ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.55

Д.Е. ЛОМАКИН

ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть S^{2n-1} — единичная сфера в $\mathbb{C}^n$, $d\sigma$ — элемент площади S^{2n-1}. Для $z, w \in \mathbb{C}^n$ полагаем $\langle z, w\rangle = \sum z_i w_i$, $d\omega_{2n}$ — элемент объема в $\mathbb{C}^n$. Через $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{C}^n$ финитных функций.

Для функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ через $\widehat{\varphi}(s, \xi)$ обозначим комплексное преобразование Радона ([1], с. 161). Так как $\widehat{\varphi}(as, a\xi) = |a|^{-2}\widehat{\varphi}(s, \xi)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ([1], с. 162), то отождествим функцию $\widehat{\varphi}(s, \xi)$ с ее сужением на $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$, которое обозначим $\widehat{\varphi}(s, w)$, $w \in S^{2n-1}$.

Для изложения основных результатов работы необходимо привести определение преобразования Радона обобщенных функций ([1], с. 172). Пусть $R\mathcal{D}$ — векторное пространство, образованное комплексными преобразованиями Радона $\widehat{\varphi}(s, w)$, функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. Обозначим через M векторное пространство, образованное функциями вида

$$\psi(s, w) = \frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1}\partial \overline{s}^{n-1}}\widehat{\varphi}(s, w), \tag{1}$$

где $\widehat{\varphi}(s, w) \in R\mathcal{D}$. Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ — обобщенная функция. Преобразованием Радона обобщенной функции F называется линейный функционал, заданный на M и определяемый соотношением

$$(-1)^{n-1} b_n \langle \widehat{F}, \psi\rangle = \langle F, \varphi\rangle, \tag{2}$$

где φ и ψ связаны формулой (1), b_n — положительная постоянная, рассчитываемая по специальной формуле ([1], с. 172).

В дальнейшем через $H(\mathbb{C}^n)$ будем обозначать пространство целых в $\mathbb{C}^n$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах. В ([1], с. 179) показано, что преобразование Радона обобщенной функции, определяемой функцией $F(z) \in H(\mathbb{C}^n)$, может быть задано в виде

$$\widehat{F}(s, w) = |s|^{2n-2} H(s, w), \tag{3}$$

где $H(s, w)$ — целая функция комплексного переменного s. При этом в [1] доказано только существование функции $H(s, w)$.

В данной работе установлен явный вид оператора R_0, сопоставляющего функции $F(z)$ из $H(\mathbb{C}^n)$ ее преобразование Радона $R_0(F)$ (теорема 1). Далее установлена формула обращения для оператора R_0 (теорема 2). Кроме того, доказано (теорема 3), что при условии принадлежности функции $H(s, w)$ из равенства (3) определенному классу оператор R_0 определяет единственный способ задания преобразования Радона функции F.

Рассмотрим пространство $H_s(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ функций вида $u(s, w) = |s|^{2n-2} H(s\overline{w})$, где $H(z)$ — целая функция. Топологию в $H_s(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ зададим с помощью системы полунорм

$$\|u(s, w)\|_m = \max_{|s| \le m,\ w \in S^{2n-1}} \frac{|u(s, w)|}{|s|^{2n-2}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Введем оператор $R_0 : H(\mathbb{C}^n) \to H_s(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, который каждой функции

$$F(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_{k_1 k_2 \ldots k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} \tag{4}$$

ставит в соответствие функцию $\widehat{F}(s,w) = |s|^{2n-2} H(s\overline{w})$ из пространства $H_s(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, где

$$H(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_n=l} d_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}, \tag{5}$$

$$d_{k_1\ldots k_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{b_n 2\pi^n} \frac{c_{k_1\ldots k_n} \prod\limits_{j=1}^{n-1} (k_1 + \cdots + k_n + j)}{((n-1)!)^2 \big(1 + \mathrm{C}_{n-1}^1 \frac{l}{1!} + \cdots + \mathrm{C}_{n-1}^{n-1} \frac{l(l-1)\ldots(l-n+1)}{(n-1)!}\big)};$$

здесь b_n — постоянная из формулы (2), $c_{k_1\ldots k_n}$ — коэффициенты ряда (4), C_{n-1}^m, $m = 1, 2, ..., n-1$, — биномиальные коэффициенты. Из сходимости ряда (4) в топологии $H(\mathbb{C}^n)$ вытекает сходимость в этой топологии ряда (5). Функцию $|s|^{2n-2} H(s\overline{w})$ будем обозначать через $[R_0(F)](s,w)$.

Теорема 1. *Для любой функции $F(z)$ из $H(\mathbb{C}^n)$ функция $[R_0(F)](s,w)$ задает ее преобразование Радона как обобщенной функции.*

Схема доказательства. По построению верно

$$(-1)^{n-1} b_n \frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \overline{s}^{n-1}} \big(|s|^{2n-2} H(s\overline{w})\big) = f(s\overline{w}), \quad (s,w) \in \mathbb{C} \times S^{2n-1}, \tag{6}$$

где функция $f(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет равенству

$$f(z) = \frac{1}{2\pi^n} \prod_{j=1}^{n-1} \bigg(\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + jI \bigg) F(z),$$

I — тождественный оператор. В [2] доказано, что функции $F(z)$ и $f(z)$ связаны равенством

$$F(z) = \int_{S^{2n-1}} f(\langle z, w \rangle \overline{w}) d\sigma(w),$$

т. е. $F(z) = [R^* f(s\overline{w})](z)$, где R^* — оператор дуального преобразования Радона ([3], с. 10). Поэтому для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ верно

$$\int_{\mathbb{C}^n} F(z)\varphi(z) d\omega_{2n}(z) = \int_{\mathbb{C}} \int_{S^{2n-1}} f(s\overline{w}) \widehat{\varphi}(s,w) d\omega_2(s) d\sigma(w).$$

Из (6) в силу финитности по s функций $\widehat{\varphi}(s,w)$ следует

$$\int_{\mathbb{C}^n} F(z)\varphi(z) d\omega_{2n}(z) = (-1)^{n-1} b_n \int_{\mathbb{C}} \int_{S^{2n-1}} |s|^{2n-2} H(s\overline{w}) \frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \overline{s}^{n-1}} \widehat{\varphi}(s,w) d\omega_2(s) d\sigma(w).$$

Тогда по определению функция $|s|^{2n-2} H(s\overline{w})$ задает преобразование Радона функции $F(z)$.

Формулу обращения для преобразования Радона R_0 устанавливает

Теорема 2. *Пусть $F(z) \in H(\mathbb{C}^n)$, $\widehat{F} = R_0(F)$. Тогда*

$$F(z) = (-1)^{n-1} b_n R^* \bigg(\frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \overline{s}^{n-1}} \widehat{F}(s,w) \bigg)(z),$$

где R^* — оператор дуального преобразования Радона

$$(R^* f)(z) = \int_{S^{2n-1}} f(\langle z, w \rangle, w) d\sigma(w).$$

Для данной функции $F(z)$ из $H(\mathbb{C}^n)$ представление ее преобразования Радона в виде (3), вообще говоря, не единственно. Фактически оператор R_0 дает способ нахождения одного из представлений преобразования Радона функции $F(z)$ из $H(\mathbb{C}^n)$ в виде (3). Можно привести примеры различных функций $H_1(s,w)$ и $H_2(s,w)$ непрерывных по $(s,w) \in \mathbb{C} \times S^{2n-1}$ и целых по переменной s таких, что функции $|s|^{2n-2}H_1(s,w)$ и $|s|^{2n-2}H_2(s,w)$ задают преобразование Радона одной и той же функции $F(z)$ из $H(\mathbb{C}^n)$. Следующая теорема показывает, что условие единственности функции $|s|^{2n-2}H(s,w)$ из равенства (3) обеспечивается принадлежностью этой функции классу $H_s(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$.

Теорема 3. *В классе функций $H_s(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ преобразование Радона функции $F(z)$ из $H(\mathbb{C}^n)$ определяется единственным образом.*

Теорема 4. $R_0 : H(\mathbb{C}^n) \to H_s(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ *— линейный непрерывный оператор.*

Замечание. Теоремы 1–4 не дают полного описания пространства преобразований Радона функций из $H(\mathbb{C}^n)$. Соответствующий результат был получен автором в период рецензирования данной работы — оператор R_0 устанавливает топологический изоморфизм пространств $H(\mathbb{C}^n)$ и $H_s(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ (результат сдан в печать в виде отдельной публикации).

Литература

1. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.* – М.: Физматгиз, 1962. – 656 с.
2. Секерин А.Б. *Представление бесконечно дифференцируемых функций разностью плюрисубгармонических* // Матем. заметки. – 1986. – Т.40. – № 5. – С. 598–607.
3. Секерин А.Б. *Применения преобразования Радона в теории аппроксимации* / БНЦ УрО АН СССР. – Уфа, 1991. – 192 с.

Орловский государственный университет

Поступили
первый вариант 05.04.2004
окончательный вариант 26.01.2005