ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 2 (525)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.983

А.Н. КАРАПЕТЯНЦ, В.А. НОГИН

$L_p \to L_q$-ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА СКРУЧЕННОЙ СВЕРТКИ С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ ОСОБЕННОСТИ НА СФЕРЕ И В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ

1. *Введение.* Пусть Ω — невырожденная кососимметрическая вещественная $n \times n$-матрица, n четное. В статье получены $L_p \to L_q$-оценки для оператора скрученной свертки

$$K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_{\alpha,\beta,\gamma}(|y|)e^{i\langle \Omega x, y\rangle}\varphi(x-y)dy \tag{1.1}$$

с ядром

$$k_{\alpha,\beta,\gamma}(|y|) = \begin{cases} d(|y|)|y|^{\gamma-n}, & |y| \le \eta; \\ b(|y|)(1-|y|^2+i0)^{\beta-1}, & 1-\delta \le |y| \le 1+\delta; \\ a(|y|)|y|^{\alpha-n}, & |y| \ge N, \end{cases}$$

где $0 < \operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}\alpha < n$, $-\frac{n-1}{2} < \beta < 1$, $\beta \ne 0, -1, \dots, \left[-\frac{n-1}{2}\right]+1$, $\eta < 1-\delta$, $1+\delta < N$ (в случае $\beta < 0$ интеграл (1.1) понимается в смысле регуляризации). Предполагаем, что функция $a(r)$ такова, что $a(r) \in C^m(0,\infty)$, $m \ge \max\{\operatorname{Re}\alpha - n/4,\ 0\}$, $a(r) = 0$ при $r \le N$ и допускает оценку $|a^{(k)}(r)| \le Cr^{-k}$, $k = 0, 1, \dots, m$. Функция $b(r)$ удовлетворяет условию гладкости $b(r) \in C^l(0,\infty)$, $l \ge [(n-1)/2]+1$, и $b(r) = 0$ при $|r-1| \ge \delta$, а функция $d(r)$ ограничена и стабилизируется в нуле как гельдеровская функция: $|d(r) - d(0)| \le Cr^\lambda$, $r \to 0$, $0 < \lambda \le 1$. Предполагаем, что $a(\infty) \ne 0$, $b(1) \ne 0$ и $d(0) \ne 0$. Вне указанных окрестностей ядро $k_{\alpha,\beta,\gamma}(r)$ ограничено. Кроме того, рассматривается случай, когда $\gamma = n$ либо $\beta = 1$ при условии, что ядро $k_{\alpha,\beta,\gamma}(r)$ ограничено в окрестностях точек $r = 0$ и $r = 1$ соответственно.

Заметим, что операторы вида

$$T_{K,\Phi}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)e^{i\Phi(x,y)}\varphi(y)dy, \tag{1.2}$$

частным случаем которых являются операторы скрученной свертки, естественным образом возникают при изучении сингулярных интегральных операторов на многообразиях меньшей размерности (напр., [1]–[3] и имеющиеся там ссылки). Одна из основных задач, связанных с исследованием этих операторов, состоит в получении для них $L_p \to L_q$-оценок. В случае ядер вида $K(x) = \frac{\omega(x)}{|x|^\mu}$, $0 < \mu \le n$, гладких в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ограниченность операторов вида (1.2) в L_p достаточно хорошо изучена для широкого класса фазовых функций $\Phi(x,y)$ (см. указанные выше ссылки). Отметим также работу [4], в которой получены $L_p \to L_q$-оценки для скрученных сверток с ядрами специального вида, имеющими особенности на единичной сфере.

Естественно, что изучение операторов вида (1.2) по существу отличается от исследования сверточных операторов, когда $\Phi(x,y) = \Phi(x-y)$. В первую очередь, это обусловлено тем, что хорошо развитые методы гармонического анализа не применимы в данной ситуации. Кроме того,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00862-А).

операторы вида (1.2), вообще говоря, не обладают свойством симметрии относительно линии двойственности $1/p+1/q=1$ ([5]).

Интерес к операторам скрученной свертки обусловлен тем, что эти операторы естественно возникают в гармоническом анализе, в частности, при изучении сверток на группе Гейзенберга, а также в исчислении Вейля псевдодифференциальных операторов, определяя формулу для символа композиции операторов.

Локально оператор вида (1.2) имеет характеристики сверточного оператора. Подтверждение этому — теорема М. Коулинга [6], в которой доказано, что оператор скрученной свертки и оператор свертки с одним и тем же компактно сосредоточенным ядром ограничены или неограничены в L_p $(1\le p\le\infty)$ одновременно. С другой стороны, в глобальной части такого оператора доминируют черты осцилляторного интеграла, что вносит существенные изменения в картину ограниченности (см. ниже). Таким образом, оператор вида (1.2) комбинирует черты сверточного оператора и осцилляторного интегрального оператора.

2. *$L_p\to L_q$-оценки для оператора $K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma}$.* Для формулировки основного результата рассмотрим следующие точки на $(1/p,1/q)$-плоскости: $A=\big(1,1-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\big)$, $A'=\big(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n},0\big)$, $B=\big(1-\frac{(n-1)(n-\operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)},\,1-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\big)$, $B'=\big(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n},\frac{(n-1)(n-\operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}\big)$, $N=\big(1-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{2n},1-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{2n}\big)$, $N'=\big(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{2n},\frac{\operatorname{Re}\alpha}{2n}\big)$, $E=(1,0)$, $F=\big(\frac12,\frac12\big)$, $L=\big(1,1-\frac{\operatorname{Re}\gamma}{n}\big)$, $L'=\big(\frac{\operatorname{Re}\gamma}{n},0\big)$, $O=(1,1)$, $O'=(0,0)$, $M=\big(\frac{n+\beta}{n+1},\frac{1-\beta}{n+1}\big)$,

$$Q=\begin{cases}\big(1+\frac{\beta}{n-1},1+\frac{\beta}{n-1}\big), & \beta\le 0;\\ (1,1-\beta), & \beta>0,\end{cases}\qquad Q'=\begin{cases}\big(-\frac{\beta}{n-1},-\frac{\beta}{n-1}\big), & \beta\le 0;\\ (\beta,0), & \beta>0.\end{cases}$$

Введем также множества (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} &L_1(\alpha,n)=[A',N',N,A,E]\setminus(\{A'\}\cup\{A\}),\\ &L_2(\beta,n)=\begin{cases}[M,Q',Q], & -(n-1)/2<\beta<0;\\ [M,Q',O',O,Q]\setminus(\{Q'\}\cup\{Q\}), & 0<\beta<1,\end{cases}\\ &L_3(\gamma,n)=[O,L,L',O']\setminus(\{L'\}\cup\{L\}). \end{aligned}$$

Символом $\mathcal{L}(A)$ будем обозначать $\mathcal{L}$-характеристику оператора A, т. е. множество всех пар $(1/p,1/q)$, для которых этот оператор ограничен из L_p в L_q.

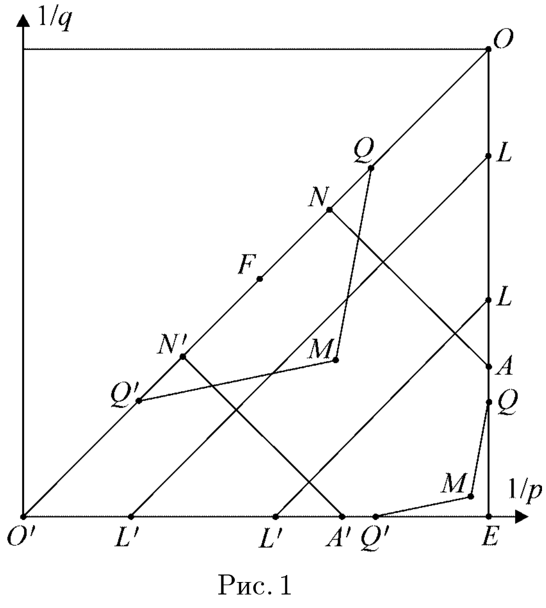

Рис. 1

Теорема 2.1. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$, $0 < \operatorname{Re}\gamma < n$, $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $-\frac{n-1}{2} < \beta < 1$, $\beta \ne 0, -1, \dots, [\,-\frac{n-1}{2}] + 1$. *Тогда*

$$\mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma}) \supset L_1(\alpha, n) \cap L_2(\beta, n) \cap L_3(\gamma, n).$$

В частности, при $\gamma = n$ *или* $\beta = 1$ *справедливы вложения*

$$\mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma}) \supset L_1(\alpha, n) \cap L_2(\beta, n) \quad \text{или} \quad \mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma}) \supset L_1(\alpha, n) \cap L_3(\gamma, n)$$

соответственно.

Далее приведем теорему об ограниченности из L_p в L_q оператора скрученной свертки $K_\Omega^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}$ с особенностями ядра на сферах $|y| = r_j$, $0 < r_1 < \dots < r_s$, $j = 1, \dots, s$ (случай сверточного оператора изучался в [7]). Пусть ядро $k_{\alpha,\overline{\beta},\gamma}(|y|)$ оператора $K_\Omega^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}$ имеет в слое $r_j - \delta \le |y| \le r_j + \delta$ вид $k_{\alpha,\overline{\beta},\gamma}(|y|) = b_j(|y|)(r_j^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_j - 1}$, где функции $b_j(r)$ в соответствующих окрестностях точек $r = r_j$ удовлетворяют тем же условиям, что и функция $b(r)$ в окрестности точки $r = 1$. Вне указанных окрестностей ядро $k_{\alpha,\overline{\beta},\gamma}(|y|)$ совпадает с $k_{\alpha,\beta,\gamma}(|y|)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$, $0 < \operatorname{Re}\gamma < n$, $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $-\frac{n-1}{2} < \beta_j < 1$, $\beta_j \ne 0, -1, \dots, [\,-\frac{n-1}{2}] + 1$, $j = 1, \dots, s$, $\beta_0 = \min\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. *Тогда*

$$\mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}) \supset L_1(\alpha, n) \cap L_2(\beta_0, n) \cap L_3(\gamma, n).$$

3. *Сравнение $\mathcal{L}$-характеристик оператора* (1.1) *и оператора свертки с экспонентой $e^{i|y|}$ в ядре.* Изучим влияние различных осциллирующих экспонент на картину ограниченности соответствующих операторов. Наряду с оператором (1.1) рассмотрим оператор свертки $K^{\alpha,\beta,\gamma}$ с ядром вида $k_{\alpha,\beta,\gamma}(|y|)e^{i|y|}$, для которого $L_p \to L_q$-оценки получены в [7], [8]. В этих статьях и в [9] рассматривались также частные случаи, когда $\gamma = n$ либо $\beta = 1$, либо $\gamma = n$ и $\beta = 1$, охватывающие хорошо известные операторы, такие, как оператор Бохнера–Рисса и акустический потенциал.

Следуя указанным работам, предполагаем, что функция $a(r)$ удовлетворяет условию: функция $a^*(r) = a(r^{-1})$, $0 < r < N^{-1}$, $a^*(0) = \lim\limits_{r \to 0} a^*(r)$, непрерывно дифференцируема до порядка $[\operatorname{Re}\alpha] + 2$ на интервале $[0, N^{-1}]$. Сравнивая теорему 2.1 и результаты, полученные в [8], заключаем, что $\mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma}) \supset \mathcal{L}(K^{\alpha,\beta,\gamma})$ и $\operatorname{mes}\{\mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma}) \setminus \mathcal{L}(K^{\alpha,\beta,\gamma})\} > 0$. При этом множества $\mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma})$ и $\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta,\gamma})$ могут значительно отличаться друг от друга. Проиллюстрируем сказанное на примерах (см. рис. 2).

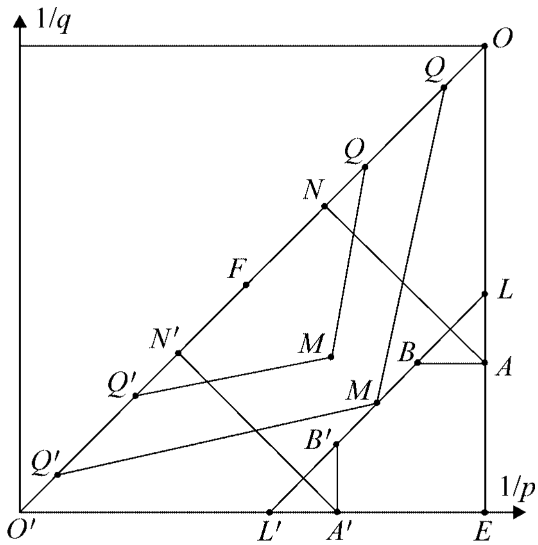

Рис. 2

I) Случай $\gamma = n$. Предположим, что $\alpha \geq \frac{n}{2}$, $\alpha \neq \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots$, $\beta = \alpha - n - 1$. Тогда, как показано в [8], $\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta,\gamma}) = \{M\}$ ($\{M\} \in (B, B')$). В то же время

$$\mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma}) \supset [M, Q, Q'] \cap [N, A, E, A', N'] \setminus (\{A'\} \cup \{A\}). \tag{3.1}$$

Если $\alpha - n \leq \beta < \alpha + 1 - n$ (в этом случае точка $\{M\}$ лежит выше прямой $(B'B)$), то $\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta,\gamma}) = \{\emptyset\}$ [8], тогда как по-прежнему имеет место вложение (3.1).

II) Случай $\beta = 1$. Оказывается, что особенность ядра в точке может порождать такое же сильное различие между $\mathcal{L}$-характеристиками $\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta,\gamma})$ и $\mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma})$. Пусть $\alpha \geq \frac{n}{2}$, $\alpha \neq \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots$, $\operatorname{Re}\gamma = n\frac{1+2\alpha-n}{n+1}$. Тогда $\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta,\gamma}) = (B, B')$ [8], в то время как

$$\mathcal{L}(K_\Omega^{\alpha,\beta,\gamma}) \supset [O, L, L', O'] \cap [N, A, E, A', N'].$$

Литература

1. Phong D.H., Stein E.M. *Hilbert integrals, singular integrals, and Radon transforms.* I // Acta Math. – 1986. – V. 157. – P. 99–157.
2. Ricci F., Stein E.M. *Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integrals.* I. *Oscillatory integrals* // J. Funct. Anal. – 1987. – V. 73. – P. 179–194.
3. Stein E.M. *Harmonic analysis*: *real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* – Princeton: Princeton University Press, 1993. – 695 p.
4. Karapetyants A.N., Ramírez E. *A boundedness result for twisted convolution* // Math. Nachr. – 2003. – V. 250. – № 3. – P. 58–70.
5. Mantero A.M. *Asymmetry of twisted convolution operators* // J. Funct. Anal. – 1982. – V. 47. – P. 7–25.
6. Cowling M. *A remark on twisted convolution* // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1981. – V. 2. – P. 203–209.
7. Карапетянц А.Н., Карасев Д.Н., Ногин В.А. *Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами* // Изв. НАН Армении. Математика. – 2003. – Т. 38. – № 2. – С. 37–62.
8. Karasev D.N., Nogin V.A. *On the boundedness of some potential-type operators with oscillating kernels* // Math. Nachr. – 2005. – V. 278. – № 5. – P. 554–574.
9. Karapetyants A.N., Karasev D.N., Nogin V.A. *$L_p \to L_q$-estimates for the fractional acoustic potentials and some related operators* // Fract. Calc. and Appl. Analysis. – 2005. – V. 8. – № 1–2. – P. 155–172.

Ростовский государственный университет

Поступила 01.08.2005