И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

УДК 519.6:519.85

*И.В. КОННОВ*

# НЕТОЧНЫЙ КОМБИНИРОВАННЫЙ РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

**1.** Пусть $G$ — многозначное отображение в $n$-мерном евклидовом пространстве $R^n$. Рассмотрим задачу о решении многозначного включения

$$0 \in G(u^*), \tag{1}$$

или о стационарной точке отображения $G$. Множество решений этой задачи будем обозначать $S^*$. Теории и методам решения задачи (1) посвящено большое число работ (напр., [1]–[3]). В работе [4] было показано, что многие общие нелинейные задачи такие, как вариационные неравенства, задачи равновесия и задачи оптимизации по бинарным отношениям, сводятся к задаче (1) с многозначным и, вообще говоря, немонотонным отображением. В этих условиях для ее решения не могут быть применены стандартные методы, основанные на прямых обобщениях методов оптимизации. В то же время в [4] был построен итерационный метод решения задачи (1) при условии только неотрицательной ориентированности отображения $G$, т. е. когда существует непустое множество $S^*_{(d)}$ такое, что

$$\forall u \in R^n, \quad \forall g \in G(u) \quad \langle g, u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u^* \in S^*_{(d)}. \tag{2}$$

Это условие выполняется, например, если $S^* \neq \emptyset$ и $G$ монотонно либо псевдомонотонно. Метод [4] основан на идее объединения разнотипных релаксационных процессов в общей схеме, предложенной в [5] (см. также [6], [7]).

Основной целью данной работы является построение метода с расширенными возможностями, допускающего неточное вычисление элементов $G$. Такой метод позволит, с одной стороны, учесть возможные неточности при численной реализации, а с другой стороны, использовать вместо элемента множества $G(u^k)$ в текущей итерационной точке $u^k$ выпуклую комбинацию элементов, вычисленных в ее окрестности, т. е. провести "сглаживание" задачи и тем самым повысить практическую сходимость метода, либо использовать этот прием для упрощения реализации метода, если в некоторых точках вычисление элементов множества $G(u^k)$ вызывает трудности.

**2.** Следуя ([8], гл. I, § 2), будем называть $K$-отображениями полунепрерывные сверху (п. св.) отображения с непустыми выпуклыми компактными образами. В дальнейшем проекцию точки $x$ на множество $X$ будем обозначать через $\mathrm{Pr}(x, X)$, кроме того, пусть

$$B(x,\delta) = \{z \in R^n \mid \|z - x\| \leq \delta\}, \quad M_\delta(x) = \mathrm{conv} \bigcup_{u \in B(x,\delta)} G(u),$$

$\Pi(R^n)$ — множество всех подмножеств $R^n$.

Итак, рассматривается задача о решении многозначного включения (1), где $G : R^n \longrightarrow \Pi(R^n)$ является $K$-отображением, предполагается, что существует решение задачи (2).

*Метод.* Выбираем произвольно точку $u^0 \in R^n$, числа $\theta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,2)$, последовательности

$$\{\alpha_l\} \searrow 0, \ \{\eta_l\} \searrow 0, \ \{\delta_k\} \searrow 0. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 98-01-00200.

Полагаем $k=0$, $\lambda(k)=1$, $y^0=u^0$.

На $k$-й итерации метода, $k=0,1,\dots$, имеем точку $u^k\in R^n$ и число $\lambda(k)$; выполняем следующие действия.

1. Выбираем $q^0\in M_{\delta_k}(u^k)$, полагаем $i=0$, $p^i=q^i$, $l=\lambda(k)$.

2. (*Начало $i$-го шага.*) Если

$$\|p^i\|\le\eta_l, \tag{4}$$

то полагаем $u^{k+1}=y^l=v^k=u^k$, $g^k=0$, $\sigma_k=0$, $\lambda(k+1)=l+1$, $k$-я итерация метода завершена.

3. Полагаем $w^{i+1}=u^k-\alpha_l p^i/\|p^i\|$, выбираем $q^{i+1}\in M_{\delta_k}(w^{i+1})$. Если

$$\langle q^{i+1},p^i\rangle>\theta\|p^i\|^2, \tag{5}$$

то полагаем $v^k=w^{i+1}$, $g^k=q^{i+1}$, $\lambda(k+1)=l$ и переходим к п. 5.

4. Полагаем $p^{i+1}=\Pr(0,\mathrm{conv}\{p^i,q^{i+1}\})$, $i$-й шаг завершен. Полагаем $i=i+1$ и переходим к п. 2.

5. Полагаем

$$\sigma_k=\langle g^k,u^k-v^k\rangle/\|g^k\|^2,\quad u^{k+1}=u^k-\gamma\sigma_k g^k, \tag{6}$$

$k$-я итерация метода завершена.

Обозначим через $k_l$ номер итерации такой, что $\lambda(k_l)=l$, $\lambda(k_l+1)=l+1$; а также $C_k=\sup\{\|g\|\mid g\in M_{\alpha_1+\delta_k}(u^k)\}$.

Описанный метод по сравнению с точными вариантами [6], [4] требует иной схемы обоснования сходимости. Установим предварительно несколько вспомогательных свойств.

**Лемма.** *На $k$-й итерации метода имеем*

a) $$p^i\in\mathrm{conv}\{q^0,\dots,q^i\} \tag{7}$$

*и*

$$q^i,p^i\in M_{\alpha_l+\delta_k}(u^k),\quad i=0,1,\dots\,; \tag{8}$$

b) $$\|u^{k+1}-u^*\|^2\le\|u^k-u^*\|^2-\gamma(2-\gamma)(\sigma_k\|g^k\|)^2+2\gamma\delta_k\sigma_k C_k\quad\forall u^*\in S^*_{(d)}; \tag{9}$$

c) *количество шагов на $k$-й итерации конечно.*

**Доказательство.** Если соотношение (5) не выполняется, то последовательности $\{q^i\}$, $\{p^i\}$ удовлетворяют условиям леммы 4.2 из ([9], с. 31), откуда следует (7), а также

$$\|p^i\|\le C/((1-\theta)\sqrt{i+1}),$$

где $C=\sup\{\|q^i\|\mid i=0,1,\dots\}$. Далее, $q^i\in M_{\delta_k}(w^i)$, но $w^i\in B(u^k,\alpha_l)$, поэтому $q^i\in M_{\alpha_l+\delta_k}(u^k)$, в силу свойств $G$ имеем $C<\infty$, и утверждение c) справедливо ввиду условия (4). Учитывая (7), имеем $p^i\in M_{\alpha_l+\delta_k}(u^k)$, т. е. (8) также справедливо.

Обоснуем теперь утверждение b). Прежде всего заметим, что при $\lambda(k+1)>\lambda(k)$ соотношение (9) выполняется. Пусть теперь $\lambda(k+1)=\lambda(k)$. Выберем произвольно $u^*\in S^*_{(d)}$. По определению на каждой итерации $q^i\in M_{\delta_k}(w^i)$, т. е. найдутся элементы $z^{i,j}\in B(w^i,\delta_k)$, $q^{i,j}\in G(z^{i,j})$ и числа $\mu_j$, $j\in J$, такие, что

$$q^i=\sum_{j\in J}\mu_j q^{i,j},\quad \sum_{j\in J}\mu_j=1,\quad \mu_j\ge0,\quad j\in J;$$

при этом в силу (2) $\langle q^{i,j}, z^{i,j} - u^* \rangle \geq 0$. Отсюда следует

$$\begin{aligned}\langle q^i, w^i - u^* \rangle &= \sum_{j \in J} \mu_j (\langle q^{i,j}, z^{i,j} - u^* \rangle + \langle q^{i,j}, w^i - z^{i,j} \rangle) \geq \\ &\geq - \sum_{j \in J} \mu_j \|q^{i,j}\| \delta_k \geq -\delta_k C_k.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\langle g^k, u^k - u^* \rangle &= \langle g^k, u^k - v^k \rangle + \langle g^k, v^k - u^* \rangle = \\ &= \sigma_k \|g^k\|^2 + \langle q^i, w^i - u^* \rangle \geq \sigma_k \|g^k\|^2 - \delta_k C_k.\end{aligned}$$

Используя это неравенство совместно с (6), получаем

$$\begin{aligned}\|u^{k+1} - u^*\|^2 &= \|u^k - \gamma \sigma_k g^k - u^*\|^2 = \\ &= \|u^k - u^*\|^2 - 2\gamma\sigma_k \langle g^k, u^k - u^* \rangle + (\gamma \sigma_k \|g^k\|)^2 \leq \\ &\leq \|u^k - u^*\|^2 - 2\gamma\sigma_k (\sigma_k \|g^k\|^2 - \delta_k C_k) + (\gamma\sigma_k \|g^k\|)^2,\end{aligned}$$

откуда следует (9). $\square$

**3.** Перейдем к обоснованию сходимости метода.

**Теорема 1.** a) *Количество шагов на каждой итерации метода конечно.*

b) *Если* $C = \sup\{\|g\| \mid g \in G(u),\ u \in R^n\} < \infty$, *то существуют подпоследовательности* $\{u^{k_s}\}$, $\{p^{k_s}\}$ *и* $\{\varepsilon_{k_s}\} \searrow 0$ *такие, что* $\lim_{s \to \infty} p^{k_s} = 0$, $p^{k_s} \in M_{\varepsilon_{k_s}}(u^{k_s})$.

**Доказательство.** Утверждение a) следует из утверждения c) леммы. Покажем теперь, что последовательность $\{y^l\}$ бесконечна. Действительно, если $\lambda(k) \leq \bar{l} < \infty$, то, начиная с некоторого номера итерации $\bar{k}$, $\lambda(k+1) = \lambda(k)$; тогда с учетом (5) и условия теоремы имеем

$$\sigma_k \|g^k\|^2 = \langle g^k, u^k - v^k \rangle = \alpha_l \langle q^{i+1}, p^i \rangle / \|p^i\| > \theta \alpha_l \|p^i\| \geq \theta \alpha_l \eta_l \geq \widetilde{\theta} > 0,$$

поэтому из (3), (9) следует

$$\begin{aligned}\|u^{k+1} - u^*\|^2 - \|u^k - u^*\|^2 &\leq -\gamma(2-\gamma)(\sigma_k \|g^k\|)^2 + 2\gamma \delta_k \sigma_k C_k \leq -\gamma\sigma_k [(2-\gamma)\sigma_k \|g^k\|^2 - 2\delta_k C_k] \leq \\ &\leq -\gamma\sigma_k [(2-\gamma)\widetilde{\theta} - 2\delta_k C] \leq -\gamma(2-\gamma)\sigma_k \widetilde{\theta}/2 \leq -\gamma(2-\gamma)(\widetilde{\theta}/C)^2/2\end{aligned}$$

при достаточно больших $k$, т. е. противоречие. Итак, последовательность $\{y^l\}$ бесконечна, но $y^l = u^{k_l}$, и на $k_l$-й итерации существует индекс $i_l$ такой, что $\|p^{i_l}\| \leq \eta_l$. Учитывая (3), (8), получаем, что утверждение b) справедливо, поскольку в качестве $\varepsilon_{k_s}$ можно взять $\alpha_l + \delta_{k_l}$, в качестве $u^{k_s}$ можно взять $y^l$. $\square$

**Следствие.** Если последовательность $\{u^k\}$ ограничена, то она имеет предельную точку в $S^*$.

**Доказательство.** Действительно, в этом случае $C_k \leq C' < \infty$ и утверждение b) теоремы 1 справедливо, т. е. последовательность $\{u^{k_s}\}$ имеет предельную точку, которая должна находиться в $S^*$. $\square$

Таким образом, имеет смысл несколько модифицировать схему метода, чтобы усилить свойства сходимости. А именно, пусть $V$ – выпуклое компактное множество, для которого $V \cap S^*_{(d)} \neq \emptyset$. Тогда в методе следует заменить правило (6) на следующее:

$$u^{k+1} = \Pr(u^k - \gamma \sigma_k g^k, V),$$

и в силу нерастягивающих свойств проекции утверждения леммы и теоремы 1 останутся справедливыми, с заменой $S^*_{(d)}$ на $V \cap S^*_{(d)}$, при этом последовательность $\{u^k\}$ станет ограниченной. Поэтому справедлива

**Теорема 2.** *В модифицированном методе*
a) *количество шагов на каждой итерации конечно*;
b) *последовательность* $\{u^k\}$ *имеет предельную точку в* $S^*$.

**4.** Попробуем уточнить, насколько общими являются предположения, гарантирующие сходимость предложенного метода. Напомним, что отображение $Q : U \longrightarrow \Pi(R^n)$ называется *псевдомонотонным*, если для любых $u', u'' \in U$ и любых $q' \in Q(u')$, $q'' \in Q(u'')$ выполняется $\langle q'', u' - u'' \rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle q', u' - u'' \rangle \geq 0$.

**Предложение 1.** *Пусть $G$ является $K$-отображением. Тогда*
a) *множество* $S^*_{(d)}$ *выпукло и замкнуто*;
b) $S^*_{(d)} \subseteq S^*$, *т. е. любое решение задачи* (2) *является решением задачи* (1);
c) *если $G$ псевдомонотонно, то* $S^* = S^*_{(d)}$.

**Доказательство.** Выпуклость и замкнутость множества $S^*_{(d)}$ следуют из его определения. Утверждение b) доказано во многих работах, см., например, лемму 3 в [10]. Утверждение c) следует из определения псевдомонотонности. □

Пусть $U$ — непустое выпуклое и замкнутое множество в $R^n$, $Q : U \longrightarrow \Pi(R^n)$ — многозначное отображение на $U$. Рассмотрим вариационное неравенство: найти такой элемент $u^* \in U$, что

$$\exists q^* \in Q(u^*), \quad \langle q^*, u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U. \tag{10}$$

Множество решений этой задачи будем обозначать $U^*$. Наряду с задачей (10) рассмотрим также задачу нахождения элемента $u^* \in U$ такого, что

$$\forall u \in U, \quad \forall q \in Q(u) \quad \langle q, u - u^* \rangle \geq 0. \tag{11}$$

Множество решений этой задачи, которую можно определить как дуальное вариационное неравенство, будем обозначать $U^*_{(d)}$. Задача (11) достаточно хорошо известна в теории вариационных неравенств (напр., [10]–[12]). Замена исходной задачи (10) на дуальную (11) для построения итерационного метода ее решения впервые, по-видимому, была предложена в [13] (при дополнительном условии сильной монотонности основного отображения), в [14] — при дополнительном условии монотонности. Метод нахождения точки, удовлетворяющей (11) (метод эллипсоидов), впервые, по-видимому, был предложен в [15]. В [5] дуальная задача (11) была рассмотрена без дополнительных условий типа монотонности применительно к решению вариационного неравенства (10) как условие обеспечения сходимости предложенного в [5] итерационного метода (для многозначного случая — в [6]).

Обсудим теперь связь между вариационным неравенством и включением, а также между соответствующими дуальными задачами. Выберем произвольное число $\rho > 0$ и обозначим

$$N(U, u) = \{q \in R^n \mid \langle q, z - u \rangle \leq 0 \ \ \forall z \in U\};$$
$$S_\rho(u) = S(0, \rho) \cap N(U, u), \quad D_\rho(u) = \operatorname{conv} S_\rho(u),$$

где $S(0, \rho) = \{z \in R^n \mid \|z\| = \rho\}$, а также пусть

$$G(u) = \begin{cases} Q(u), & \text{если } u \in \operatorname{int} U; \\ \operatorname{conv}\{Q(u) \cup D_\rho(u)\}, & \text{если } u \in U \backslash \operatorname{int} U; \\ D_\rho(u), & \text{если } u \notin U. \end{cases} \tag{12}$$

**Предложение 2.** *Пусть* $\operatorname{int} U \neq \emptyset$, *$Q$ является $K$-отображением, отображение $G$ определено согласно* (12). *Тогда*
a) *$G$ является $K$-отображением*;
b) $U^* = S^*$;
c) $U^*_{(d)} = S^*_{(d)}$.

**Доказательство.** Утверждения a) и b) доказаны в ([4], теорема 2), кроме того, там же установлено, что $U^*_{(d)} \subseteq S^*_{(d)}$. Покажем обратное включение. Из п. b) и предложения 1 b) следует, что $S^*_{(d)} \subseteq S^* = U^* \subseteq U$. Поэтому, если предположить, что существует элемент $z^* \in S^*_{(d)} \backslash U^*_{(d)}$, то найдутся точка $u \in U$ и элемент $q \in Q(u)$ такие, что $\langle q, u - z^* \rangle < 0$, т. е. $z^* \notin S^*_{(d)}$. $\square$

Таким образом, существование решений для прямого или дуального вариационного неравенства влечет существование решений для задачи о многозначном включении или соответствующей дуальной задачи, причем дуальная задача (2) будет иметь решение при достаточно общих предположениях.

## Литература


1. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – М.: Мир, 1975. – 560 с.
3. Обен Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения.* – М.: Мир, 1988. – 264 с.
4. Коннов И.В. *Один общий подход к нахождению стационарных точек и решению смежных задач* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – № 5. – С. 40–50.
5. Коннов И.В. *Комбинированные релаксационные методы для поиска точек равновесия и решения смежных задач* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 2. – С. 46–53.
6. Коннов И.В.*О скорости сходимости комбинированных релаксационных методов* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 12. – С. 89–92.
7. Konnov I.V. *A combined relaxation method for variational inequalities with nonlinear constraints* // Math. Programming. – 1998. – V. 80. – № 2. – P. 239–252.
8. Беленький В.З., Волконский В.А., Иванков С.А. и др. *Итеративные методы в теории игр и программировании.* - М.: Наука, 1974. – 240 с.
9. Коннов И.В. *Методы недифференцируемой оптимизации.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1993. – 100 с.
10. Shih M.H., Tan K.K. *Browder-Hartmann-Stampacchia variational inequalities for multi-valued monotone operators* // J. Math. Anal. and Appl. – 1988. – V. 134. – № 2. – P. 431–440.
11. Harker P.T., Pang J.-S. *Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications* // Math. Programming. – 1990. – V.48. – № 2. – P. 161–220.
12. Байокки К., Капело А. *Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей.* – М.: Наука, 1988. – 448 с.
13. Абрамов А.А., Гаипова А.Н. *О решении некоторых уравнений, содержащих разрывные монотонные преобразования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1972. – Т. 12. – № 1. – С. 204–207.
14. Немировский А.С. *Эффективные итеративные методы решения уравнений с монотонными операторами* // Экономика и матем. методы. – 1981. – Т. 17. – № 2. – С. 344–359.
15. Шор Н.З. *Новые направления в развитии методов негладкой оптимизации* // Кибернетика. – 1977. – № 6. – С. 87–91.



*Казанский государственный университет*



*Поступила* 13.04.1998