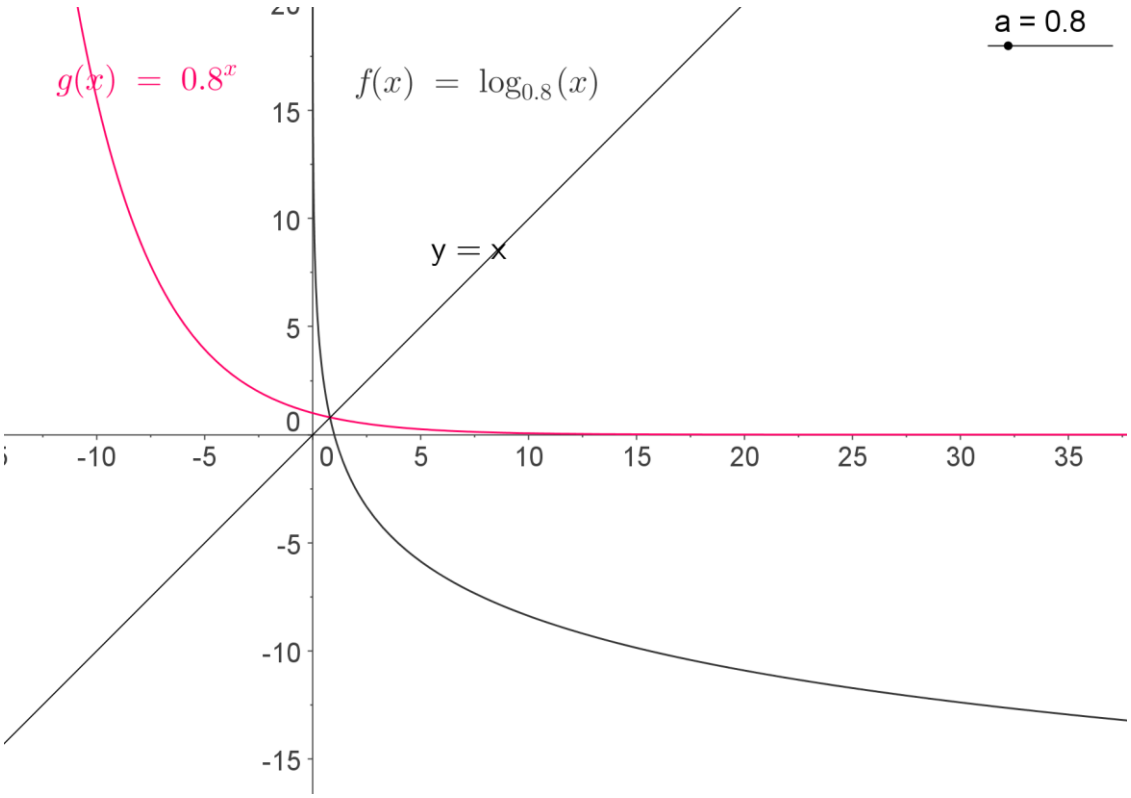
в) сводящиеся к однородным;

г) сводящиеся к виду $(f_1(x)-a_1)(f_2(x)-a_2)...(f_n(x)-a_n)=0$, где $f_i(x)$ - тригонометрическая функция $a_i \in R$. [16, с/55]

1.3 Основные методы решения показательных уравнений

До рассмотрения показательных уравнений необходимо проиллюстрировать различные графики показательной и логарифмической функции . Для этого хорошо подходит динамическая геометрическая среда Geo Gebra**.** Иллюстрация сопровождается изучением областей определения и значения этих функций. Важно подчеркнуть, что показательные и логарифмические функции являются взаимно обратными функциями.


a = 3.3
y = x
$g(x) = 3.3^x$
$f(x) = \log_{3.3}(x)$


a = 0.8
$g(x) = 0.8^x$
$f(x) = \log_{0.8}(x)$
y = x

1.3.1 Метод решения простейших показательных уравнений

Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное входит в показатель степени.

Суть метода: решаются уравнения вида $a^x = b$. *Если* $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$; *то* $x = \log_a b$.

ПРИМЕР: $4^x = 5$.

РЕШЕНИЕ: $x = \log_4 5$. Ответ: $\log_4 5$.

1.3.2 Способ приведения к одному основанию

Суть метода: способ основан на следующем свойстве степеней: если две степени равны и равны их основания, то равны и их показатели, т.е. нужно уравнение привести к виду: $a^{f1(x)} = a^{f2(x)}$, *откуда* $f_1(x) = f_2(x)$.

ПРИМЕР: Решить уравнение: $6^{2x+4} = 3^{3x}\, 2^{x+8}$.

РЕШЕНИЕ: Распишем $6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow 2^{2x+4} \cdot 3^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Перенесем члены с основанием 3 влево, с 2 –вправо:

$3^{2x+4}/3^{3x} = 2^{x+8}/2^{2x+4}$; $3^{-x+4} = 2^{-x+4}$; $(3/2)^{-x+4} = 1$;

$(3/2)^{-x+4} = (3/2)^0$. Ответ: $x = 4$.

1.3.3 Метод подстановки

Введение новой переменной обычно производится после преобразования (упрощения) членов уравнения.

ПРИМЕР: $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$

РЕШЕНИЕ: Перепишем уравнение иначе:

$(3 \cdot 5^{2x})/5 - (2 \cdot 5^x)/5 = 0{,}2$. Обозначим $5^x = t > 0$. Тогда:

$(3/5)t^2 - (2/5)t = 1/5$, т.е. $3t^2 - 2t - 1 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1/3$ (не подходит).

Итак: $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Ответ: $x = 0$.

1.3.4. Метод почленного деления

Суть метода: метод применяется для решения однородных уравнений и заключается в почленном делении трехчленного уравнения, члены которого представляют собой степени с одинаковыми показателями и разными основаниями.

ПРИМЕР: Вычислить $4^{\lg(4+x_1)\lg^{-1}4}$, если x_1 –наименьший корень уравнения $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$.

РЕШЕНИЕ: соответствующее однородное уравнение имеет вид: $6\ 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$. Разделяя обе части на 2^{2x}, получаем:

$$6 - 13 \cdot 3^x/2^x + 6 \cdot 3^{2x}/2^{2x} = 0.$$

Обозначим $(3/2)^x = t$, $t>0$. Имеем:

$$6t^2 - 13t + 6 = 0 \rightarrow t_1 = 2/3;\ t_2 = 3/2.$$

Получаем два уравнения: $(3/2)^x = 2/3$; $(3/2)^x = 3/2$.

Находим, что $x_2=1$, $x_1= -1$ (x_1 –наименьший корень). Подставляем значение $x_1= -1$, в заданное выражение $4^{\lg(4-1)\cdot\lg^{-1}4} = 4^{\lg 3/\lg 4} = 3$.

Ответ: 3.

1.3.5. Способ группировки

Суть метода: группируются отдельно степени с различными основаниями, затем почленно делятся на одну из групп. Обычно применяются для решения уравнений

вида: $b_1 a_1^{\varphi_1(x)} + \ldots b_n a_n^{\varphi_n(x)} + c_1 d_1^{f_1(x)} + \ldots + c_n d_n^{f_n(x)} = 0;$

где $a_1, \ldots, a_n$ *можно выразить как* a^{α}, *а* $c_1, \ldots, c_n$ *– через* c^{α}.

ПРИМЕР: $3 \cdot 4^x + 1/3 \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - 1/2 \cdot 3^{2x+2}$.

РЕШЕНИЕ: Преобразуем члены уравнения:

$3 \cdot 4^x + 1/3 \cdot 9^x \cdot 81 = 6 \cdot 4^x \cdot 4 - 1/2 \cdot 9^x \cdot 9$.

Теперь перегруппируем слагаемые:

$3 \cdot 4^x - 24 \cdot 4^x = -9/2 \cdot 9^x - 27 \cdot 9^x$, т.е.

$4^x (3 - 24) = 9^x (-9/2 - 27)$. Получили: $-21 \cdot 4^x = -63/2 \cdot 9^x$.

Разделим равенство на $-63/2 \cdot 9x$. Находим:

$(4/9)^x \cdot 2/3=1$, откуда: $(2/3)^{2x} \cdot 2/3=1$, $(2/3)^{2x+1}=(2/3)^0$.

Таким образом, $2x+1=0$, $2x=-1$. Ответ: $x= -1/2$.

1.3.6. Решение нестандартных уравнений

Для решения не совсем простых уравнений требуется заметить какую–то особенность исходного уравнения.

ПРИМЕР 1: Решить уравнение $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$.

РЕШЕНИЕ: Можно заметить, что

$\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = 1$, значит $\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1/\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Обозначая $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = t > 0$, получаем $1/t + t = 4$.

Т.е. $t^2 - 4t + 1 = 0$. Следовательно, $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Стало быть

$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2+\sqrt{3}$ и $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2-\sqrt{3}$, т.е. $x_1=2$, $x_2= -2$. Ответ: $x_1=2$, $x_2=-2$.

ПРИМЕР 2: Решить уравнение $x^{x+1}=x^{x^2-1}$.

РЕШЕНИЕ: Это уравнение показательно–степенное. Для нахождения его корней следует решить четыре уравнения:

1. $x + 1 = x^2 - 1$ (показатели равны)
2. $x = 1$ (основание равно единице)
3. $x = 0$ (основание равно нулю)
4. $x = -1$ (основание равно –1)

Решим первое уравнение: $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2$, $x_2= -1$. Проверка: $x_1=2$, тогда $2^3=2^3$ –верно;

$x_2=-1$, тогда $(-1)^0=(-1)^0$ –верно;

$x_3=1$, тогда $1^2=1^0$ –верно;

$x_4=0$, тогда $0^1=0^{-1}$ –не имеет смысла.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

ПРИМЕР 3: Определить, сколько корней имеет уравнение $(3/5)^x + 7/5 = 2^x$.

РЕШЕНИЕ: Можно заметить, что при подстановке

$x=1$ получается $3/5 + 7/5 = 2$, т.е. $x =1$ – корень уравнения. Найдем, есть ли другие корни.

Функция 2^x –возрастающая, функция $(3/5)^x$ –убывающая, откуда следует:

а). если x>1, то 2^x >2, $(3/5)^x$ <3/5, $(3/5)^x$+7/5<2, значит среди чисел x>1 корней нет.

б). если x<1, то 2^x<2, $(3/5)^x$ >3/5, $(3/5)^x$+7/5>2. Среди чисел x<1корней нет.

Ответ: уравнение имеет один корень x=1.

1.3.7. Системы показательных уравнений

При решении систем показательных уравнений используются приемы решения систем уравнений и методы решения показательных уравнений.

ПРИМЕР 1: Решить систему

$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^{y} = 725, \\ 3^{x} - 2^{y/2} = 25. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Введем новые переменные t и z,

положив $3^x = t > 0$; $2^{y/2} = z > 0$, получаем

$$\begin{cases} t^2 - z^2 = 725, \\ t - z = 25, \end{cases} \quad \textit{т.е} \quad \begin{cases} (t - z)(t + z) = 725, \\ t - z = 25. \end{cases}$$

Отсюда имеем: $\begin{cases} t - z = 25, \\ t + z = 29. \end{cases}$

Сложив почленно уравнения, имеем: 2t=54, t=27. Значит z=2. Возвращаемся к переменным x и y: $3^x=27 \Rightarrow x=3$; $2^{y/2}=2 \Rightarrow y=2$. Ответ: x=3, y=2.

ПРИМЕР 2: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Уравняем основания в обоих уравнениях:

$$\begin{cases} 2^{6x+3} = 2^{5+4y-1}, \\ 5^{1+x-y} = 5^{2y+1}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\begin{cases} 6x - 4y = 1, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$

Второе уравнение x=3y подставляем в первое и получаем 6·3y–4y=1, т.е. 14y=1, следовательно, y=1/14, и x=3/14. Ответ: (3/14; 1/14).

1.3.8. *Упражнения*

I. Решить уравнения

1. $7^x(\sqrt{2})^{2x^2-6} - (7/4)^x = 0$, (–3;1).
2. $3^x+4^x = 5^x$, (2). (подбором находятся x=2, затем доказывается, что это единственный корень уравнения).
3. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = 4/(2-\sqrt{2})$, $(1;1-\sqrt{2};1+\sqrt{2})$.
4. $2^{|3x-5|} = 4\cdot 8^{|x-1|}$, (–∞;1].

II. Решить системы уравнений

1. $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y. \end{cases}$ $(1/2, \sqrt{2}/5)$

2. $\begin{cases} (2^{x+y})^{x^2-xy-8} = 1, \\ (0,37^{x-y})^{x^2+xy-16+2x} = 1. \end{cases}$ ((0,0), (8,-8), (3,1/3), (-4,-2))

3. $\begin{cases} (2^{x+1} - 3)y^{-1}=1; \\ \sqrt{3+y^2} = x+y. \end{cases}$ (1 , 1)

1.4. Решение логарифмических уравнений и систем

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма.

Логарифмом числа b (b>0) по основанию a (a>0, a≠1) называется показатель степени x, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. из $a^x=b$ следует $x = \log_a b$ и наоборот.

Основные формулы:

1. $\log_a b=x \Leftrightarrow b=a^x$, a>0, a≠1, b>0;
2. $\log_a a=1$;
3. $\log_a 1=0$;
4. $\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1\cdot x_2)$, $x_1>0$, $x_2>0$;
5. $\log_a x_1-\log_a x_2=\log_a(x_1/x_2)$, $x_1>0$, $x_2>0$;

6. $\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x$;

7. формула перехода к логарифму по основанию с (c>0, c≠1): $\log_a b = \log_c b / \log_c a$;

8. $\log_a b = 1/\log_b a$;

9. $\log_a b = \log_{a\alpha} b^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$;

10.формула записи числа через логарифм: $c = \log_a a^c$;

11.основное логарифмическое тождество: $c = a^{\log_a c}$;

12.$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x) > 0$;

13. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

1.4.1.Метод решения по определению логарифма.

Этим методом решаются простейшие уравнения вида: $\log_a x = b$.

ПРИМЕР. Найти произведение корней уравнения: $\log_3 x(x-2)=1$.

РЕШЕНИЕ. по определению логарифма: $x(x-2)=3^1$.

$x^2 - 2x - 3 = 0$. По теореме Виета произведение корней этого уравнения равно –3.

1.4.2.Метод потенциирования

Суть метода: с помощью формул (1–13) уравнение приводится к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Это уравнение (при a>0, a≠1) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \ g(x) > 0; \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

ПРИМЕР. Решить уравнение $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$

РЕШЕНИЕ. ОДЗ: $3^x - 5^{2-x} > 0$; $15^x - 5^2 > 0$; $15^x > 25$; $x > \log_{15} 25$.

Используя формулы (6) и (10), получим

$$\log_5 2^3 + \log_5 5^2 - \log_5 5^x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$$

Из формул (4) и (5): $\log_5(8 \cdot 25/5^x) = \log_5(3^x - 5^{2-x})$.

Потенцируем:

$$\begin{cases} 8\cdot 25/5^x > 0, \\ 3^x - 5^{2-x} > 0, \\ 8\cdot 25/5^x = 3^x - 5^{2-x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x > \log_{15} 25, \\ 200 = 15^x - 25; \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем ответ: x =2.

1.4.3.Метод подстановки

Суть метода: ищем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначаем новой переменной, тем самым, упрощая вид уравнения. Обычно замену производят после некоторых преобразований заданного уравнения.

ПРИМЕР. Найти среднее геометрическое корней уравнения $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x=4$.

РЕШЕНИЕ. ОДЗ: x>0.

Используя формулы (2), (4), (8) и (6), запишем уравнение следующим образом:

$(\log_x 9+\log_x x^2)\cdot\log_3^2 x=4$, т.е. $(2\log_x 3+2)\cdot 2\ (\log_3 x)=4$

Заменим $\log_3 x=t$.Тогда $(2/t+2)\cdot t^2=4$, $t^2+t-2 = 0 \Rightarrow t_1= -2,\ t_2=1$.

Поэтому $\log_3 x= -2$ и $\log_3 x=1$. Отсюда: $x_1=3^{-2},\ x_2=3$

Ответ : $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{(3^{-2}3)} = \sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3}$.

1.4.4.Метод приведения к одному основанию

Суть метода: с помощью формул (7–9) все члены уравнения приводятся к одному основанию. Этот метод работает совместно с методом подстановки.

ПРИМЕР. Решите уравнение

$\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$

РЕШЕНИЕ. ОДЗ: x>0. Перейдем к основанию 2

$\log_2 x+\log_{4^{1/2}} x^{1/2}+\log_2 x^{1/3} =11$,

т.е. $\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x =11$

Обозначим $\log_2 x = t$, получим $t+(\frac{1}{2})t +(\frac{1}{3})t =11 \Rightarrow t = 6$

Значит $\log_2 x= 6$, $x=2^6=64$. Ответ: x=64

1.4.5.Метод логарифмирования

Суть метода: логарифмируют уравнения вида

$f_1(x)^{f2(x)} = f_3(x)^{f4(x)}$*, основанием логарифма выбирают выражение, приводящее к упрощению записи логарифма.*

ПРИМЕР. Найти наименьший корень уравнения

$x^{(\lg x+5)/3} = 10^{5+\lg x}$, $x>0$.

РЕШЕНИЕ. Прологарифмируем уравнение по основанию 10:

$\lg(x^{(\lg x+5)/3}) = \lg 10^{5+\lg x}$, т.е. (см. формулу 6)

$(\lg x+5)/3\cdot\lg x = (5+\lg x)\cdot\lg 10$.

Обозначим $\lg x=t$, тогда $(t+5)\cdot t/3=5+t$, $t^2+2t-15=0$. Корни последнего уравнения $t_1= -5$, $t_2=3$.

Функция $t = \lg x$ возрастающая, следовательно, из $t_1<t_2$ вытекает, что $x_1<x_2$. Т.о. получаем $x_1=10^{-5}$ – наименьший корень. Ответ : $x=10^{-5}$.

1.4.6.Методы решения систем логарифмических уравнений

При решении систем логарифмических уравнений используются приемы решения систем уравнений и методы решения логарифмических уравнений

ПРИМЕР. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} xy = 8, \\ \log_3(\log_{1/9} x/y) = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. ОДЗ:$x>0$, $x\neq1$, $y>0$, $y\neq0$, $y>x$.

По определению логарифма имеем

$$\begin{cases} xy = x^4, \\ \log_{1/9} x/y = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3, \\ y = 9x, \end{cases}$$

Отнимем из 1–ого уравнения 2–ое, получим $x^3-9x=0$,

отсюда $x_1=0$, $x_{2,3}= \pm3$. С учетом ОДЗ подходит только $x=3$. , тогда $y=27$. Ответ: $x=3$, $y=27$.

1.4.7. Упражнения

I. Решите уравнения

1. $\log_2 x - \log_{1/2}(x-1) = 1 + \log_4 9$ (3)

2. $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0{,}5$ ($^1/_3$, 9)

3. $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3 (x-4)^2 = 0$ (3, $3+\sqrt{2}$)

4. $\log_3(3x-5) = 2-x$ (2)

II. Вычислите:

1. $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$ (1)

2. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$ (24)

III. Если k – число корней уравнения

$\log_{x+2}(2x^2+2x+1) = 2$,

а x_0 – его положительный корень, то чему равно значение выражения $(4k-1)/x_0$. (1)

IV. Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} \log_2 \sin x + \log_2 \sin y = -2, \\ \log_3 \cos x + \log_3 \cos y = 1 - \log_3 4. \end{cases}$

($^{\pi}/_6 + 2\pi k$, $^{\pi}/_6 + 2\pi n$)

2. $\begin{cases} xy^2 = 32, \\ 2(\log_{1/4} x - 2\log_x 2y) = -5 \end{cases}$

<u>1.5. Показательные неравенства</u>

1) Находим ОДЗ.

2) С помощью методов решения показательных уравнений, показательное неравенство сводим к простейшему виду: $a^{f(x)} > b$; $(a^{f(x)} < b)$.

3) Записываем полученное неравенство в виде:

$a^{f(x)} > a^{\log ab}$ $(a^{f(x)} < a^{\log ab})$,

Делаем выводы:

а). если $a>1$, *то* $f(x) > \log_a b$ $(f(x) < \log_a b)$, *решаем это неравенство;*

б). если $0<a<1$, *то* $f(x) < \log_a b$ $(f(x) > \log_a b)$, *решаем это неравенство.*

4) С учетом ОДЗ записываем ответ.

ПРИМЕР: Найти наибольшее целое решение неравенства:

$2^{x+2}-2^{x+3}+5^{x+2}<5^{x+1}+16\cdot 2^{x}$.

Решение: ОДЗ: $x\in R$.

Приведем неравенство к виду $a^{f(x)}>b$. Для этого сгруппируем выражения с разными основаниями в левой и правой частях:

$2^{x}\cdot 2^{2}-2^{x}\cdot 2^{3}-2^{x}\cdot 16 < 5^{x}\cdot 5-5^{x}\cdot 5^{2}$,

т.е. $2^{x}(4-8-16) < 5^{x}(5-25)$, $2^{x}(-20) < 5^{x}(-20)$

Сократим неравенство на (–20) (т.к. –20<0, меняем знак неравенства). $2^{x} > 5^{x}$ или $2^{x}/5^{x} >1$.

Получили простейшее неравенство: $(2/5)^{x} >1$ или $(2/5)^{x} <(2/5)^{0}$. $2/5<1$, следовательно $x<0$. Наибольшим целым решением будет

$x= -1$. Ответ: –1.

1.6Логарифмические неравенства

Алгоритм решения:1) Находим ОДЗ,

2) С помощью методов решения логарифмических уравнений (см. тема «Решение логарифмических уравнений и их систем») логарифмическое неравенство сводится к простейшему виду:

$\log_a f(x)>b$ $(\log_a f(x)<b$.

3)Полученное неравенство записываем в виде :

$\log_a f(x)>\log_a a^b$ $(\log_a f(x)<\log_a a^b)$ *и решаем:*

а). если $a>1$, то неравенство $f(x)>a^{b}$ $(f(x)>a^b)$;

б). если $0<a<1$, то неравенство $f(x)<a^b$ $(f(x)>a^b)$.

4) С учетом ОДЗ записываем ответ.

ПРИМЕР: Найти сколько целых решений имеет неравенство: $\log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2\le 0$

Решение: ОДЗ: $x>0$. Обозначим $\log_{0,5}x = t$. Тогда имеем:

$t^2+ t - 2 \le 0$; $(t + 2)(t - 1) \le 0$; $1\ge t\ge -2$;

$\begin{cases}\log_{0.5}x \ge -2;\\ \log_{0,5}x \le 1,\end{cases}$ Отсюда получаем: $\begin{cases}x \le (1.2)^{-2},\\ x \ge 1/2.\end{cases}$

С учетом ОДЗ, $x \in [1/2;4]$. Этому промежутку принадлежит четыре (1;2;3;4) целочисленных решения данного неравенства.

Ответ: 4.

<u>Пример.</u> Решить неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

<u>Решение.</u> Большинство ошибок при решении данного неравенства связано с тем, что абитуриенты забывают о необходимости рассмотрения двух случаев: когда основание логарифма больше единицы, и когда основание больше нуля, но меньше единицы.

Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 2x+3>1, \\ x^2<2x+3, \\ x^2>0, \end{cases} \quad \begin{cases} 0<2x+3<1, \\ x^2>2x+3, \end{cases}$$

Предлагаем Вам самостоятельно решить эти системы. Решением первой системы является множество $x \in (-1;0) \cup (0;3)$, второй системы — множество $x \in (-3/2;-1)$. Решением исходного неравенства является объединение этих множеств . Ответ: $x \in (-3/2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;3)$.

1.7.1 Тригонометрические уравнения и неравенства в школьном курсе математики

Изучению темы «Решение тригонометрических уравнений» часто предшествует изучение таких тем как «Преобразование тригонометрических выражений» и «Основные свойства и графики тригонометрических функций». В разделе «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» мы знакомим учащихся с понятиями арксинус, арккосинус, арктангенс.

Опыт преподавания математики показывает, что осознание важности изучаемого материала приходит к ученикам не в процессе его изучения, а в процессе его применения при решении других заданий, т.е. тогда когда он становится средством для решения других задач.

Так, например, решение уравнения $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 1$, сводится к простейшему уравнению $\cos x = 1$, причём частному виду простейшего, после элементарного преобразования выражения, стоящего в левой части уравнения по формулам сложения косинуса. Аналогичная ситуация может возникнуть и при решении тригонометрических неравенств. Неравенства вида $tgx < \dfrac{tg\dfrac{\pi}{15} + tg\dfrac{4\pi}{15}}{1 - tg\dfrac{\pi}{15} tg\dfrac{4\pi}{15}}$, в принципе становится решаемым только после преобразования выражения стоящего в правой части неравенства. Получим, $tgx < tg\dfrac{\pi}{3}$, а затем с помощью таблицы значений основных тригонометрических функций имеем простое неравенство $tgx < \sqrt{3}$, решение которого не должно вызвать затруднений у учащихся.

Мы видим, что именно здесь школьники могут наблюдать пользу от изучения формул тригонометрии. С их помощью, не решаемое, на первый взгляд, уравнение или неравенство принимает достаточно простой вид. Примерно, то же самое происходит и при решении тригонометрических неравенств.

При таком подходе изучения тригонометрии, когда уравнения и неравенства изучаются после формул преобразования тригонометрических выражений, место тригонометрических уравнений и неравенств определяется через систематизацию знаний по темам «Преобразование тригонометрических выражений» и «Основные свойства и графики тригонометрических функций».

Если же тригонометрические уравнения и неравенства изучаются до темы «Преобразование тригонометрических выражений», то здесь место их изучения определяется совершенно противоположным образом. Здесь на изучение тригонометрических уравнений отводится больше времени: как только появляется новая формула, она сразу же используется для решения уравнений или неравенств. То есть в данном случае не формула

преобразования является средством для решения тригонометрического уравнения или неравенства, а уравнение выступает как средство закрепления тригонометрических формул.

Таким образом, при любом подходе к изучению тригонометрии, роль изучения уравнений и неравенств неизмеримо велика, не зависимо от места их изучения. Ну и как следствие из этого велико и неизмеримо место изучения методов решения и тригонометрических уравнений и тригонометрических неравенств. Т.к. авторы учебников не уделяют должного внимания обозначению методов решения тригонометрических уравнений и неравенств, попробуем классифицировать уравнения и неравенства, и соответственно методы их решения.

1.7. 2.Виды тригонометрических уравнений и методы их решения

Материал, относящийся к тригонометрии, изучается не единым блоком, учащиеся не представляют себе весь спектр применения тригонометрического материала, дробление на отдельные темы приводит к тому, что тригонометрия изучается в течение нескольких лет.

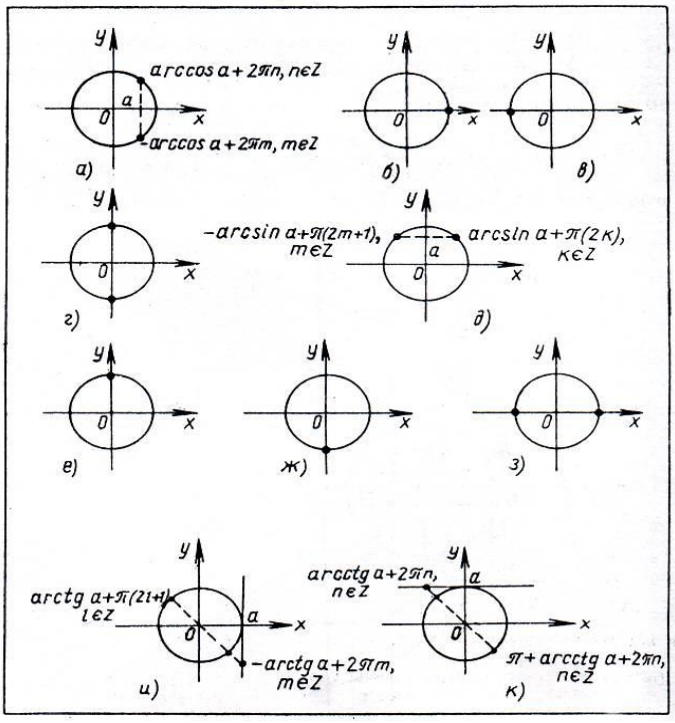
Необходимость классификации уравнений и неравенств вызывается невозможностью найти общий метод их решения. Очевидно, что классифицировать тригонометрические уравнения и неравенства имеет смысл с опорой на методы их решения. Мы будем рассматривать типы уравнений и неравенств в той последовательности, которая представляется нам наиболее приемлемой для обучения школьников, то есть в последовательности, построенной в соответствии с принципом «от простого к сложному».

1.7. 3.Уравнения, сводящиеся к простейшим

Практически все тригонометрические уравнения считаются «сводящимися к простейшим», но можно выделить ряд уравнений которые сводятся к простейшим достаточно просто. Рассмотрим сначала виды простейших уравнений.

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$.

На эти уравнения следует обратить особое внимание, так как без умения их решать невозможно решить никакое другое тригонометрическое уравнение. Лучше всего, если учащиеся будут иметь схемы решения каждого из простейших уравнений.



Уравнение вида $\cos x = a$.

Если $|a > 1|$, то $x \in Q$

Если $|a \le 1|$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$ (рис 1, а)

Особые случаи:

$\cos x = 1$;

$x = 2\pi\kappa, \kappa \in Z (рис 1, б)$

$\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi\kappa, \kappa \in Z (рис 1, в)$

$\cos x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z (рис 1, г)$

Любая из этих формул может быть заменена формулой общего вида, однако они проще и их выгоднее применять при решении уравнений.

Полезно помнить, что при $a \in [-1;1]$

$0 \le \arccos a \le \pi$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$; $\cos(\arccos a) = a$.

Уравнение вида $\sin x = a$.

Если $|a > 1|$, то $x \in Q$

Если $|a \le 1|$, то $x = (-1)^n \arccos a + \pi n, n \in Z$ (рис 1, д)

Особые случаи:

$\sin x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z (рис 1, е)$

$\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z (рис 1, ж)$

$\sin x = 0$; $x = \pi m, m \in Z (рис 1, з)$

Нужно помнить, что при $a \in [-1;1]$ $-\frac{\pi}{2} \le \arccos a \le \frac{\pi}{2}$;

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$;

$\arccos a + \arcsin a = \frac{\pi}{2}$.

Уравнение вида $tgx = a$.

$x = arctga + \pi n, n \in Z$ (рис 1, и)

Нужно помнить, что при $a \in [-1;1]$ $-\frac{\pi}{2} < arctga < \frac{\pi}{2}$; $arctg(-a) = -arctga$;

$tg(arctga) = a$

Уравнение вида $ctgx = a$.

$x = arctga + \pi n, n \in Z$ (рис 1, к)

Нужно помнить, что при $a \in [-1;1]$ $0 < arctga < \pi$; $arcctg(-a) = \pi - arcctga$;

$ctg(arcctga) = a$; $arctga + arcctga = \frac{\pi}{2}$

Уравнения, сводящиеся к простейшим, имеют вид $\sin f(x) = a$, $\cos f(x) = a$, $tgf(x) = a$, $ctgf(x) = a$.

Данные уравнения также являются простейшими и решаются сначала относительно f(x), а затем полученные уравнения решаются относительно x.

Примеры:

1. $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$;

$\frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})=1;$$

2. $x+\frac{\pi}{3}=2\pi k, k\in Z;$

$$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z.$$

3. $tg(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{3};$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+\pi n;$$

$$2x=\frac{5\pi}{12}+\pi n;$$

$$x=\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$$

1.7. 4.Метод группировки

Суть метода: путем группировки слагаемых уравнения приводятся к виду, когда левая часть раскладывается на множители, а правая равна нулю.

ПРИМЕР: Сколько корней имеет уравнение $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$ на промежутке $[0;\pi]$.

РЕШЕНИЕ: Сгруппируем члены уравнения

$$(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=(1+\cos 2x)+\cos x$$

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x$$

$$\sin 2x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1)$$

$$(\sin 2x-\cos x)(2\cos x+1)=0$$

$$\cos x(2\sin x-1)(2\cos x+1)=0$$

Получим три простейших уравнения:

$$\cos x=0; x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$2\sin x-1=0; x_2=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in Z$$

$$2\cos x+1=0; x_3=\pm 2\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$$

Промежутку [0;π] принадлежат следующие решения: $\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}$..

Итого их четыре. Ответ: 4.

1.7. 5.Метод решения уравнений понижением степени

Суть метода: им решаются уравнения, содержащие функции во второй степени, с использованием формул понижения степени.

ПРИМЕР: Найти наименьший корень уравнения $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$ на интервале (0;π).

РЕШЕНИЕ: Воспользуемся формулой

$\sin^2 \alpha = \frac{(1-\cos 2\alpha)}{2}$, получаем

$$\frac{(1-\cos 6x)}{2} + \frac{(1-\cos 8x)}{2} = \frac{(1-\cos 10x)}{2} + \frac{(1-\cos 12x)}{2}$$

$$2 - \cos 6x - \cos 8x = 2 - \cos 10x - \cos 12x$$

$$\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$$

Воспользуемся методом группировки

$$(\cos 6x + \cos 8x) - (\cos 10x + \cos 12x) = 0$$

$$2\cos x \cos 7x - 2\cos 10x \cos 11x = 0$$

$$2\cos x(\cos 7x - \cos 11x) = 0$$

$$2\cos x \sin 2x \sin 9x = 0$$

$$\cos x = 0; x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$\sin 2x = 0; x_2 = \frac{\pi l}{2}; l \in Z.$$

$$\sin 9x = 0; x_3 = \frac{\pi k}{9}; k \in Z.$$

Наименьший корень, принадлежащий интервалу (0;π), это $\frac{\pi}{9}$.

Ответ: $\frac{\pi}{9}$.

1.7. 6.Метод решения однородных уравнений и приводимых к ним

Однородные тригонометрические уравнения – это уравнения вида:

$$a\cos x + b\sin x = 0,$$

$$a\cos^2 x + b\cos x \sin x + c\sin^2 x = 0,$$

$$a\cos^3 x + b\sin^2 x \cos x + c\sin x \cos^2 x + d\sin^3 x = 0,$$

Т.е. те, степени членов которых равны.

Если уравнение неоднородное, т.е. в левой его части какое-то число c, то его всегда можно привести к однородному путем замены числа с на произведение. Например, приведем неоднородное уравнение $a\sin x + b\cos x = c,$ к однородному.

Заменим число *c*:

$$a\sin(\frac{2x}{2}) + b\cos(\frac{2x}{2}) = c(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}),$$

$$a\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + 2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - c\cos^2\frac{x}{2} - c\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

Получим однородное уравнение:

$$(a-c)\cos^2\frac{x}{2} + 2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - (a+c)\sin^2\frac{x}{2} = 0.$$

Рассмотрим, как решаются однородные уравнения. Чтобы решить однородное тригонометрическое уравнение, его нужно разделить на *cosx* наибольшей степени, содержащейся в уравнении. При этом проверяется, не является ли cosx = 0 корнем уравнения.

ПРИМЕР:

Решить уравнение: $\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$

РЕШЕНИЕ: Разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0$, получим:

$tg^2x - 2tgx - 3 = 0,$ отсюда

$$tgx_1 = 3; tgx_2 = -1$$

Проверим, не является ли $\cos x = 0$ корнем уравнения, подставим это значение в уравнение, получим: 1=0, т.е. $\cos x = 0$ не является корнем.

Ответ: $x_1 = arctg3 + \pi n, n \in Z; x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

1.7. 7.Метод подстановки

Как и другие виды уравнений, тригонометрические уравнения могут решаться подстановкой. Существует два вида подстановок:

-подстановки выражений в тригонометрических функциях, для упрощения записи;

-подстановки, сводящие тригонометрические уравнения к алгебраическим.

Рассмотрим первый вид подстановок на примере.

ПРИМЕР:

Решить уравнение: $2\sin^2(4x-\pi)+\sin^2(4x+\pi)=1$

РЕШЕНИЕ: Делая подстановку $t=4x-\pi$ $\left(x=\frac{(\pi+t)}{4}\right)$, получим

$$2\sin^2 t + \sin^2(t+2\pi)=1$$

$$2\sin^2 t + \sin^2 t =1$$

$$3\sin^2 t=1$$

$$\sin t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t=\pm(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n,\ n\in Z.$$

$$x=\frac{\left(\pm(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi(n+1)\right)}{4},\ n\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\left(\pm(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi(n+1)\right)}{4},\ n\in Z$.

Теперь рассмотрим подстановки, сводящие тригонометрические уравнения к алгебраическим. В этом методе используются так называемые «универсальные» подстановки

1.7.8.Метод решения уравнений с помощью универсальных подстановок

Универсальные подстановки

Замена	Виды решаемого уравнения	Выраженные другие члены уравнений
t = sinx+cosx	a(sinx+cosx)+ +bsin2x+c= 0	sin2x=$(\sin x+\cos x)^2$-1, т.е. sin2x=t^2-1
t =sinx-cosx	a(sinx-cosx)+ +bsin2x+ c=0	sin2x=$(\sin x-\cos x)^2$-1, т.е. sin2x=t^2-1
t =cosx	$a\cos^m 2x+b\cos^{2n}x$ $+c\sin^{2k}x+d=0$, $k,n,m\in z$	$\sin^{2k}x=(\frac{(1-\cos 2x)}{2})^k$, т.е. $\sin^{2k}x=(\frac{(1-t)}{2})^k$; $\cos^{2n}x=(\frac{(1+t)}{2})^n$ (используются формулы понижения степени)
$t=\mathrm{tg}\ x\frac{x}{2}$ (или t=tgx), при этом $x\neq\pi+2\pi k$ (после решения уравнения, проверяется является ли $x=\pi+2\pi k$ корнем или нет).	acosx+bsinx+c=0	$\sin x=\frac{2t}{(1+t^2)}$; $\cos x = =(1-t^2)/(1+t^2)$ (используются формулы для функций кратного аргумента)

ПРИМЕР: Решить уравнение 3sinx - 4cosx=5

РЕШЕНИЕ: Воспользуемся универсальной подстановкой $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t.$

Получим:

$6t/(t^2+1) - \frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)} = 5$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$t = 3;\ tg\frac{x}{2} = 3;\ x = 2arctg3 + 2\pi k,\ k \in Z.$

Проверяем, не является ли $x=\pi+2\pi k$ корнем уравнения, подставим в исходное уравнение: $3\sin(\pi+2\pi n) - 4\cos(\pi+2\pi n) = 4 \neq 5$, т.е. $x=\pi+2\pi k$ не является решением уравнения.

Ответ: $x=2arctg3+2\pi k,\ k \in z$

1.7. 9.Метод решения уравнений выражением всех его членов через одну из тригонометрических функций

Суть метода заключается в том, что все тригонометрические функции, которые входят в уравнение, выражают через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, зависящую от одного и того же аргумента.

ПРИМЕР:

Решить уравнение: $4\sin^4 x - 2\sin^2 x \cos x + 4\cos 2x = 2\cos^3 x - \sin^2 2x + 2$

РЕШЕНИЕ: Перейдем к функции *cosx :*

$4(1-\cos^2 x)^2 - 2(1-\cos^2 x)\cos x + 4(2\cos^2 x - 1) = 2\cos^3 x - 4\cos^2 x(1-\cos^2 x) + 2 = 0$

Сделаем подстановку $\cos x = t$ ($|t|<1$), раскрыв скобки, получим:

$4-8t^2-4t^4-2t+2t^3+8t^2-4-2t^3-4t^2-4t^4-2=0$, или:

$4t^2-2t-2=0$, отсюда $t_1=1,\ t_2=-\frac{1}{2}$, т.е. $x_1=2\pi k,\ k \in z;\ x_2=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\{x_1=2\pi k;\ x_2=\frac{2\pi}{3}+2\pi n\};\ k,n \in Z.$

1.7. 10.Введение вспомогательного угла

Суть метода: преобразование уравнения вида

$a\cos bx \pm c\sin bx = d$ ($d>0,\ c>0,\ a \neq 0$) в простейшее, путем следующих преобразований:

1. деление уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$

2. $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right); \cos bx \pm \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right); \sin bx = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3.введение острого вспомогательного угла φ, положив: $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (такой угол существует, т.к. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$);

4. преобразование уравнения: $\cos\varphi \cos bx \pm \sin\varphi \sin bx = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$, в простейшее с помощью формул сложения.

ПРИМЕР:

Решить уравнение: 3sinx-4cosx=5.

$Решение: \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5;$

$3\sin\frac{x}{5} - 4\cos\frac{x}{5} = 1;\ \sin\varphi = \frac{3}{5};\ \cos\varphi = \frac{4}{5};\ (\varphi = \arccos\frac{4}{5})$

$\sin\varphi \sin x - \cos\varphi \cos x = 1;\ -\cos(\varphi + x) = 1;\ \cos(\varphi + x) = -1;$

$\varphi + x = -\pi + 2\pi n;$

Ответ: $x = -\pi - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi n,\ n \in Z.$

1.7. 11.Решение нестандартных тригонометрических уравнений.

Суть метода: уравнения решаются путем оценки их левых и правых частей. Решение таких уравнений основывается на неравенствах $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$.

Кроме этого также могут оказаться полезными следующие неравенства:

$\cos^{2k}x \le \cos^2 x$; $\sin^{2n}x \le \sin^2 x$, где $x \in R$, $n,k \in N$.

Сложив последние неравенства, получим $\cos^{2k}x + \sin^{2n}x \le 1$. (неравенство превращается в равенство при $x = \pi m/2$, $m \in z$.)

ПРИМЕР: Сколько корней имеет уравнение: $\sin^2 5x + 1 = \cos^2 3x$, на промежутке $(-\pi; 2\pi]$?

РЕШЕНИЕ: $\sin^2 5x + 1 - \cos^2 3x = 0$; $\sin^2 5x + \sin^2 3x = 0$

$\sin^2 5x \ge 0$, $\sin^2 3x \ge 0$,

следовательно, сумма равна нулю, только тогда, когда оба слагаемых равны нулю, т.е. уравнение можно свести к системе:

$$\begin{cases}\sin^2 5x = 0,\\ \sin^2 3x = 0,\end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{5}, \cdots n \in Z,\\ x = \dfrac{\pi\kappa}{3}, \ldots \kappa \in Z.\end{cases}$$

Приравнивая, получаем: $\dfrac{\pi n}{5} = \dfrac{\pi\kappa}{3}$ или 5k =3n $\Rightarrow k = \dfrac{3n}{5}$, $k \in Z$.

Введем новую переменную l: x = πl, тогда $\begin{cases} k = 3l \\ n = 5l \end{cases}$, $l \in Z$

Возможны следующие случаи: a) l = -1, x= -π; b) l = 0, x = 0; c) l = 1, x= π; l =2, x=2π. Ответ: 0, π, 2π∈(-π;2π], следовательно, на промежутке уравнение имеет три корня.

Упражнения:

I. Решить уравнения

1. $\cos\dfrac{4x}{2}$ - $\sin\dfrac{4x}{2}$ = sin2x; ($\dfrac{\pi}{2}+\pi n$; $(-1)^m \dfrac{\pi}{6}+\pi$);

2. 3sinx-cosx=1; ($\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}+\pi k, k \in Z$);

3. sinxcosx-$\cos^2$x=1; ($\varnothing$);

4. 3sin5z - 2cos5z = 3; ($\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi k}{5}$; $\dfrac{2}{5}$arctg5+$\dfrac{2\pi n}{5}$).

II. Сколько корней имеет уравнение

$2\cos^2 x+5\sin x-4=0$, на промежутке (-π/2;π/2].

1.7.12 Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

Обратные тригонометрические функции это функции вида y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx.

При решении уравнений, используют определения обратных тригонометрических функций:

1. arcsinα=α, если sinα=a, $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$;
2. arccosα=α,если cosα=a, $\alpha \in (0;\pi)$;
3. arctgα=α, если tgα=a, $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$;
4. arcctgα=α,если ctgα=a, $\alpha \in (0;\pi)$,

и формулы:

1. $\arcsin(-\alpha) = -\arcsin\alpha$;
2. $\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha$;
3. $\mathrm{arctg}(-\alpha) = -\mathrm{arctg}\alpha$;
4. $\mathrm{arcctg}(-\alpha) = \pi - \mathrm{arcctg}\alpha$;
5. $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$;
6. $\sin(\arcsin\alpha) = \alpha$;
7. $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$;
8. $\cos(\arccos\alpha) = \alpha$;
9. $\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\alpha) = \alpha$;
10. $\cos\arcsin x = \sqrt{(1-x^2)}$;
11. $\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \frac{\pi}{2}$;
12. $\sin\arcsin x = \sqrt{(1-x^2)}$;

1.7.13 Метод решения простейших уравнений.

Суть метода: уравнения решаются с помощью определений обратных тригонометрических функций.

ПРИМЕР: Найти какому из промежутков принадлежит корень уравнения $\mathrm{arctg}(3-5x) = -\frac{\pi}{3}$

А) (0;1) Б) (1;2) В) (-1;0) Г) (-2;-1)

РЕШЕНИЕ: Обозначим 3-5x=t, получим $\mathrm{arctg}\ t = -\frac{\pi}{3}$.

По определению из этого равенства следует $t = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$, отсюда $t = -\sqrt{3}$. Т.к. t=3-5x, получаем $3-5x = -\sqrt{3}$, где $x = \frac{(3+\sqrt{3})}{5}$, это значение принадлежит промежутку (0;1).

Ответ: А) (0;1).

1.7.14.Метод введения новой переменной

Этим методом решаются уравнения вида

af(x)=bg(x), где f и g – обратные тригонометрические функции, $a,b\in R$, ab>0. Суть метода: части уравнения приравниваются к новой переменной и уже с новой переменной решают тригонометрическое уравнение.

ПРИМЕР: Решите уравнение arccosx=arctgx.

РЕШЕНИЕ: Приравняем обе части уравнения к новой переменной *y* (согласно определениям обратных тригонометрических функций $\frac{\pi}{2}$>y>0), получаем arccosx=y, следовательно, x=cosy, arctgx=y, следовательно, x=tgy, т.е. cosy=tgy. Умножив тригонометрическое уравнение cosy - tgy=0, на cosy, получаем уравнение, $\cos^2 y$-siny=0, которое сводится к квадратному уравнению относительно y. Решая его, получаем siny = $(\sqrt{5}-1)/2$.

Найдем x = cosy, зная, что siny = $(\sqrt{5}-1)/2$

$$x=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-((\sqrt{5}-1)/2)^2}==\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}.$$

Ответ: x=$\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$.

1.7.15 Метод нахождения значения тригонометрической функции от левой и правой части уравнения.

Суть метода: если равны углы, то равны и тригонометрические функции от них (обратное не верно). Значения обратных тригонометрических функций есть величины углов, следовательно, уравнение можно сделать тригонометрическим, найдя значения какой-нибудь тригонометрической функции от обоих частей исходного уравнения.

ПРИМЕР: Решить уравнение $\text{arctg}\frac{1}{(x-1)}-\text{arctg}\frac{1}{(x+1)}=\frac{\pi}{12}$.

РЕШЕНИЕ: Приравняем значения tg обеих частей уравнения:

$$\text{tg}(\text{arctg}\frac{1}{(x-1)}-\text{arctg}\frac{1}{(x+1)})=\text{tg}\frac{\pi}{12}.$$

Воспользуемся формулой:

$$\mathrm{tg}(\alpha\text{-}\beta)=\frac{(\mathrm{tg}\alpha\text{- tg}\beta)}{(1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta)}.$$

В левой части уравнения получим:

$$\frac{(\mathrm{tg\ arctg}(\frac{1}{(x\text{-}1)})\text{-tg arctg}(\frac{1}{(x+1)}))}{(1+\mathrm{tg\ arctg}(\frac{1}{(x\text{-}1)})\mathrm{tg\ arctg}(\frac{1}{(x+1)}))}=\frac{\frac{1}{(x\text{-}1)}-\frac{1}{(x+1)}}{1+\frac{1}{(x\text{-}1)}\frac{1}{(x+1)}}=\frac{2}{x^2}$$

Таким образом, получили уравнение: $\frac{2}{x^2}=tg(\frac{\pi}{12})$

$$x^2=\frac{2}{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{12})}.$$

Ответ: $x=\pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{12})}}.$

1.7.16 Системы тригонометрических уравнений.

В заданиях тестов системы тригонометрических уравнений попадаются редко, а если они и встречаются– то простые, поэтому эту тему рассмотрим обзорно, подробнее остановившись лишь на записи ответов в решениях системы уравнений.

Если система тригонометрических уравнений свелась к системе, состоящей из элементарных тригонометрических уравнений (т.е. к системе, в которой все уравнения имеют вид f(u)=a, где f(u) есть sinu, cosu, tgu, ctgu, то при решении каждого из этих элементарных уравнений необходимо использовать свой целочисленный параметр, иначе произойдет потеря корней.

ПРИМЕР. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin(2x+3y)=0,\\ \cos(3x-2y)=1.\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Из первого уравнения находим 2x+3y=πk, а из второго:

3x-2y = 2πn.

Получаем систему: $\begin{cases} 2x + 3y = \pi\kappa, \\ 3x - 2y = 2\pi n. \end{cases}$

Решая которую, получаем ответ:

$x=(\frac{\pi}{13})(2k+6n), y=(\frac{\pi}{13})(3k-4n),$ где $k, n \in N$.

Как видим, в ответе фигурируют два независимых друг от друга параметра. Нетрудно убедиться, что использование одного и того же параметра при решении этой системы приведет к потере корней.

Сложности, связанные с записью ответа, не исчерпываются их многопараметричностью.

ПРИМЕР. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y, \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Почленно возведем уравнения в квадрат и, сложив их, получим

$2=(1+\cos y)^2 + \sin^2 y$; $2=1+2\cos y+1$; $2\cos y=0$, откуда $y=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Тогда для этих y будет $\sin y = (-1)^k$. Получили два варианта значений, нужно рассмотреть оба эти случая:

1) k=2n, тогда $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m$;

2) k=2n+1, тогда $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

т.е. $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi m$;

Ответ: $(\frac{\pi}{4}+2\pi m; \frac{\pi}{2}+2\pi n), (-\frac{\pi}{4}+2\pi m; \frac{3\pi}{2}+2\pi n), m, n \in Z.$

Таким образом, если функция первого найденного неизвестного принимает несколько значений, то для нахождения второго неизвестного нужно рассмотреть все варианты.

1.7.17. Методы решения систем тригонометрических уравнений

Основные методы решения тригонометрических уравнений те же, что и алгебраических систем. Прежде всего, это – методы исключения неизвестных и замены неизвестных.

1.7.18. Метод исключения неизвестных

Суть метода: исключая неизвестное, переходим от системы тригонометрических уравнений к одному тригонометрическому уравнению, при этом пользуемся одним из двух приемов:

а) из одного уравнения выражаем какое-то неизвестное (или функцию от него) и подставляем в остальные;

б) преобразовав уравнения, составляем из них комбинации (складывая или вычитая уравнения системы), число неизвестных, в которых уменьшается.

ПРИМЕР. Решить систему:

$$\begin{cases} \cos 3x - 4\sin 2y + \cos x = 0, \\ \cos 2x - 2\cos x(2\cos y - \sin y) + 1 - 2\sin 2y = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно t=cosx, предварительно преобразуя

cos2x - 2cosx(2cosy - siny) + 1 - 2sin2y =

$=2\cos^2 x–1- 2\cos x(2\cos y-\sin y) + 1 - 2\sin 2y =$

$=2\cos^2 x - 2\cos x (2\cos y - \sin y) - 2\sin 2y.$

$\cos x = t, \quad 2t^2 - 2t (2\cos y - \sin y) - 2\sin 2y = 0.$

Разделив уравнение на два, получим квадратное уравнение относительно переменной t

$t^2 - t(2\cos y - \sin y) - 2\sin y \cos y=0.$

Корнями этого уравнения являются $t_1=2\cos y$, $t_2= - \sin y$.

Рассмотрим первый случай: cosx = 2cosy.

Первое уравнение преобразуем к виду $2\cos 2x \cos x - 8\sin y \cos y=0$.

Заменив cosx на 2cosy, получим $\cos y (8\cos^2 y – 1 - 2\sin y)=0$,

cosy($8\sin^2 y+2\sin y-7$)=0, откуда:

а) cosy=0, cosx=0; $y=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $k,n\in Z$;

б) $8\sin^2 y+2\sin y-7=0$ корнями соответствующего квадратного уравнения будут числа $\frac{(-1-\sqrt{57})}{8}$ и $\frac{(-1+\sqrt{57})}{8}$. Но $\frac{(-1-\sqrt{57})}{8}<-1$.

Если же $\sin y=\frac{(-1+\sqrt{57})}{8}$, *то* $|\cos x|=2|\cos y|=\frac{2\sqrt{1-(\sqrt{57}-1)^2}}{64}=\frac{1}{4}\sqrt{6}+2\sqrt{57}>1$.

Следовательно, $\sin y=\frac{(-1+\sqrt{57})}{8}$ также не является решением системы.

Рассмотрим второй случай. Преобразовав первое уравнение, после замены cosx на –siny будем иметь: sin ($2\cos^2 y-4\cos y-1$) =0, откуда: а) siny=0, cosx=0; $y=\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $k,n\in Z$;

б)$2\cos^2 y-4\cos y-1=0$, $\cos y=\frac{(2\pm\sqrt{6})}{2}$,т.к. $\frac{(2\pm\sqrt{6})}{2}>1$, то это посторонний корень. Из уравнения $\cos y=\frac{(2-\sqrt{6})}{2}$, следует

$$y_{1,2}=\pm\arccos\left(\frac{(2-\sqrt{6})}{2}\right)+2\pi k$$

Запишем решение последнего уравнения в виде двух серий

$$y_1=\arccos\left(\frac{(2-\sqrt{6})}{2}\right)+2\pi k=\pi-\arccos\left(\frac{(2-\sqrt{6})}{2}\right)+2\pi k$$

$$y_2=-\arccos\left(\frac{(2-\sqrt{6})}{2}\right)+2\pi k=-\pi-\arccos\left(\frac{(2-\sqrt{6})}{2}\right)+2\pi k$$

Для первой серии y находится во второй четверти,

$\sin y>0$ и $\cos x=-\sin y=-\sqrt{1-\left(\frac{(\sqrt{6}-2)}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}$,

$$x=\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}+\pi(2n+1).$$

Для второй серии $x=\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}+2\pi n.$

Ответ: $(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi k}{2}),(\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{6}-6+\pi(2n+1),$

$-\arccos(\frac{(2-\sqrt{6})}{2})+\pi(2k+1)),(\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{6}-6+2\pi n,$

$\arccos(\frac{(2-\sqrt{6})}{2})+\pi(2k+1)),k,n\in Z$

Замечание: полученный ответ можно записать более компактно, объединив последние два множества решений: $(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi k}{2});$

$(\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{6}-6+\pi n;(-1)^n\arcsin(\frac{(\sqrt{6}-2)}{2})+\pi(2k+1)),k,n\in Z.$

1.7.19.Метод замены неизвестных

Суть метода: производят замену неизвестных с целью упрощения тригонометрических уравнений или сведения их к алгебраическим. Если замена неочевидна, то уравнения системы выражают через основные тригонометрические функции sin и cos, а потом уже производят подстановку.

ПРИМЕР: Решить систему: $\begin{cases}5\sin 2x\,\mathrm{tg}y=12\\5\sin 2y\,\mathrm{tg}x=6.\end{cases}$

РЕШЕНИЕ: Выразим выражения, входящие в систему через функции sin и cos:

$$\begin{cases}10\sin x\cos x\,(\sin y/\cos y)=12,\\10\sin y\cos y\,(\sin x/\cos x)=6.\end{cases}$$

Разделим первое уравнение на $\cos^2 x$, а второе– на $\cos^2 y$

$$\begin{cases}10\,\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y=12+12\mathrm{tg}^2x,\\10\,\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y=6+6\mathrm{tg}^2y.\end{cases}$$

Обозначая tgx =u, tgy =v; получаем систему:

$$\begin{cases}10uv=12+12u^2,\\10uv=6+6v^2.\end{cases}$$

Для получения однородного уравнения, умножим второе уравнение на 2 и вычтем из первого. Получим:

$6u^2+5vu-6v^2=0.$

Разделим обе части уравнения на v^2 и получим квадратное уравнение, относительно $t=u/v$ $(t>0)$:

$6t^2-5t-6=0,$

из которого найдем: $t_1=\frac{2}{3}, t_2=-\frac{3}{2}$. В случае $t=-\frac{3}{2}$ решения нет.

Найдем u и v: $(\pm 2l; \pm 3l)$, $l\in N$. Теперь вернемся к исходным неизвестным.

Ответ: $(\pm \operatorname{arctg} 2l + \pi k; \pm \operatorname{arctg} 3l + \pi n)$, $l\in N$, $k,n\in Z$.

Упражнения:

Решить уравнения:

1. $\arcsin x-2\operatorname{arctg} x=0;$ (0).
2. $\operatorname{arctg}(\frac{x\cos\alpha}{1}-\sin\alpha)-\operatorname{arctg}(\frac{(x-\sin\alpha)}{\cos\alpha})=$; (0;1), $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$.
3. $\arccos(\frac{2}{\pi}\arccos x)=\arcsin(\frac{2}{\pi}\arcsin x)$, (0;1).

Вычислить:

1. $\operatorname{tg}(\arcsin(\frac{3}{5}))$, $(\frac{3}{4})$;
2. $\cos(2\arccos(-\frac{4}{5}))$, $(\frac{7}{25})$;
3. $\sin(2{,}5\pi+\operatorname{arctg}0{,}75)$, $(\frac{4}{5})$;
4. $\operatorname{tg}(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}2)$, (-3);
5. $\sin(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3})+\cos(\operatorname{arctg}2\sqrt{2})$, $(\frac{14}{15})$.

Решить систему уравнений:

1. $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}; \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1. \end{cases}$ $(\pi k; \frac{\pi}{4}-\pi k)$, $(\frac{\pi}{4}+\pi n; -\pi n)$.

2. $\begin{cases} \sqrt{\sin x}-\cos y=0; \\ 2\sin x+\cos 2y=2. \end{cases}$ $((-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $k,n\in Z$.

2. Использование информационных технологии в обучении математики

2.1. О методах дистанционного обучения математике

Процесс обучения представляет собой взаимодействие педагога, обучаемого и средств обучения. Возможности современных компьютерных средств и информационных технологий позволяют возложить на средства обучения часть функций преподавателя и часть функций обучаемого, принятых в классической форме обучения. Информационные технологии в дистанционном обучении играют роль инструментов, которые:

- обеспечивают учащимся удаленный доступ не только к учебному материалу, но и к большому количеству справочной информации, в дополнительной, сопровождающей форме;

- предоставляют учащимся средства общения с преподавателем, а также между собой; сегодня имеются технические возможности для того, чтобы учащийся, находящийся на большом расстоянии от учебного центра (школы, вуза, колледжа, лицея), прослушал и просмотрел лекцию, принял участие в видеоконференции или получил консультацию, выполнил компьютерный лабораторный эксперимент и т. п.

- осуществляют управление и контроль за процессом обучения; обучаемый должен убедиться, прежде всего сам в том, что разобрался в изучаемом учебном материале, понял его, запомнил основные положения, научился применять их на практике для решения практических задач. С другой стороны, активная роль преподавателя не менее существенна, поскольку его задача не только убедиться в знаниях подопечного, но и — как при очном обучении — принять решение по корректировке программы обучения с тем, чтобы добиться наилучшего усвоения пройденного материала-предоставляют возможность создания эффективных тренажеров, средств визуализации, максимальное использование различных способов представления информации: текста, графики, видео, звукового сопровождения, анимации, т. е. то, что получило название "мультимедиа";

Ключевым элементом построения обучения с использованием технологий дистанционного обучения является обеспечение удаленного доступа к учебному контенту. Именно благодаря такой возможности, совокупность описываемых технологий и получила название - технологии дистанционного обучения с использованием компьютерных телекоммуникаций. Широкое распространение получают такие формы дистанционного обучения как виртуальная школа, дистанционные курсы и.т.п.

Виртуальная школа - образовательное учреждение, в котором педагогический процесс и обучение осуществляются через Интернет. Материалы по учебным курсам в виртуальной школе представлены в электронном виде и выкладываются на веб-сайте таким образом,чтобы прошедшие авторизацию обучающиеся могли ими пользоваться. Ознакомившись с материалами виртуального урока, обучающийся выполняет ряд заданий, которые автоматически проверяются системой, с выставлением оценки. Обучающийся может вступать во взаимодействие с сетевыми преподавателями, консультируясь по предметам. Сетевые преподаватели могут также осуществлять контроль и оценку знаний обучающийся, общаясь с ним по электронной почте, по телефону, в форуме или при помощи иных технических средств связи. Аттестация обучающихся по всему курсу обычно осуществляется в форме экзамена (очного или заочного).

Дистанционный курс - особая, основанная на использование современных информационных технологий, форма представления содержания учебного курса. Дистанционный курс является основным элементом построения обучения с использованием технологий дистанционного обучения

При помощи Интернет - технологий возможны следующие формы занятий:

Чат-занятия —учебные занятия, осуществляемые с использованием чат-технологий. Чат-занятия проводятся синхронно, то есть все участники имеют одновременный доступ к чату.В рамках многих дистанционных учебных

заведений действует чат-школа, в которойс помощью чат-кабинетов организуется взаимодействие педагогов и учеников.

Веб-занятия —дистанционные уроки, конференции, семинары, деловые игры, лабораторные работы, практикумы и другие формы учебных занятий, проводимых с помощью средств телекоммуникаций и других возможностей «Всемирной паутины». Для веб-занятий используются специализированные образовательные веб-форумы — форма работы пользователей по определённой теме или проблеме с помощью записей, оставляемых на одном из сайтов с установленной на нем соответствующей программой.

От чат-занятий веб-форумы отличаются возможностью более длительной (многодневной) работы и асинхронным характером взаимодействия учеников и педагогов.

Телеконференции— проводятся, как правило, на основе списков рассылки с использованием электронной почты. Для учебных телеконференций характерно достижение образовательных задач. Также существуют формы дистанционного обучения, при котором учебные материалы высылаются почтой в регионы.

Онлайн-семинар — разновидность веб-конференции, проведение онлайн-встреч или презентаций через Интернет в режиме реального времени. Во время веб-конференции каждый из участников находится у своего компьютера, а связь между ними поддерживается через Интернет посредством загружаемого приложения, установленного на компьютере каждого участника, или через веб-приложение.

Конечно, система дистанционного обучения также не идеальна. Во-первых, возникают сложности в определении личности ученика. То есть, пока невозможно точно проверить, сдаёт ли экзамен наш обучающийся либо кто-то за него. Но в качестве решения этой проблемы некоторые вузы дистанционного образования вводят и обязательную очную сессию. Во-вторых, бывает, что качества Интернета недостаточно, чтобы наладить бесперебойную связь между обучающимся и преподавателем. В-третьих,

курсы дистанционного обучения способствуют тому, что непосредственный контакт между обучающимся и преподавателем теряется.

Дистанционное обучение прекрасно подходит для тех, кто живёт в отдалённых районах, а также для тех, кто в силу определённых причин не может посещать очную форму обучения. Кроме того, несомненным преимуществом дистанционных курсов обучения через Интернет является то, что обучающийся может сам выбрать, в какое время суток ему удобнее заниматься, а также определить для себя индивидуальную продолжительность занятий.

Обучающийся по дистанционной формы не имеет жёсткого расписания занятий, а все нюансы всегда могут решиться наиболее быстрым образом при помощи электронной почты, скайпа или ICQ. Кроме того, появляется возможность поговорить с преподавателем on-line и задать все интересующие вопросы по тому или иному предмету. Проходя обучение, дистанционное образование позволяет не беспокоиться о том, что какие-либо оценки будут поставлены "с пристрастием".

2.2. Процессы информатизации современного общества и совершенствование математического образования

Процессы информатизации современного общества и тесно связанные с ними процессы информатизации всех форм образовательной деятельности характеризуются процессами совершенствования и массового распространения современных информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). Подобные технологии активно применяются для передачи информации и обеспечения взаимодействия преподавателя и обучаемого в современных системах открытого и дистанционного образования. Современный преподаватель должен не только обладать знаниями в области ИКТ, но и быть специалистом по их применению в своей профессиональной деятельности.

Сегодня же идея преобразования вторгается в образовательный процесс более естественно, благодаря новым технологиям. Компьютерные

динамические системы способны изменить преподавание математики и геометрии и научить школьников воспринимать геометрические конфигурации, как потенциально изменяющиеся объекты, как одно звено в цепи их непрерывных изменений. В мире созданы и успешно развиваются достаточно много программ динамической геометрии. Некоторые из программ свободно распространяются. К примеру, очень перспективной является система GeoGebra.

Математический пакет GEOGEBRA

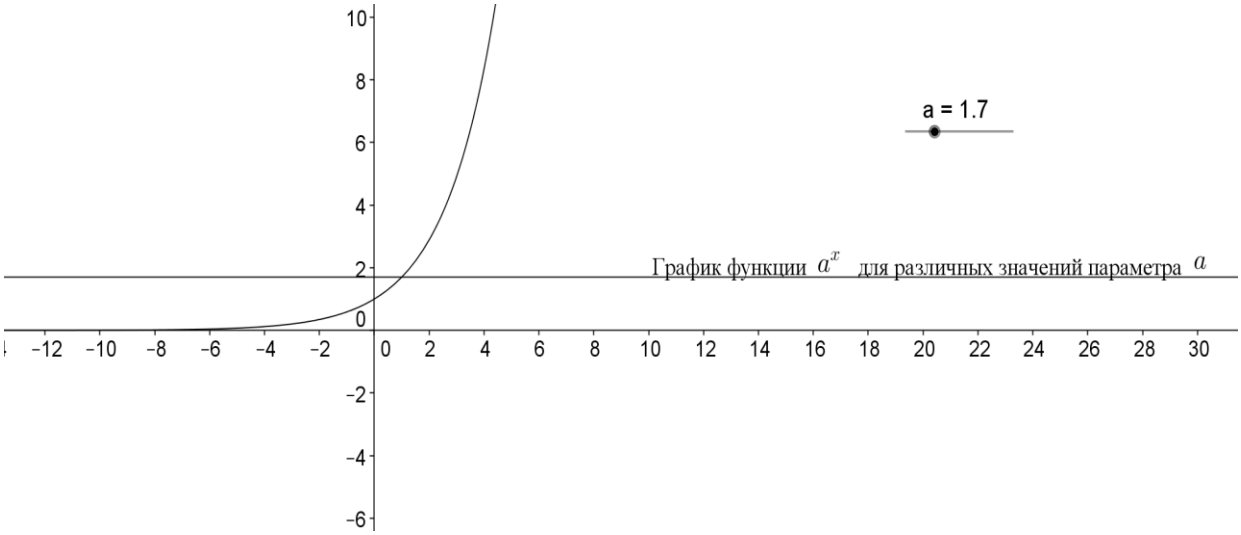
GeoGebra – это свободная образовательная математическая программа, соединяющая в себе геометрию, алгебру и математические исчисления. GeoGebra – свободно-распространяемая (GPL) динамическая геометрическая среда, которая даёт возможность создавать «живые чертежи» в планиметрии, в частности, для построений с помощью циркуля и линейки. Кроме того, у программы богатые возможности работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т.д.) за счёт команд встроенного языка (который, кстати, позволяет управлять и геометрическими построениями). Программа написана Маркусом Хохенвартером на языке Java (соответственно работает медленно, но на большинстве операционных систем). Переведена на 39 языков. Полностью поддерживает русский язык.

Программная среда GeoGebra может быть быстро освоена людьми, имеющими элементарные навыки работы на компьютере, что, несомненно, является большим преимуществом данного программного продукта. К еще одному аргументу в пользу GeoGebra можно отнести её простую интеграцию с офисными приложениями – все чертежи легко могут через буфер обмена быть перенесены для дальнейшего использования как в текстовые редакторы, поддерживающие работу с изображениями, так и в графические редакторы. Используя эту математическую программу можно организовывать преподавание математики более увлекательной и запоминающей и при этом упростить некоторые доказательства.

Я попыталась в своей квалификационной работе использовать эту программу для изложения элементов тригонометрии, показательных и логарифмических уравнений

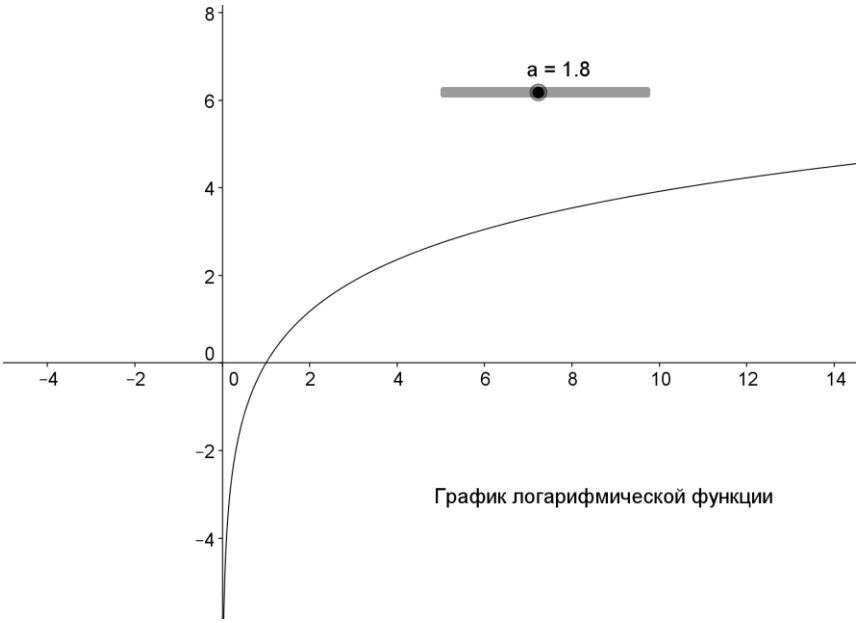
2.3 Материалы для компьютерного сопровождения уроков по темам: Показательная функция

Меняя значение ползунка демонстрируем функцию a^x для различных значений параметра a . при этом особое внимание уделяем значению $a=1$ и к тому что значение $a>0$.

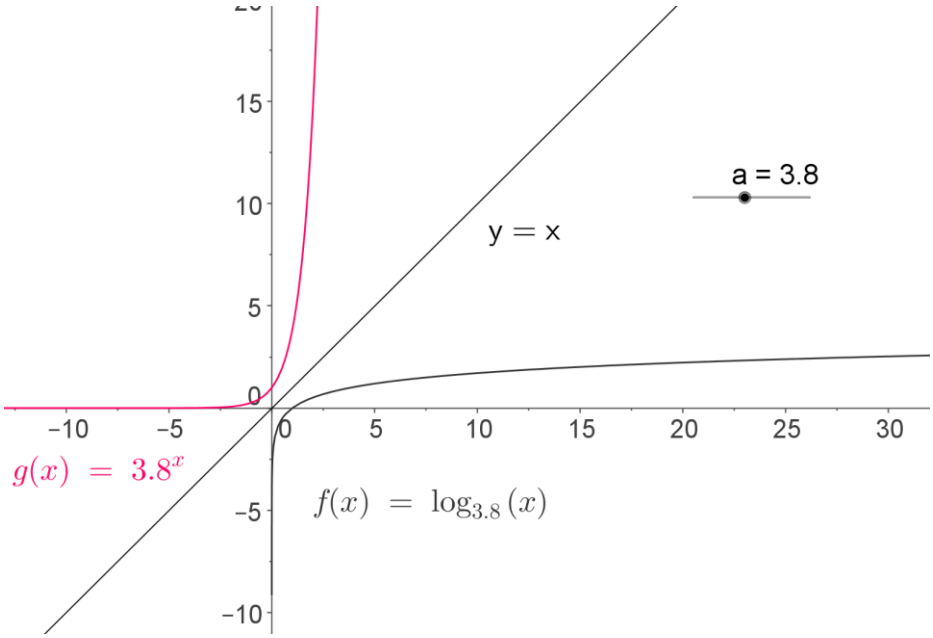


Меняя значение ползунка демонстрируем функцию $\log_a(x)$ для различных значений параметра a . при этом особое внимание уделяем значению $a=1$ и к тому что значение $0<a<1$.

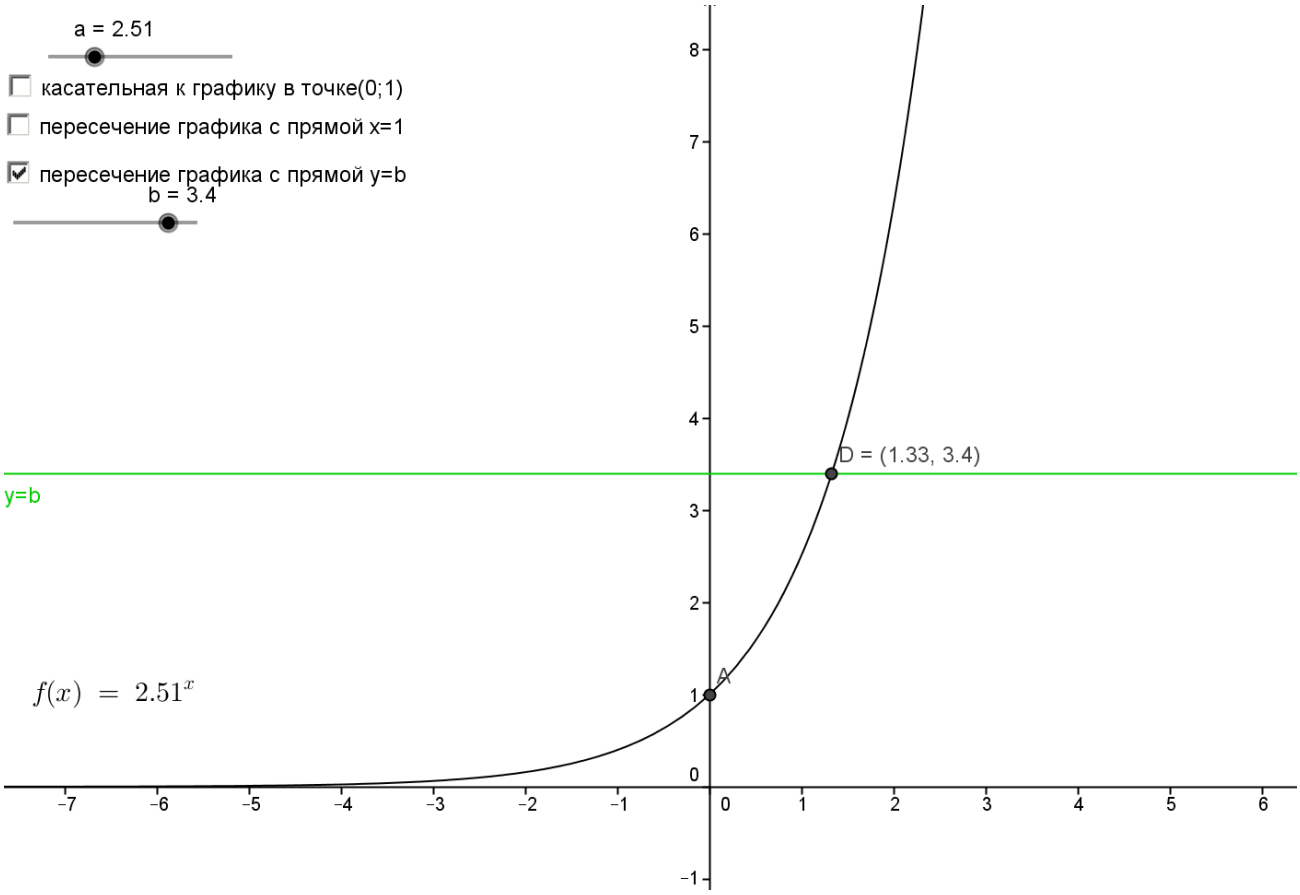
Логарифмическая функция



Показательная и логарифмическая функции как примеры взаимно обратных функций



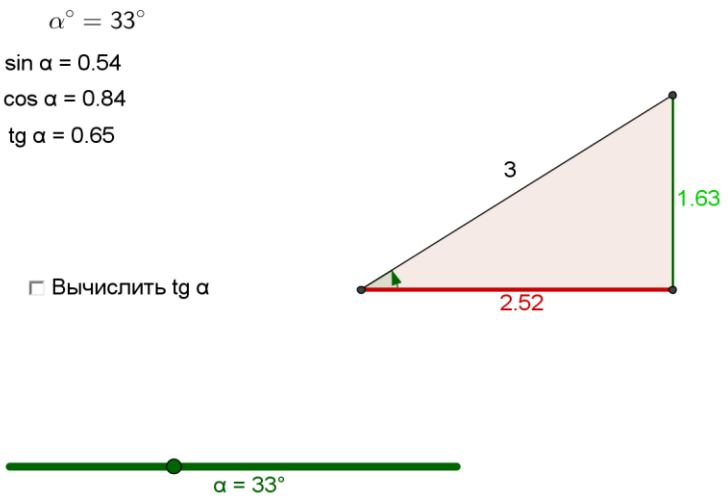
Показательная функция и касательная к ней.



2.4 Материалы для компьютерного сопровождения уроков по тригонометрии

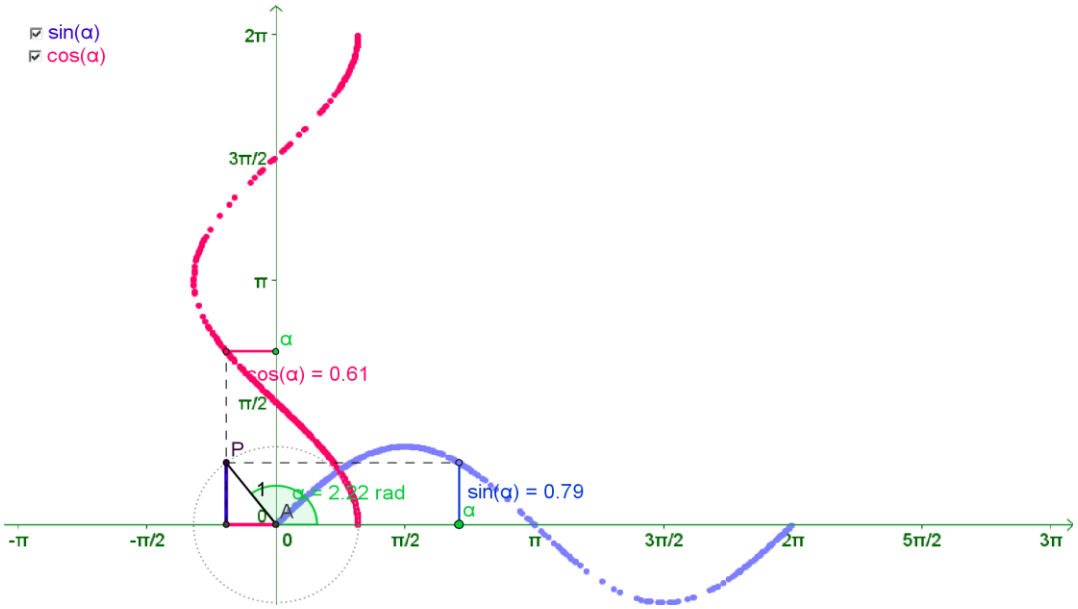
1. Связь тригонометрических функций с прямоугольным треугольником.

С использованием этой программы школьники устанавливают связь между определениями тригонометрических функций для углов задаваемых в прямоугольном треугольнике (определения даваемые в 8ых классах) и для произвольных углов (определения даваемые в старших классах). Цель использования данной программы заключается в закреплении темы определения тригонометрических функций с использованием прямоугольного треугольника.



Также необходимо вспомнить единицы измерения углов в градусах и в радианах и о том ка они свзаны .

2. [Определение тригонометрических функций для произвольных углов1.]

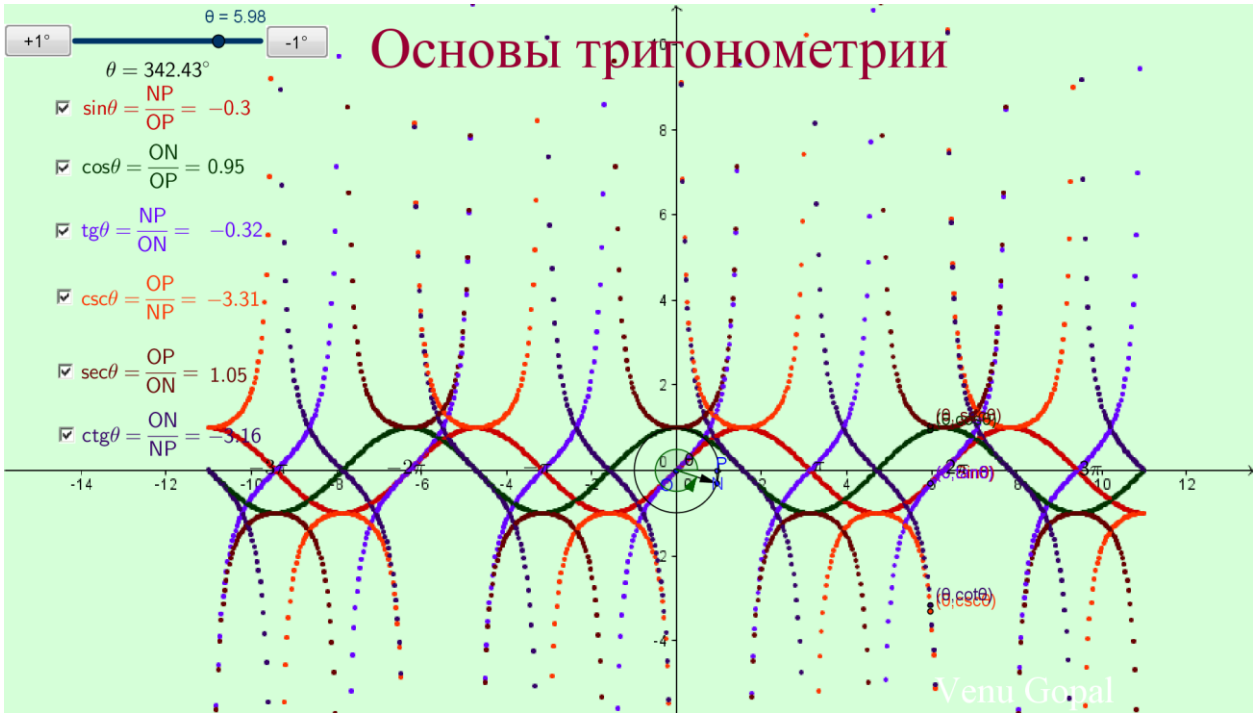


3.

4.

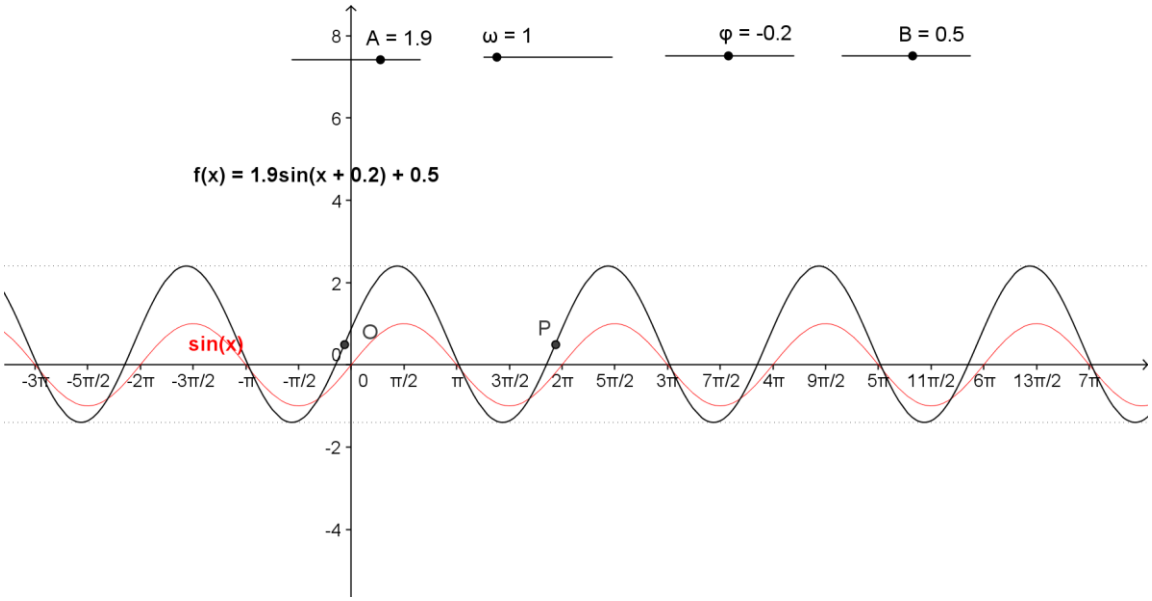
5. Определение тригонометрических функций для произвольных углов 2.

Описание программы: меняется угол и по выбору строятся тригонометрические функции, при этом выводятся на экран изменяющиеся значения функций.



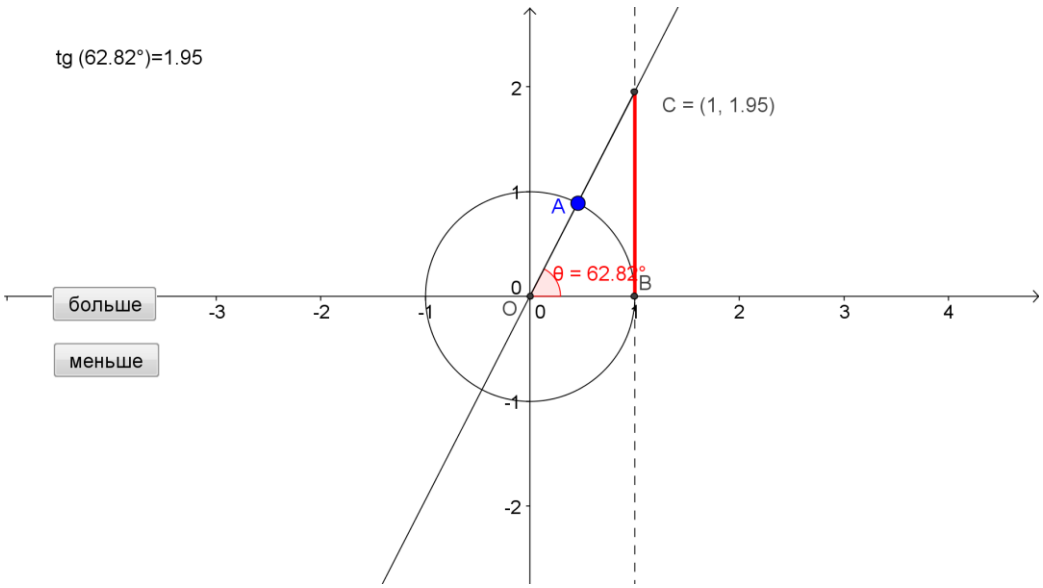
6. Изучение свойств тригонометрических функций,

на примере $A\cdot\sin(w\cdot x+\varphi)+B$. Описание программы: исследует график функции при различных значениях параметров.



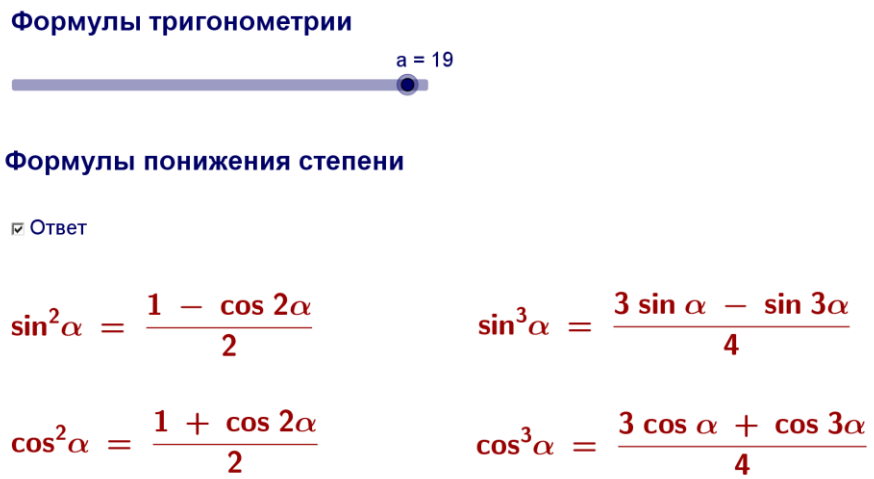
7. Иллюстрация оси тангенсов.

Описание программы: меняя угол, получаем значение тангенса на оси, также числовое значение этой функции.



8. Тест по тригонометрии

Тест содержит 19 вопросов по основным формулам тригонометрии. При проведении урока, можно не показывая ответа, попросить учеников провести доказательство изучаемых формул. Для этого ученики используют предыдущие модели (тригонометрический круг и Определение тригонометрических функций для произвольных углов 2.)



Заключение

В моей квалификационной работе созданы компьютерные материалы по показательным и логарифмическим функциям, тригонометрии, с использованием компьютерной программы GEO GEBRA.

Используя эти материалы можно улучшить качество проведения уроков. Эти модели разработаны с использованием динамической программы GEOGEBRA. Всего разработано 9 программ-примеров

1.Показательная функция

2. Логарифмическая функция

3. Показательная и логарифмическая функции как примеры взаимно обратных функций

4. Связь тригонометрических функций с прямоугольным треугольником.

5. Определение тригонометрических функций для произвольных углов 1.

6. Определение тригонометрических функций для произвольных углов 2.

7. Изучение свойств тригонометрических функций.

8. Иллюстрация оси тангенсов.

9. Тест по тригонометрии

Таким образом, моя квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В первом разделе приводится анализ школьных учебников. В виде фрагментарных лекций приводятся методы решения тригонометрических, показательно и логарифмических уравнений, которые сопровождается примерами.

Во второй главе рассматриваются вопросы использования информационных технологии в обучении математики: 1)методы дистанционного обучения математике, 2)материалы для компьютерного сопровождения уроков по теме: тригонометрия, показательно и логарифмических уравнений

Разработанные материалы и исследования проведенные в квалификационной работе могут в дальнейшем использованы в школе.

Литература

1. *Аджиева А.* Тригонометрические уравнения // Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 33, 2001г.

2. *Адрова И.А., Ромашко И.В.* Модульный урок в X классе по теме «Решение тригонометрических уравнений» //Математика в школе. 2001. №4. С. 28-32.

3. *БашмаковМ.И.* Алгебра и начала анализа. 10-11. Учебное пособие для 10 - 11 кл. средней школы. М. Просвещение, 2000. - 335 с.: ил.

4. *Гилемханов Р.Г.* Освободимся от лишней работы (при решении однородных триг.уравнений) //Математика в школе. 2000. № 10. С.9

5. *Зайкин М.И.* Развивающий потенциал математики и его реализация в обучении (сборник научных и методических работ, предоставленных на региональную научно-практичечскую конференцию).М.: Арзамас, 2002. - 334с.

6. *Звавич В.И., Пигарев Б.П.* Тригонометрические уравнения (решение уравнений + варианты самостоятельных работ) //Математика в школе. № 3, С.18-27..

7. *Колмогоров А.Н.* и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 10 - 11 кл. средней школы. М. Просвещение,2008. - 335 с.: ил.

8. *Мирошин В*. Отбор корней в тригонометрических уравнениях.// Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 17, 2006г.

9. *Мордкович А.Г.* Беседы с учителем. М.: ООО “Издательский дом “ОНИКС 21 век”:ООО “Издательство “Мир и Образование”, 2008”

10. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.: Мнемозина, 2000. - 336с.:ил.

11. *Мордкович А.Г.* Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2009. №6.

12. *Немов Р.С.* Психология: Учеб. для студ. высш. пед. учеб. заведений: В 3 кн-4-е изд. М.: Гумакнит. изд. центр ВЛАДОС, 2003.-Кн.1:Общие основы психологии.-688с.

13. *Немов Р.С.* Психология: Учеб.для студ.высш.пед.учеб.заведений: В 3 кн. - 4е изд. М.:Гумакнит.изд.центр ВЛАДОС, 2003.-Кн.2: Общие основы психологии.-608с.

14. Решетников Н.Н. Тригонометрия в школе: М. Педагогический университет «Первое сентября», 2006, лк 1.

15. Смоляков А.Н., Севрюков П.Ф. Приемы решения тригонометрических уравнений //Математика в школе. 2004. № 1. С. 24-26.

16. *Шабашова О.В.* Приемы отбора корней в тригонометрических уравнениях //Математика в школе. 2004. №1. С.20-24.

Интернет-ресурс:

1. http://www.math.md/school/praktikum/expr/exper.html - Показательные уравнения
2. http://www.math.md/school/praktikum/logr/logr.html - Логарифмические уравнения

Приложение. Содержание учебной программы в 10-11 классах

АЛГЕБРА

Корни и степени. Корень степени $n>1$ и его свойства. Степень с рациональным показателем и ее свойства. Понятие о степени с действительным показателем. Свойства степени с действительным показателем.

Логарифм. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Логарифм произведения, частного, степени; *переход к новому основанию*. Десятичный и натуральный логарифмы, число е.

Преобразования простейших выражений, включающих арифметические операции, а также операцию возведения в степень и операцию логарифмирования.

Основы тригонометрии. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла. Радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла. Формулы половинного угла. Преобразования простейших тригонометрических выражений.

Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства. Арксинус, арккосинус, арктангенс числа.

ФУНКЦИИ

Функции. Область определения и множество значений. График функции. Построение графиков функций, заданных различными способами. Свойства функций: монотонность, четность и нечетность, периодичность, ограниченность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума (максимума и минимума). Графическая интерпретация. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях.

Обратная функция. Область определения и область значений обратной функции. График обратной функции.

Степенная функция с натуральным показателем, её свойства и график.

Тригонометрические функции, их свойства и графики; периодичность, основной период.

Показательная функция (экспонента), её свойства и график.

Логарифмическая функция, её свойства и график.

Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат и симметрия относительно начала координат, симметрия относительно прямой $y = x$, растяжение и сжатие вдоль осей координат.

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Понятие о пределе последовательности

Понятие о непрерывности функции.

Понятие о производной функции, физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций. Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.

Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах. Вторая производная и ее физический смысл.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Решение рациональных, показательных, логарифмических уравнений и неравенств. Решение иррациональных и тригонометрических уравнений.

Основные приемы решения систем уравнений: подстановка,

алгебраическое сложение, введение новых переменных. Равносильность уравнений, неравенств, систем. Решение простейших систем уравнений с двумя неизвестными. Решение систем неравенств с одной переменной.

Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств. Метод интервалов. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Табличное и графическое представление данных.

Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений. Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона.

Элементарные и сложные события. Рассмотрение случаев и вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события.

ГЕОМЕТРИЯ

Прямые и плоскости в пространстве. Основные понятия стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство).

Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых. Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства. Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.

Параллельность плоскостей, перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства. Двугранный угол, линейный угол двугранного угла.

Расстояния от точки до плоскости. Расстояние от прямой до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между

скрещивающимися прямыми.

Изображение пространственных фигур.

Многогранники. Вершины, ребра, грани многогранника. Развертка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники.

Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Прямая и *наклонная призма*. Правильная призма. Параллелепипед. Куб.

Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Треугольная пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.

Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде. Понятие о симметрии в пространстве (центральная, осевая, зеркальная). Примеры симметрий в окружающем мире.

Сечения куба, призмы, пирамиды.

Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Тела и поверхности вращения. Цилиндр и конус. Усеченный конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Осевые сечения и сечения параллельные основанию.

Шар и сфера, их сечения, касательная плоскость к сфере.

Объемы тел и площади их поверхностей. Понятие об объеме тела.

Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы.

Координаты и векторы. Декартовы координаты в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы.

Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Угол между векторами. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам.

Планируемые результаты

В результате изучения математики на базовом уровне ученик должен

знать/понимать

1. значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
2. значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
3. универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
4. вероятностный характер различных процессов окружающего мира;

АЛГЕБРА

уметь

1. выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы, применение вычислительных устройств; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма, используя при необходимости вычислительные устройства; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах;
2. проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции;
3. вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;
4. использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства;

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

уметь

1. определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции;
2. строить графики изученных функций;
3. описывать по графику поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения;
4. решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков;
5. использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

   описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков;

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

уметь

1. вычислять производные и первообразные элементарных функций, используя справочные материалы;
2. исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов и простейших функций с использованием аппарата математического анализа;
3. вычислять в простейших случаях площади с использованием первообразной;
4. использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

   решения прикладных задач, в том числе социально-экономи-ческих и физических, на наибольшие и наименьшие значения.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

уметь

1. решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, простейшие иррациональные и тригонометрические уравнения, их системы;
2. составлять уравнения по условию задачи;
3. использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод;
4. использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

   построения и исследования простейших математических моделей;

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

уметь

1. решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;
2. вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;
3. использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

   анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков;

   анализа информации статистического характера;

ГЕОМЕТРИЯ

уметь

1. распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
2. описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

3. анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
4. изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
5. строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
6. решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
7. использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
8. проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
9. использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

   исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;

   вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости

   справочники и вычислительные уст

6.Литература

1. Алимов Ш.А.Учебник «Алгебра 10-11» - М.: «Просвещение» , 2006.

2. Атанасян Л.С. Учебник «Геометрия 10-11» -М.: «Просвещение», 2006.

3. Григорьева Г.И. Методическое пособие для учителя «Уроки по курсу «Алгебра -10» - Волгоград: Учитель, 2006

4.Кочагин В.В. Сборник заданий по ЕГЭ. – М.: «Эскмо», 2011.

5. Программа по математике для общеобразовательной школы., М., «Просвещение», 2007.

6. Яроненко В.А. Методическое пособие для учителя «Поурочные разработки по геометрии -11», -М.: «ВАКО»,2006.

7. Яровенко В.А. Методическое пособие для учителя «Уроки по курсу «Геометрия -10» - М.: «ВАКО», 2006